

## 13-Fonctions de plusieurs variables

### A) Fonctions vectorielles

Dans tout ce paragraphe,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non vide et non réduit à un point. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse à l'étude des fonctions de la forme  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

#### 1) Dérivation

**Définition :** soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soit  $t_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si son taux d'accroissement  $T(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  admet une limite finie quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Cette limite est alors notée  $f'(t_0)$ .

**Remarque :** la dérivabilité et la valeur de  $f'(t_0)$  ne dépendent pas du choix de la norme dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Propriété :** soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pour  $t \in I$ , on note  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ . Soit  $t_0 \in I$ . Alors  $f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_k$  est dérivable en  $t_0$  et on a alors  $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_n'(t))$  (on peut dériver coordonnée par coordonnée).

**Preuve :**

**Remarque :** en identifiant une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  avec un élément de  $\mathbb{R}^{n^2}$  (constitué de ses  $n^2$  coefficients), on peut étendre les résultats précédents aux applications à valeurs dans  $M_n(\mathbb{R})$ , et plus généralement dans n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie.

**Exemples :**

- On prend  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Calculer  $f'(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- On note  $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ . Montrer que  $R$  est dérivable et calculer  $R'$ .

**Propriété :** soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soit  $t_0 \in I$ . Soit  $D = \{h \in \mathbb{R}, t_0 + h \in I\}$ . Alors  $f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $t_0$ , c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\forall h \in D, f(t_0 + h) = f(t_0) + ha + h\varepsilon(h)$  et  $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

On a alors  $f'(t_0) = a$ .

On note aussi  $f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + o(h)$

**Preuve rapide :** on se ramène aux fonctions coordonnées.

**Exemple :** Soit  $f(t) = (e^t, \ln(1-t))$ . En donner un développement limité à l'ordre 1 en 0.

**Définition :** soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si elle est dérivable en tout point de  $I$ .  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  si et seulement si elle est dérivable sur  $I$  et que  $f'$  est continue sur  $I$ .

**Interprétation cinématique :** si on prend  $n = 2$  (ou  $n = 3$ ), et que le paramètre  $t$  désigne le temps,  $f(t) = (x(t), y(t))$  désigne la position d'un mobile ponctuel à l'instant  $t$ .  $f'(t)$  est alors le **vecteur vitesse** instantanée du mobile.

## 2) Opérations sur les fonctions dérivables.

**Propriété :** soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On suppose  $f$  et  $g$  dérivables sur  $I$ . Alors  $\alpha f + \beta g$  est dérivable sur  $I$  et  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

**Proposition :** soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , une application linéaire. On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$ . Alors  $L \circ f$  est dérivable sur  $I$  et pour  $t \in I$ ,  $(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$ .

**Preuve :** on regarde le taux d'accroissement et on utilise la continuité des applications linéaires.

**Exemples :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $M(t) = I_n + t^2 A$ ,  $g(t) = \text{tr}(I_n + t^2 A)$  et  $h(t) = PM(t)P^{-1}$ . Montrer que  $g$  et  $h$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et calculer leurs dérivées.

**Proposition :** soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\varphi : J \rightarrow I$ , où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$  et que  $\varphi$  est dérivable sur  $J$ . Alors  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $J$  et pour  $t \in J$ ,  $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

**Preuve rapide :** on écrit le taux d'accroissement et on raisonne coordonnée par coordonnée.

**Exemple :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(t) = A + tI_n$  et  $g(t) = f(\sin(t))$ . Déterminer  $g'(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

**Propriété :** soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soit  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , bilinéaire.

On pose alors pour  $t \in I$  :  $h(t) = B(f(t), g(t))$ . On suppose  $f, g$  dérivables sur  $I$ . Alors  $h$  est dérivable sur  $I$  et on a  $\forall t \in I, h'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$ .

