

11-Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, on pose $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

A) Structure d'un espace vectoriel normé.

1) Norme dans un espace vectoriel

Définition : soit E un K -espace vectoriel et N une application de E dans \mathbb{R} . Alors N est une norme sur E si et seulement si :

- $\forall u \in E, N(u) \geq 0$
- $\forall u \in E, N(u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$ (séparation)
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (homogénéité)
- $\forall u, v \in E, N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire)

Un espace vectoriel normé est alors un espace vectoriel muni d'une norme.

Propriété (rappel) : soit $k \in \mathbb{R}_+$. Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . On note $kA = \{kx, x \in A\}$. Alors $\sup(kA) = k \sup(A)$.

Exemples (rappels) :

- soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors l'application définie sur E par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ associée à ce produit scalaire est une norme sur E . C'est la norme euclidienne associée.
- Si I est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} , on note $B(I, K)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I à valeurs dans K .

On définit sur $B(I, K)$ la norme infinie par $\forall f \in B(I, K), \|f\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

$\|\cdot\|_{\infty, I}$ est une norme sur $B(I, K)$.

Exemples (*) :

- a) Dans \mathbb{R}^p , soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On définit $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^p |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^p x_k^2}$.

et $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq p} (|x_k|)$. Ce sont des normes sur \mathbb{R}^n . Regarder ce que cela donne pour $x = e_1 + e_2$.

- b) En particulier, le module (ou la valeur absolue dans \mathbb{R}) est une norme sur K .

- c) Dans $M_p(\mathbb{R})$, on définit $\|M\|_1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |M_{ij}|$ et $\|M\|_{\infty} = \max_{1 \leq i, j \leq p} |M_{ij}|$. Ce sont des normes.

Calculer la norme de I_p pour chacune des deux normes.

Propriété : soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x, y \in E$. Alors :

- $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|x - y\| \geq \|\|x\| - \|y\|\|$

Preuve : à expliquer.

Définition : soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $x, y \in E$. La distance entre x et y est alors égale à $d(x, y) = \|x - y\|$.

2) Suite dans un espace vectoriel normé.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition :

- Soit A une partie de E . Alors A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq M$.
- Soit (x_n) une suite d'éléments de E . Alors (x_n) est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$.

Dessin : dans le plan usuel pour la norme euclidienne.

Définition : On considère une suite (x_n) d'éléments de E et $a \in E$. On dit que (x_n) converge vers a quand n tend vers l'infini et on note $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ si et seulement si $\|x_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - a\| \leq \varepsilon$).

Remarques :

- Il y a unicité de la limite si elle existe.
- (x_n) diverge si et seulement si $\forall a \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|x_n - a\| > \varepsilon$.
- Dans un espace vectoriel normé, une suite ne peut pas tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples (*) :

- On prend $E = \mathbb{C}$ et $\|\cdot\| = |\cdot|$ (le module). Alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \Leftrightarrow |x_n - a| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- On prend $E = M_p(\mathbb{R})$. On se place dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, avec, pour $M \in E$, $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq p} |M_{ij}|$. Etudier la convergence de la suite définie par $M_n = M - \frac{1}{n} I_p$.
- On pose $E = B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Etudier la convergence la suite (f_n) définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

Propriétés : On considère une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers $a \in E$. Alors (x_n) est bornée et $\|x_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|a\|$.

Preuve : à expliquer.

Propriétés : soit $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$. Soit $\lambda, \mu \in K$. Soit (U_n) une suite d'éléments de K . On suppose $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$ et $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$

. Alors :

- $\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda a + \mu b$
- $U_n x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} ca$

Preuve : non faite.

Rappel-propriété : soit (x_n) une suite d'éléments d'une espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$. Une suite extraite (ou une sous-suite) de (x_n) est une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$, où φ est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissante.

Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \in E$, alors toute suite extraite de (x_n) tend également vers a .

Ainsi, si deux suites extraites de (x_n) tendent vers des limites différentes, alors (x_n) n'a pas de limite.

