CCP 2020 corrigé

Exercice 1

Q1) Soit $x>0$. $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ car $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc comme $t \mapsto 1$ est intégrable en 0, $t \mapsto f(x,t)$ l'est aussi.
- $|t^2 f(x,t)| = \left|\frac{\sin t}{t} t^2 e^{-xt}\right| \leq t e^{-xt}$ donc $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto f(x,t)$ aussi

$$\underline{t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$$

Q2) On pose $\begin{cases} a(t) = \frac{1}{t} \ ; & a'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ b'(t) = \sin t \ ; & b(t) = 1-\cos t \end{cases}$. a, b sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $|a(t)b(t)| \leq \frac{2}{t}$ donc $\underline{a(t)b(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

De plus, $1-\cos t \underset{t\to 0}{=} \frac{t^2}{2} + o(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}t^2$ donc $a(t)b(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}t$

et $\underline{a(t)\,b(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0}$.

Par intégration par parties, $\underline{\underline{I \text{ et } \int_0^{+\infty}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)dt \text{ ont même nature}}}$

Dès lors, si on pose $\underline{g(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}}$, g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2}$ et $t \mapsto \frac{1}{2}$ est intégrable en 0^+, donc

g aussi.

Par ailleurs, $|g(t)| \leq \frac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc g aussi. Donc $\underline{\underline{g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } I \text{ converge}}}$

Q3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $c(t) = u(x,t)$. Alors $c'(t) = -\frac{1}{1+x^2} e^{-xt}[x\cos t - \sin t - x^2 \sin t - x\cos t]$ et $c'(t) = \frac{-1}{1+x^2}\left(-(1+x^2)e^{-xt}\sin t\right) = \sin(t)e^{-xt}$.

Donc $\underline{t \mapsto u(x,t) \text{ est une primitive de } t \mapsto \sin t\, e^{-xt} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

Q4) Soit $x>0$. Soit $t \in]0,+\infty[$.

Alors $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq \frac{|t|}{|t|} = 1$ donc $|f(x,t)| \leq e^{-xt}$.

Donc $|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} e^{-tx} dt$ (car $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$).

Donc $\underline{\underline{|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}}}$.

Par encadrement, $\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

Q5) Soit $a>0$. Pour $(t,x) \in]0,+\infty[^2$, on a $\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (-\sin t)e^{-xt}}$

- pour $x \in]0,+\infty[$, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (Q1)
- pour $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur $[a,+\infty[$.

• Pour $x, t \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at} = \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*$$

(• pour $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$).

Donc par théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \geq a$, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-xt} dt$

Q6) Si $x \in]0, +\infty[$, on pose $a = \frac{x}{2} > 0$.

Comme F est dérivable sur $[a, +\infty[$, elle est dérivable en $x \in [a, +\infty[$.

Donc F est dérivable en tout x de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$

D'après Q), on peut calculer $F'(x)$. Si $A > 0$,

$$-\int_0^A \sin t \, e^{-xt} dt = [-u(x,t)]_0^A = \frac{-1}{1+x^2} - u(x, A).$$

$$|u(x,A)| = \frac{1}{1+x^2} |+x \sin A + \cos A| e^{-xA} \leq \frac{1}{1+x^2} e^{-xA}.$$

Donc $u(x,A) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F'(x) = \lim_{A \to +\infty} -\int_0^A \sin t \, e^{-xt} dt = \frac{-1}{1+x^2}$.

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $F(x) = -\mathrm{Arctan}\, x + C$.

Or $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ avec Q4, donc $C = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\boxed{\forall x > 0, \ F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x}$

Q7) On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- (si $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,1]$)
- pour $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$
- pour $x \in [0,1]$ et $t \in]0,1]$, $|f(x,t)| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1]$. Donc F_1 est bien continue sur $[0,1]$

Q8) Soit $x \in [0,1]$ et $h(x,t) = \frac{u(x,t)}{t^2}$ pour $t \geqslant 1$.

- $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$.
- $|h(x,t)| \leq \frac{e^{-xt}}{t^2}\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}\right)$ et $h(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc

$t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2} = h(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

Pour $x \in [0,1]$, $F_2(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right) \times \left(\sin t\, e^{-xt}\right) dt$.