**Preuve :** On sait que  $B$  est continue car elle est bilinéaire.

$$\text{Soit } T(t) = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{B(f(t), g(t)) - B(f(t), g(t_0))}{t - t_0} + \frac{B(f(t), g(t_0)) - B(f(t_0), g(t_0))}{t - t_0}.$$

**Exemple :** Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(t) = A(t)B(t)$  et  $g(t) = A^2(t)$ , avec, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t), B(t) \in M_n(\mathbb{R})$ . Justifier que  $f, g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(t)$  et  $g'(t)$ .

**Propriété :**  $\mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire usuel noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fonctions dérivables sur  $I$ . Soit  $B$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Alors l'application  $\langle f, g \rangle$  définie sur  $I$  par  $\langle f, g \rangle(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$  est dérivable sur  $I$  et  $\langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$ .

**Exemple :** On se place dans  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euclidien usuel. On considère  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction dérivable sur  $I$ , ne s'annulant pas sur  $I$ . Pour  $t \in I$ , on pose  $g(t) = \|f(t)\|$ . Montrer que  $g$  est dérivable sur  $I$  et calculer  $g'$ .

**Propriété :** soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . soient  $f_1, \dots, f_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des fonctions dérivables.

Soit  $M : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p$ -linéaire. Pour  $t \in I$ , on pose  $h(t) = M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ .

Alors  $h$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, h'(t) = M(f_1'(t), f_2(t), \dots, f_p(t)) + M(f_1(t), f_2'(t), \dots, f_p(t)) + \dots + M(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p'(t))$$

**Remarque :** on a ainsi une somme de  $p$  termes, et on dérive un à chaque fois en laissant les autres inchangés.

**Exemple :** Soit  $B$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des fonctions dérivables.

Pour  $t \in I$ , on pose  $h(t) = \det_B(f_1(t), \dots, f_n(t))$ . Alors  $h$  est dérivable sur  $I$  et on a :

$$h'(t) = \det_B(f_1'(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) + \det_B(f_1(t), f_2'(t), \dots, f_n(t)) + \dots + \det_B(f_1(t), \dots, f_n'(t))$$

**Définition :** soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  si et seulement si elle est  $k$  fois dérivable sur  $I$  et que  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$ .

Si on note  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  pour  $t \in I$ , on a  $f^{(k)}(t) = (f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), \dots, f_n^{(k)}(t))$ .

Elle est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  si et seulement si elle est de classe  $C^k$  sur  $I$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

## B) Dérivées partielles

Dans la suite, on pose  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

L'étude d'une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  se ramenant à celle de ses coordonnées, on s'intéresse ici aux fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}^p$  est muni d'une norme notée  $\| \cdot \|$  que l'on peut choisir.

Les résultats sur les espaces vectoriels normés s'appliquent donc.

On considère  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , une application.

### 1) Continuité des fonctions de plusieurs variables

**Rappels :**

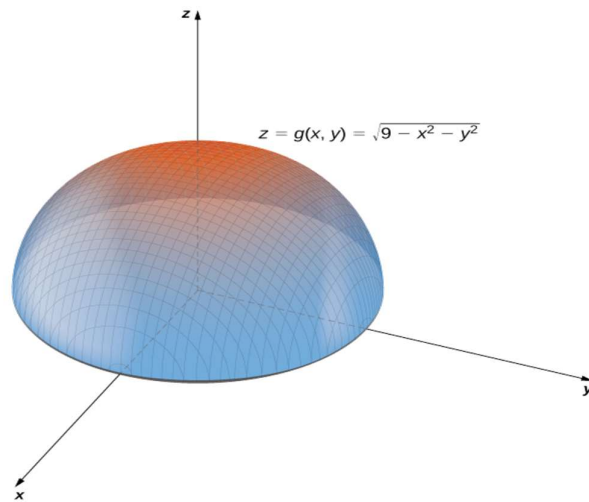
- Si  $a \in U$ ,  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$  (autrement dit, pour toute suite  $(U_n)$  d'éléments de  $U$  telle que  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on a  $f(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$ ).
- Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en  $a$ , il suffit de trouver deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  qui tendent vers  $a$  mais telles que  $(f(U_n))$  et  $(f(V_n))$  aient des limites différentes.