Exemple : soit $A \in M_p(K)$. On suppose $A^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} B$. Alors $A^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} B$

Propriété : soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$. On suppose que (x_{2n}) et (x_{2n+1}) tendent vers une même limite $a \in E$. Alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

3) Equivalence des normes

Définition (*) : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E . On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** si et seulement si il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in E, \begin{cases} N_1(x) \leq a N_2(x) \\ N_2(x) \leq b N_1(x) \end{cases}$$

Propriétés : Soit E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E .

- Soit $A \subset E$. A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2 .
- Soit (U_n) une suite d'éléments de E . Soit $a \in A$. Alors (U_n) converge vers a pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers a pour la norme N_2 .
- En particulier, s'il existe une suite (U_n) qui converge vers $a \in A$ pour la norme N_1 mais ne converge pas vers a pour la norme N_2 , alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Preuve : à expliquer.

Exemples :

- On se place dans \mathbb{R}^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.
- On se place dans $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes. Avec une fonction chapeau pointu qui tend vers 0 pour une norme mais pas pour l'autre.

Proposition admise (*) : Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Propriété (*) : soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**. Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Alors on considère une suite (x_n) d'éléments de E . Soit $a \in E$. Alors (x_n) converge vers a si et seulement si (x_n) tend vers a **coordonnée par coordonnée**.

Plus précisément, si $x_n = x_{n,1}e_1 + x_{n,2}e_2 + \dots + x_{n,p}e_p$ et $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_pe_p$, alors (x_n) converge vers a si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_k$.

Preuve : en prenant $\|a\| = \max_{1 \leq k \leq p} |a_k|$.

Corollaire (*) : une suite de matrices (M_n) d'éléments de $M_p(K)$ converge vers $M \in M_p(K)$ si et seulement si elle converge vers M coefficient par coefficient, c'est-à-dire que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M_n)_{ij} \rightarrow M_{ij}$.

Preuve : les coefficients sont les coordonnées dans la base canonique de $M_p(K)$.

Exemples :

- prendre la suite (U_n) d'éléments de \mathbb{R}^3 définie par $U_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n^4}{n!} \right)$.
- On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} \right)$.

Proposition (*,PV) : Soit $A \in M_p(K)$. Alors A est limite d'une suite de matrices inversibles.

Preuve : Dans $M_p(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |M_{ij}|$, on prend $A \in M_p(\mathbb{R})$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = A + \frac{1}{n} I_p$. Alors $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$. Pour n assez grand, A_n est inversible.

4) Topologie d'un espace vectoriel normé.

Dans tout ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définitions : Soit $r > 0, a \in E$.

- La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$.
- La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$.

Exemple : dessiner les boules ouvertes de centre 0_E et de rayon 1 dans le plan usuel pour les différentes normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Définition (*) : Soit A une partie (un sous-ensemble) de E . On dit que A est **convexe** si et seulement si $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in A$ (le segment qui relie x et y est tout entier inclus dans A).

Dessins dans le plan :

Propriété :

- les boules (ouvertes et fermées) incluses dans E sont convexes.
- Les sous-espaces vectoriels de E sont convexes.

Preuve : avec $\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\|$

Définitions (*) : Soit A une partie de E . Soit $a \in A$.

- On dit que a est **intérieur** à A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.
- A est **ouvert** si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Cela signifie que A contient une petite boule ouverte autour de chacun de ses points.

Exemples : déterminer si certains sous-ensembles sont ouverts ou pas.

- $]0, 1[;]0, 1]$; \mathbb{R} .
- Les boules ouvertes sont des ouverts. Mais pas les boules fermées.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_2(K)$ n'est pas ouvert dans $M_2(K)$ (en prenant $I_2 + \varepsilon E_{12}$).

Propriétés :

- Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .
- Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E .

Preuve : à faire.

Définitions (*) : Soit A une partie de E .

- Soit $a \in E$. On dit que a est **adhérent** à A si et seulement s'il existe une suite (x_n) d'éléments de A tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.
- L'adhérence de A , notée $Adh(A)$ ou \bar{A} est l'ensemble des points adhérents à A .
- A est **fermé** si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $a \in E$, on a $a \in A$.