On intègre par parties : $\begin{cases} a(t) = \frac{1}{t}\ ;\ a'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ b'(t) = \sin t\, e^{-xt}\ ;\ b(t) = u(x,t). \end{cases}$

$|a(t)\,b(t)| \leq \frac{1}{t} e^{-xt}$ donc $a(t)\,b(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $a(1)b(1) = u(1,t)$.

Donc $F_2(x) = \frac{x \sin 1 + \cos 1}{1+x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} dt$

Q9) Si $k_1(x) = \frac{x \sin 1 + \cos 1}{1+x^2} e^{-x}$ et $k_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} dt$,

k_1 est continue sur $[0,1]$. Montrons que k_2 l'est aussi.

- Pour $t \geq 1$, $x \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$
- Pour $x \in [0,1]$, $\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leq \frac{e^{-xt}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable

sur $[1,+\infty[$ donc on a la domination.

Par théorème de continuité des intégrale à paramètre, on conclut :

k_2 et donc F sont continue sur $[0,1]$

Q10) Avec Chasles, on constate que $F = F_1 + F_2$.

Donc par somme, F est continue sur $[0,1]$ et $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$.

On a vu en Q6) que $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$.

Donc $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2}$.

Par unicité de la limite, $\boxed{F(0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 :

Q11) On constate que f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

De plus, $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ est un fermé borné (c'est la boule unité).

Donc par théorème des bornes atteintes,

f admet un maximum et un minimum sur B_2

Q12). $S=\{(\cos t, \sin t),\ t\in[0,2\pi]\}$.

Pour $t\in[0,2\pi]$, $g(t)=f(\cos t,\sin t)=1+4\cos t\sin t$

donc $g(t)=1+2\sin(2t)$.

Donc le minimum de f sur S_2 vaut -1 (atteint pour $t=\frac{3\pi}{4}$) et son maximum vaut 3 (atteint en $t=\frac{\pi}{4}$)

Q13) f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions polynomiales de plusieurs variables qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

On résout $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+4x_2=0\\ 2x_2+4x_1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-2x_2\\ x_2=0\end{cases}$

Donc $A(0,0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$.

Q14) On sait que f admet un maximum et un minimum sur $B2$ avec Q11.

Ils sont atteints sur S_2 ou sur B_2'. S'ils sont atteints sur l'ouvert B_2' en $A(x_1,x_2)$, alors A est un point critique donc $A=(0,0)$.

Or $f(0,0)=0$ et le maximum de f sur S_2 est 3 et son minimum est -1 avec Q12), avec $-1<0<3$.

Le maximum de f sur B_2 est 3, son minimum est -1

Ici $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $f(x_1, x_2) = 1 \times x_1^2 + 1 x_1^2 + 4 x_1 x_2$
et $a_{12} = 4$, donc $m_{12} = 2$)

$$\chi_{M_f} = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 4 = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3).$$

Les valeurs propres de M_f sont 1 et -3 (la plus petite est donc bien égale au minimum de f sur B_2 ; la plus grande à son maximum)

Q16) On calcule $X^T M_f X$.

$(M_f X) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $\quad (M_f X)_i = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{ij} x_j$

$X^T (M_f X) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$. $\quad X^T (M_f X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (M_f)_{ij} x_i x_j$

Donc $X^T M_f X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j$

donc $X^T M_f X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j$

Mais $a_{ij} = a_{ji}$ donc $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_{ji}}{2} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{2} x_i x_j$ (en échangeant le nom des indices)

Donc $\boxed{X^T M_f X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i x_j = f(x)}$

Q17) M_f est symétrique donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

Q18) $Y^T Y = (P^{-1}X)^T (P^{-1}X) = X^T (P^{-1})^T P^{-1} X$

Or $(P^{-1})^T = (P^T)^T = P$ (car P est orthogonale, donc $P^T = P$)

Donc $Y^T Y = X^T X = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|^2$.

$$\boxed{\text{On a bien } Y^T Y = X^T X = \|x\|^2}$$

Q19) On calcule $Y^T D Y = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2$ en utilisant Q16)

pour la matrice D.

Donc $\quad Y^T D Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_n \|y\|^2$

Or $\|y\|^2 = Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$ (avec Q18).