**Exemples :** Etudier la continuité des fonctions suivantes sur  $\mathbb{R}^2$  :

- $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .
- $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $g(0, 0) = 0$



**Remarque :** Soit  $S = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R}, z = f(x, y)\}$ .  $S$  est une surface qui représente graphiquement la fonction  $f$ .



## 2) Définition des dérivées partielles

**Définition :** Soit  $v \in \mathbb{R}^p$  et  $g$  définie au voisinage de 0 par  $g(t) = f(a + tv)$ . On dit que  $f$  admet une dérivée en  $a$  suivant le vecteur  $v$  si et seulement si  $g$  est dérivable en 0. On note alors  $D_v f(a) = g'(0)$ . C'est la dérivée de  $f$  en  $a$  suivant le vecteur  $v$ .

**Exemple :** on prend  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \rightarrow xy$ . Déterminer la dérivée de  $f$  suivant le vecteur  $v = (1, 1)$  en  $a = (2, 1)$ .

**Définition :** Soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ . La  $j$ -ème fonction partielle associée à  $f$  en  $a$  est la fonction  $f_j$  définie par  $f_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$ .

**Définition :** Soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ . On dit que  $f$  admet une dérivée partielle en  $a$  par rapport à sa  $j$ -ème variable si et seulement si la  $j$ -ème fonction partielle associée à  $f$  en  $a$ , définie lorsque  $(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p) \in U$  par  $f_j(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$ , est dérivable en  $a_j$ .

Lorsque cette dérivée existe, on la note  $\partial_j f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

**Remarque :** lorsqu'elle existe, la dérivée partielle de  $f$  en  $a$  par rapport à sa  $j$ -ème variable est la dérivée de  $f$  suivant le vecteur  $e_j$ , où  $B = (e_1, \dots, e_p)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

**Exemples :**

- Soit  $f(x, y, z) = x^2 + e^{yz} \sin(x)$ . Déterminer les dérivées partielles de  $f$  par rapport à chacune de ses variables.

- soit  $g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $g(0, 0) = 0$ . Montrer que  $g$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  et les calculer.

**Remarque (\*)** : essentiel pour bien comprendre les notations.

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$  se lit « dérivée partielle de  $f$  par rapport à sa  $j$ -ème variable ». Elle est moins claire que la notation  $\partial_j f$ .

Par exemple, on prend  $f(x, y) = x^3 - y^2$ . Quand on écrit  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , les deux  $x$  ne désignent pas la même chose : le premier exprime que l'on dérive par rapport à la première variable, et le second que l'on évalue cette fonction en  $(x, y)$ .

Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(3x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$ .

**Définition :** soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  si et seulement si les dérivées partielles de  $f$  existent et sont continues en tout point de  $U$ .

**Propriétés :** Soient  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $f, g$  sont  $C^1$  sur  $U$ . Alors pour  $a \in U$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ :

- $f + \lambda g$  est  $C^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ . Ainsi,  $C^1(U, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .
- $f g$  est  $C^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(f g)}{\partial x_j}(a) = g(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f(a) \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$
- Si  $g$  ne s'annule pas sur  $U$ , alors  $\frac{f}{g}$  est  $C^1$  sur  $U$ .
- Si  $f$  est à valeurs dans  $I \subset \mathbb{R}$  et que  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^1$  sur  $I$ , alors  $\varphi \circ f$  est  $C^1$  sur  $U$  et  $\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \varphi'(f(a))$
- Les fonctions polynomiales sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ .

**Exemple :** si  $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ , calculer  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ .

### 3) Développement limité d'ordre 1. Gradient et différentielle.

**Définition :** soit  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $0 \in U$ . On écrit  $g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|)$  ou plus simplement  $g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h)$  lorsqu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall h \in U, g(h) = \|h\| \varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \end{array} \right.$$

**Théorème (\*) (développement limité d'ordre 1 ; admis) :** soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ . Alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de tout élément  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ .

Plus précisément, pour  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que  $a + h \in U$ , on a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|).$$

**Explication :** si  $p = 1$ , on obtient  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + h f'(a) + o(h)$ .

On ajoute les contributions apportées par chacune des dérivées partielles.

**Exemple :** on pose  $f(x,y) = x \cos y + 2y$ . Donner un développement limité à l'ordre 1 en  $a = (1,0)$  de la fonction  $f$

**Corollaire :** toute fonction de classe  $C^1$  sur  $U$  est continue sur  $U$ .

**Définition :** soit  $a \in U$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ . On appelle différentielle de  $f$  en  $a$  et on note  $df(a)$  l'application définie de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$  par : si  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ ,

$$df(a)(h_1, h_2, \dots, h_p) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \text{ On note aussi } df(a).h = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

**Remarques :**

- Si  $a \in U$  est fixé, l'application  $df(a) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$   
 $h \rightarrow \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  est une forme linéaire.
- Si  $p = 1$ , on a  $df(a)(h) = h f'(a)$ .
- Le développement limité à l'ordre 1 de  $f$  s'écrit  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a).h + o(h)$ .

**Notation :** pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on considère  $g_j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x_1, \dots, x_p) \rightarrow x_j$ .

Alors si  $a \in \mathbb{R}^p$ ,  $dg_j(a).h = 1h_j$ . Cette quantité ne dépend pas de  $a$ . On note alors  $dg(a) = dx_j$

On a alors  $\forall h \in \mathbb{R}^p, dg_j(a).h = dx_j.h$

Avec cette notation, il vient  $\forall h \in \mathbb{R}^p, df(a).h = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k.h$ , donc  $df(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k$ .

Il s'agit formellement d'une égalité d'applications linéaires.

**Définition (\*) :** soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur

$U$ . On appelle gradient de  $f$  en  $a$ , et on note  $\nabla f(a)$  le vecteur  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$ .

**Propriété :** on munit  $\mathbb{R}^p$  de sa structure euclidienne usuelle. Alors pour tout  $a \in U$ , pour tout  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ , on a  $df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

Ainsi,  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|)$ .

**Exemple :** Calcul du gradient et de la différentielle en  $(0,0)$  et en  $(2,0)$  pour la fonction  $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ , définie sur  $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 9\}$

**Remarque :** on suppose  $\nabla f(a) \neq 0$ . Soit  $h \in \mathbb{R}^p$ , un vecteur unitaire. Soit  $g$  définie au voisinage de 0 par  $g(t) = f(a+tv)$ . Alors  $D_h f(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .

Ainsi, le vecteur gradient est colinéaire au vecteur unitaire  $h$  selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale, et de même sens.

#### 4) Règle de la chaîne.

**Proposition (\*, règle de la chaîne) :** soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $U$  et soient  $x_1, \dots, x_p$  des fonctions dérivables sur  $I$  telles que  $\forall t \in I, (x_1(t), \dots, x_p(t)) \in U$ . Soit  $g:I \rightarrow \mathbb{R}$ , avec pour  $t \in I$ ,  $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ . Alors  $g:I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur  $I$ , et on a  $\forall t \in I, g'(t) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_p(t))x_j'(t)$ .

**Remarque :** on dérive ainsi comme une composée en se rappelant qu'il faut ensuite ajouter les composantes suivant les différentes directions.

**Idée de preuve** pour  $p = 2$ . On fixe  $t \in I$  et on étudie  $g(t+k)$  pour  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $t+k \in I$ .

On pose  $a = (x_1(t), x_2(t))$ .