Exemples :

- $[0,1]$; $]0,1]$; \mathbb{R} ; $[0,1] \times [0,1]$ dans \mathbb{R}^2 .
- Les boules fermées et les sphères sont des fermés.
- On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne usuelle. Quelle est l'adhérence de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$?

Propriété : Soit A une partie de E . Soit $a \in E$. a est **adhérent** à A si et seulement si $\forall r > 0, B(a,r) \cap A \neq \emptyset$.

Preuve : à ne pas faire. Faire un dessin.

Propriété : Soit A une partie de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est fermé
- $E \setminus A$ est un ouvert.

Preuve : à faire.

Propriété :

- Une union finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Preuve : par passage au complémentaire.

Remarques :

- Il y a des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés.
- Il y a des ensembles qui sont ouverts et fermés.

Définition (*) : Soit A une partie de E . Soit $D \subset A$. On dit que D est **dense** dans A si et seulement si pour tout élément $a \in A$, il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a .

Exemple admis : \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} (tout réel est limite d'une suite de rationnels).

Remarque : si N_1, N_2 sont deux normes équivalents sur E , alors les propriétés topologiques sont les mêmes pour N_1, N_2 (convergence des suites, ouverts, fermés,...)

B) Limite et continuité dans un espace vectoriel normé.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit A un sous-ensemble de E .
Soit $f : A \rightarrow F$.

1) Limite en un point.

Définition : f est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M$.

Définition : Soit A une partie de E . Soit a un point de E adhérent à A . Soit $b \in F$ et soit f une application de A dans F .

On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ si et seulement si $\|f(x) - b\|_F \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

(autrement dit, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$)

Proposition : caractérisation séquentielle de la limite. Soit a un point de E adhérent à A . Soit $b \in F$. Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, on a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.

Propriété : opérations sur les limites. Soit a un point de E adhérent à A . Soit $b, b' \in F$ et soient f, g deux applications de A dans F . Soient $\alpha, \beta \in K$.

On suppose $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b'$

- Alors $\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha b + \beta b'$
- Soit $h : A \rightarrow K$ telle que $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} k$. Alors $f(x)h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} kb$
- Soit B une partie de F tel que b est adhérent à B . Soit $h : B \rightarrow G$, où G est un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} c \in G$. Alors $h(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Propriété : On suppose que F est de dimension finie.

Soit a un point de E adhérent à A . Soit $b \in F$ et soit f une application de A dans F . Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F .

Pour $x \in A$, on note $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)u_k$ (les f_k sont appelées les fonctions coordonnées de f

dans B). Alors si $b = \sum_{k=1}^p b_k u_k$, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_k$

(La convergence de $f(x)$ vers b équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée).

Preuve : non faite ; avec la caractérisation séquentielle.

2) Continuité en un point.

Définition : soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Proposition : caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $a \in A$.

Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, on a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Remarque : pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en a , il suffit de trouver deux suites $(x_n), (y_n)$ qui tendent vers a et telles que $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont des limites différentes.

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Ainsi, $f : (x, y) \rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = a$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

3) Continuité sur une partie.

Définition : On dit que f est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout $a \in A$.

Définition : Une application $f : K^n \rightarrow K$ est une application polynomiale de n variables si et seulement si c'est une combinaison linéaire de fonctions du type $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.

Exemple : $f(x, y, z) = xy + x^3 y^2 z$.

Propriétés : Opérations sur les fonctions continues (avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

- Une somme et une composée de fonctions continues sont continues.
- Un produit de fonctions continues à valeurs dans K est une fonction continue.
- Un quotient de fonctions continues à valeurs dans K dont le dénominateur ne s'annule pas est continue.
- Si $h : A \rightarrow K$ et $f : A \rightarrow B$ sont continues sur A , alors hf est continue sur A .
- Les fonctions polynomiales sont continues sur K^n .
- Lorsque F est dimension finie, f est continue sur A si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F sont continues sur A .

Exemples :

• On définit $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Alors f est continue sur \mathbb{R} .

• $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow e^{xy}(3x^2 + y^2)$ est continue.

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g : y \mapsto f(x, y)$ est continue sur \mathbb{R} .

Proposition : soit $f : E \rightarrow F$, continue sur E . Alors :

- Si G est un fermé de F , alors $f^{-1}(G) = \{x \in E, f(x) \in G\}$ est un fermé de E .
- Si O est un ouvert de F , alors $f^{-1}(O) = \{x \in E, f(x) \in O\}$ est un ouvert de E .

Preuve : à faire avec les suites.

Proposition : soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur E . Alors :

- $O = \{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E
- $F = \{x \in E, f(x) = 0\}$ et $G = \{x \in E, f(x) \geq 0\}$ sont des fermés de E ,
- $E \setminus F = \{x \in E, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de E

Preuve : on prouve que \mathbb{R}_+ et $\{0\}$ sont des fermés de \mathbb{R} .

Exemples :

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 4\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y - 3z \leq 0\}$. F est un fermé de \mathbb{R}^2 .

/

Définition : Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

- f est k -lipschitzienne sur A si et seulement si $\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$.
- f est lipschitzienne sur A si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}_+$ f est k -lipschitzienne sur A .

Proposition : toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A .

Preuve : immédiat.

Exemple (*) : Soit $f : \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \|x\|_E \end{matrix}$. Alors f est continue sur E .

Preuve : avec $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$, f est 1-lipschitzienne sur E .

4) Continuité en dimension finie

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés **de dimension finie**. Soit A un sous-ensemble non vide de E . Soit $f : A \rightarrow F$.

Théorème des bornes atteintes (*) : On suppose que A est **fermé et borné**. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet donc un minimum et un maximum global sur A).

Exemple : si f est continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbb{R} , alors elle est bornée.

Proposition (*) : soit $f \in L(E, F)$. Alors f est lipschitzienne, donc continue sur E .

Preuve : On montre qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+, \forall u \in E, \|f(u)\|_F \leq C \|u\|_E$. Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Pour $u = u_1 e_1 + \dots + u_p e_p \in E$, on pose $\|u\|_E = \sum_{k=1}^n |u_k|$. Alors $\|f(u)\|_F \leq M \|u\|_E$, où $M = \max_{1 \leq k \leq n} \|f(e_k)\|_F$. Puis $\|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x - y\|_E$,

Exemples (*) : Soient $A, B, C \in M_n(K)$ et (A_n) une suite d'éléments de $M_n(K)$. On suppose que $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors :

- $Tr(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tr(A)$
- $A_n B \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$ et $P A_n P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P A P^{-1}$
- On suppose $B^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C$. Montrer que C est la matrice d'un projecteur et que $BC = CB$.
- On note $N(A) = \sup \{ \|AX\|, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1 \}$. Montrer que $N(A)$ existe et que c'est un maximum.

Définition : soit E_1, \dots, E_p, F des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$. Alors f est p -linéaire si et seulement si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire que $\forall x_1, \dots, x_p \in E_1 \times \dots \times E_p$, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x \rightarrow f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$ est linéaire.

Proposition : soit E_1, \dots, E_p, F des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$. Si f est p -linéaire, alors elle est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$.

Preuve : non faite.

Exemples (*) :

- Si E est euclidien, alors $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ est bilinéaire, donc continue.
- Soit $(A_p), (B_p)$ deux suites d'éléments de $M_n(K)$. On suppose que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ et $B_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} B$. Alors $A_p B_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} AB$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'application $f : \begin{matrix} M_n(K) \rightarrow M_n(K) \\ M \rightarrow M^p \end{matrix}$ est continue.
En effet, c'est la composée de $g(M) = (M, \dots, M)$ qui est linéaire et de $h(M_1, \dots, M_p) = M_1 \dots M_p$ qui est p linéaire.

Proposition (*) : $\det : M_n(K) \rightarrow K$ est continue sur $M_n(K)$.

Preuve : Soit B la base canonique de K^n . Alors $f : (C_1, \dots, C_n) \rightarrow \det_B(C_1, \dots, C_n)$ est n -linéaire donc continue sur $(K^n)^n$ et $g : M \rightarrow (C_1, \dots, C_n)$ est continue avec la convergence coefficient par coefficient. Donc $\det = \det_B \circ g$ est continue sur $M_n(K)$.

Exemple : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.