On note  $h = (x_1(t+k) - x_1(t), x_2(t+k) - x_2(t)) = (h_1, h_2)$ .

Alors  $g(t+k) - g(t) = f(a+h) - f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + o(\|h\|)$ .



**Exemples :**

- pour  $t \in \mathbb{R}$ , on considère  $g(t) = (\cos(t), \sin(t))$  et  $f$  une fonction quelconque de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Calculer la dérivée de  $h(t) = f(\cos t, \sin t)$ .
- pour  $t \in \mathbb{R}$ , on considère  $k(t) = f(t, 2t)$ , où  $f$  une fonction quelconque de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer la dérivée de  $k$  sur  $\mathbb{R}$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

**Corollaire :** on suppose ici que  $U$  est un ouvert **convexe** de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $U$ . Alors  $f$  est constante si et seulement si  $\forall a \in U, \nabla f(a) = 0$  (ou encore  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ ).

**Preuve :** on procède par double implication.

$\Leftarrow$  Soient  $a = (a_1, \dots, a_p), b = (b_1, \dots, b_p) \in U$  et  $g(t) = a + t(b - a) = tb + (1 - t)a \in U$  pour  $t \in [0, 1]$ . On pose  $h(t) = f \circ g(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_p + t(b_p - a_p))$ .

**Remarque :** le résultat n'est vrai que sur un ouvert convexe. On prend  $U = \mathbb{R}^*$ ,  $p = 1$  et

$$f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \text{ pour } t \in \mathbb{R}^* .$$

**Corollaire :** soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $U$  et soient  $x_1, \dots, x_p$  des fonctions  $C^1$  sur  $\Omega$ . On suppose que  $\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ ,

$(x_1(a), \dots, x_p(a)) \in U$ . Alors l'application  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow f(x_1(a_1, \dots, a_n), \dots, x_p(a_1, \dots, a_n))$  est

de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  et  $\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial g}{\partial a_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(a), \dots, x_p(a)) \frac{\partial x_j}{\partial a_i}(a)$

**Cas particulier (\*) :** soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $U$ . Soit  $\Omega$  un

ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On considère les fonctions  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(u, v) \rightarrow x(u, v)$  et  $(u, v) \rightarrow y(u, v)$  telles que

$\forall (u, v) \in \Omega, (x(u, v), y(u, v)) \in U$ . On suppose que  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

On définit sur  $\Omega$  la fonction  $g$  par  $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ .

Alors  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . De plus, :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

**Preuve rapide du cas particulier :** on étudie la fonction partielle

$h(u) = g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ . On calcule la dérivée de  $h$  à l'aide de la règle de la chaîne.

**Exemples (\*) :**

- Soit  $h(x, y) = f(x^2 + y^2, xy)$ , où  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles. Calculer les dérivées partielles de  $h$ .

- Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  (coordonnées polaires). Soient  $u_r = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $u_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .  
 Pour  $r, \theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .  
 Calculer  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$  et  $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ .  
 Montrer, lorsque  $r \neq 0$ , la relation  $\nabla f(x, y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)u_\theta$  (expression du gradient dans le repère polaire).

**Notations :** on considère  $T = g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(x, y)$ . Alors pour un physicien, la grandeur physique est plus importante que la fonction correspondante : on la note aussi bien  $T$  comme fonction de  $(u, v)$  que de  $(x, y)$ .

Si on prend par exemple  $x(u, v) = u + v$ ,  $y(u, v) = uv$  et  $f(x, y) = xy$ , on a pour  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $f(a, b) = ab$  et  $g(a, b) = (a + b)ab$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  ne sont pas identiques et les mathématiciens ne les notent pas pareil. En

physique, on peut écrire  $\frac{\partial T}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial T}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial T}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$ ,

ou encore  $\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$  (et de même  $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$ ).

## 5) Dérivées partielles d'ordre 2

**Définition :** soit  $p \in \llbracket 2, 3 \rrbracket$  et  $U \subset \mathbb{R}^p$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $1 \leq j, k \leq p$ . On suppose que  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

est définie sur  $U$ . Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  se notent  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$  ou

$\partial_{k,j}(f)$ . Ici, on dérive d'abord par rapport à  $x_j$  puis par rapport à  $x_k$ .

**Définition :** soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur  $U$ .

**Exemple :** calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  si  $f(x, y) = x^3 e^{x+2y}$

**Théorème (Schwarz-admis) :** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ . Alors

$$\forall a \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

**Définition (\*) :** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  sur  $U$ . Soit  $a \in U$ . La matrice Hessienne de  $f$  en  $a$ , notée  $H_f(a)$  est définie par  $\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (H_f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ .

Avec le théorème de Schwarz,  $H_f(a) \in S_p(\mathbb{R})$ .

**Exemples :**

1) On prend  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \rightarrow x^3 y^2$ . On pose  $a = (1, 1)$ . Déterminer  $\nabla_f(a)$  et  $H_f(a)$

2) On prend  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \rightarrow e^{-xy}$ . On pose  $a = (0, 0)$ . Déterminer  $\nabla_f(a)$  et  $H_f(a)$

**Théorème (\*) (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 ; admis) :** soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ . Alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage

de tout élément  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in U$ . Plus précisément, pour  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$  tel que  $a + h \in U$ , on a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

On rappelle que  $g(h) = o(\|h\|^2) \underset{h \rightarrow 0}$  signifie qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle

$$\text{que } \begin{cases} \forall h \in U, g(h) = \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \end{cases}$$

**Remarque :** ce développement limité à l'ordre 2 s'écrit aussi :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, H_f(a) h \rangle + o(\|h\|^2)$$

**Exemples :**

- 1) Ecrire cette formule dans les cas  $p = 1$  et  $p = 2$
- 2) On prend  $f(x, y) = x^3 y^2$ . Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en  $a = (1, 1)$
- 3) Même question pour  $f(x, y) = e^{xy}$  en  $a = (0, 0)$ .

4) **Résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP,HP).**

**Exemple :** soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Trouver les fonctions  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$



**Exemple : Equation de propagation des ondes à une dimension :** soit  $c > 0$  fixé. Trouver toutes les applications  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  telles que  $\forall x, t \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$  (on posera  $u = x + ct$  et  $v = x - ct$ ).

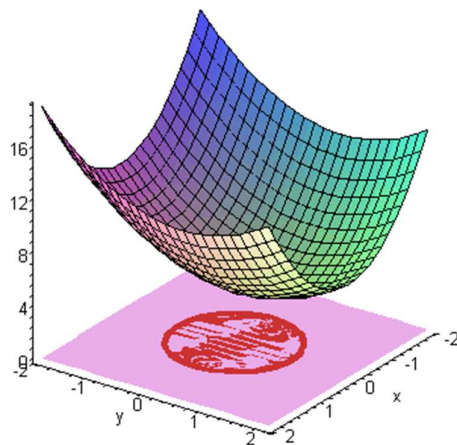
On prend  $f$  une fonction quelconque de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et on pose ici  $f(x, t) = g(u, v) = g(x + ct, x - ct)$ .

On a alors  $g(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$  et  $g$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## A) Extrema d'une fonction de plusieurs variables.

### 1) Extremum global

**Définition :** soit  $D$  une partie quelconque de  $\mathbb{R}^p$ , et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet un maximum global égal à  $f(a)$  (resp. un minimum global) en un point  $a \in D$  si et seulement si  $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$  (resp.  $\forall x \in D, f(x) \geq f(a)$ ).  $f$  admet un extremum global en  $a \in D$  si et seulement si elle admet un maximum ou un minimum global en  $a$ .



**Rappel : théorème des bornes atteintes (\*) :** soit  $D \subset \mathbb{R}^p$ . On suppose que  $D$  est **fermé et borné**. Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **continue**. Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes (elle admet donc un minimum et un maximum global sur  $D$ ).

**Remarque :** pour montrer qu'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  n'admet pas de maximum global sur  $D$ , il suffit de trouver une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $D$  telle que  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exemples :**

1) On considère  $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3xy + 1$ . Montrer qu'elle n'a pas d'extremum global sur  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'elle possède un maximum et un minimum global sur  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ . On ne demande pas de les calculer.

2) On peut utiliser le théorème des bornes atteintes même si  $f$  n'est pas définie sur une

partie fermée et bornée. Par exemple, on prend  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \rightarrow xy e^{-(x^2+y^2)}$ .

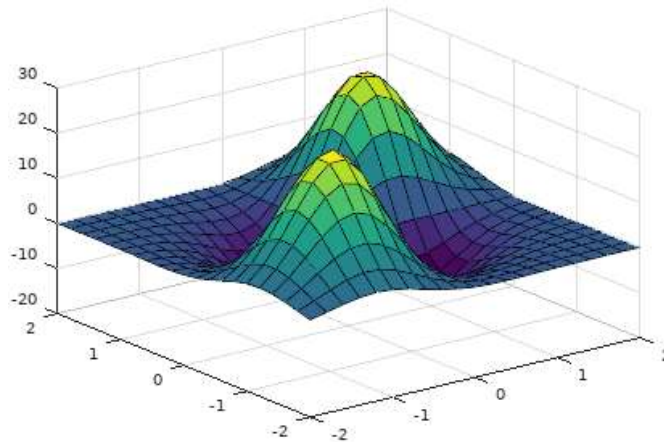
Montrer que  $f$  admet un maximum global sur  $\mathbb{R}^2$  (on pourra passer en polaires et considérer  $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ ).

### 3) Extremum local. Point critique.

**Définition :** soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^p$ , et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet un maximum local en un point  $a \in D$  si et seulement si  $\exists \alpha > 0, \forall x \in D \cap B(a, \alpha), f(x) \leq f(a)$ .

Ce maximum local est strict si et seulement si  $\exists \alpha > 0, \forall x \in D \cap B(a, \alpha) \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$ .

De même pour un minimum local.



**Définition (\*) :** Soit de nouveau  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $D$ . Soit  $a \in D$ .  $a$  est un **point critique** si et seulement si  $\nabla f(a) = 0$ .

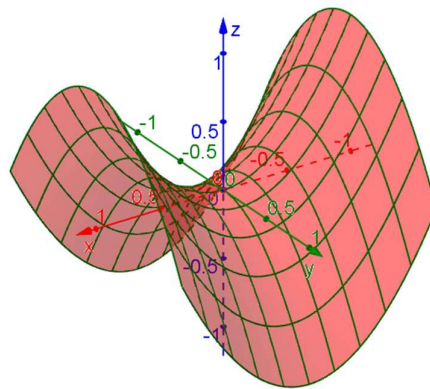
**Rappels :**

- On suppose que  $I$  est un intervalle **ouvert** de  $\mathbb{R}$  soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $I$ . Si  $f$  admet un extremum local en un point  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .
- Ce résultat devient faux si on ne suppose plus que  $I$  est un ouvert.

**Proposition (\*)** : soit  $U$  un **ouvert** de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et qu'elle admet un extremum local en  $a \in U$ . Alors  $a$  est un point critique (on a  $\nabla f(a) = 0$ , c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles s'annulent en  $a$ ).

**Preuve** : on traite le cas d'un minimum local. Les fonctions partielles aussi admettent des extrema. Donc leurs dérivées s'annulent.

**Remarque (\*)** : cette condition n'est pas suffisante. On peut avoir un point critique qui n'est pas un extremum local. C'est le cas d'un « point col » ou d'un « point selle ». On a alors un maximum local dans une direction et un minimum local dans une autre.



**Exemple :** on prend  $f(x, y) = x y$  en  $a = (0, 0)$ .

**Proposition (\*) :** soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et qu'elle admet un point critique en  $a \in U$  (c'est-à-dire que  $\nabla f(a) = 0$ ). Alors :

- 1) Si  $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire  $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$ ), alors  $f$  atteint un minimum local strict en  $a$ .
- 2) Si  $H_f(a) \notin S_n^+(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire  $Sp(H_f(a)) \not\subset \mathbb{R}_+$ , ou encore qu'il existe une valeur propre strictement négative de  $H_f(a)$ ), alors  $f$  n'admet pas de minimum local en  $a$ .

**Preuve :** avec le développement limité d'ordre 2.

**Corollaire :** soit  $U$  un **ouvert** de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et qu'elle admet un point critique en  $a \in U$  (c'est-à-dire que  $\nabla f(a) = 0$ ). Alors :

- 1) Si  $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$ , alors  $f$  atteint un maximum local strict en  $a$ .
- 2) Si  $Sp(H_f(a)) \not\subset \mathbb{R}_-$ , alors  $f$  n'admet pas de maximum local en  $a$ .

**Preuve :** non faite. C'est pareil que celle du résultat précédent.

**Remarque (\*) :**

- Lorsque  $H_f(a)$  possède une valeur propre strictement négative et une autre strictement positive, il n'y a pas d'extremum local en  $a$ .
- Si toutes les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont strictement positives, il y a un minimum local strict en  $a$ .
- Si toutes les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont strictement négatives, il y a un maximum local strict en  $a$ .
- Lorsque  $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+$  (ou que  $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-$ ), et que 0 est valeur propre de  $H_f(a)$ , on ne peut pas conclure et il se peut qu'il y ait un extremum local ou pas. Il faut alors étudier directement la fonction au voisinage du point critique.

**Proposition (\*) :** cas particulier en dimension 2. Soit  $U$  un **ouvert** de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et qu'elle admet un point critique en  $a \in U$  (c'est-à-dire que  $\nabla f(a) = 0$ ). Alors :

- Si  $\det(H_f(a)) < 0$ ,  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $a$ .
- Si  $\det(H_f(a)) > 0$  et  $Tr(H_f(a)) > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .
- Si  $\det(H_f(a)) > 0$  et  $Tr(H_f(a)) < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .

**Preuve :**

**Méthode (\*) :** pour chercher les **extrema locaux ou/et globaux** de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $D$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$  (ceci se généralise à  $\mathbb{R}^p$  pour  $p \geq 2$ ), on peut commencer par **dessiner**  $D$ . On note  $Fr(D)$  la frontière (le bord) de  $D$  s'il existe ( $Fr(D)$  est vide si  $D$  est ouvert). On pose  $U = D \setminus Fr(D)$  qui est un ouvert.

- 1) On cherche les points critiques  $a \in U$ . Ce sont les seuls extrema possibles pour  $f$  dans  $U$ . Si on veut savoir si  $f$  possède un extremum local en  $a$ , on peut utiliser  $H_f(a)$ .
- 2) On peut montrer l'existence d'extrema globaux avec le théorème des bornes atteintes (si  $D$  est un fermé borné, ou qu'on se place sur un sous-ensemble de  $D$ ).
- 3) S'il y a lieu, on cherche le maximum et le minimum de  $f$  sur  $Fr(D)$ . On peut comparer avec les valeurs aux points critiques pour déterminer les extrema globaux de  $f$  sur  $D$ .

**Exemples :**

- 1) Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$ . Etudier le nature des extrema locaux de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Trouver les extrema globaux de la fonction définie par :  $f(x, y) = x^2 - x + 2y^2$  sur  $D = \overline{D}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- 3) Trouver les extrema globaux de  $(x, y) \mapsto g(x, y) = x^2 + y^2 - 3(x + y) + xy + 1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et sur  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x + y \leq 1\}$ .