Or $x \in B_n$ donc $\|x\| \leq 1$ et $\|y\|^2 \leq 1$, donc $Y^T D Y \leq \lambda_n$. (car $\lambda_n > 0$)

De même, $Y^T D Y \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_1 \|y\|^2 = \lambda_1$ (car $\lambda_1 < 0$, donc $\lambda_1 \|y\|^2 \geq \lambda_1 \times 1$)

Donc $\boxed{\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n}$

Or $f(x) = X^T M_f X = X^T P D P^{-1} X = X^T P D Y$.

De plus, $Y^T = X^T (P^{-1})^T = X^T P$ donc $\underline{\underline{f(x) = Y^T D Y}}$ (1)

Donc $\underline{\underline{\text{on a bien } \lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n}}$

Q20) On suppose $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. On pose $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $PY = X_0$.

Alors avec (1), $f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 = \lambda_n$

De plus, $X_0^T X_0 = Y^T Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|y\|^2 = \|x_0\|^2 = 1$

donc $\begin{cases} x_0 \in B_n \text{ et } f(x_0) = \lambda_n \\ \forall x \in B_n, \ f(x) \leq \lambda_n \end{cases}$: $\boxed{\max_{B_n}(f) = \lambda_n}$

De même, avec $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, il vient $f(x_1) = \lambda_1$ pour $X_1 = PY_1$

et $x_1 \in B_n$, donc $\boxed{\min_{B_n}(f) = \lambda_1}$

Q21) Soit $\lambda_1 \geq 0$.

$\rightarrow$ si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, $\min_{B_n}(f) = \max_{B_n}(f) = 0$ car $D = M_f = 0$.

$\rightarrow$ sinon $\lambda_n > 0$ et de même, $\boxed{\max_{B_n}(f) = \lambda_n}$

$\rightarrow$ On a $f(x) = Y^T D Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq 0$ (puisque $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$).

Or $f(0_E) = 0$ donc $\boxed{\min_{B_n}(f) = 0}$

Q22) On a ici $M_f = \begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$ et $M_f - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$

donc $rg(M_f - 2I_n) = 1$ et $\dim(\ker(M_f - 2I_n)) = n-1$.

2 est valeur propre de M_f, de multiplicité $(n-1)$.

De plus, $Tr(M_f) = \sum_{\lambda \in Sp(M_f)} \lambda = 2(n-1) + \lambda = n$ donc $\lambda = 2-n < 0$.

donc $\lambda_1 = 2-n < 0$ et $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 2 > 0$.

Donc $\boxed{\max_{B_n}(f) = \lambda_n = 2 \text{ et } \min_{B_n}(f) = 2-n}$

Exercice 3 :

Q23) A l'étape $n=0$, le pion se trouve en 0.

$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ représente donc la position du pion après } n \text{ déplacements}}$

Q24) On a $\boxed{\begin{array}{l} p_0 = P(S_0 = 0) = 1 \\ p_1 = P(X_1 = 0) = 0 \end{array}}$

$p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 1, X_2 = -1) + P(X_1 = -1, X_2 = 1)$

donc $\boxed{p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$

Q25) Soit n impair, $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$.

Alors $S_n = \sum_{k=1}^{2n+1} X_k = \sum_{k=1}^{2n} X_k + X_{2n+1}$

Or $\sum_{k=1}^{2n} X_k$ est un nombre pair (on ajoute $(2n)$ nombres égaux à 1 ou -1), donc S_n est un nombre impair et $\boxed{P(S_n = 0) = 0 = p_n}$

Q26) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$.

$P(Y_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{Y_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$

Q27) Soit $n > 0$. $\boxed{Z_n = Y_1 + \dots + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$ car on somme n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

De plus, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2Y_k - 1)$

Donc $\boxed{S_n = 2Z_n - n}$

Q28) Soit $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

$p_{2m} = P(S_{2m} = 0) = P(Z_{2m} = m) = \binom{2m}{m} \times \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-m}$

(on connait la loi de $Z_{2m} \sim \mathcal{B}(2m, \frac{1}{2})$).

Donc on a bien $\boxed{p_{2m} = \binom{2m}{m} \times \frac{1}{4^m}}$.

Q29) $(p_n 1^n) = (p_n)$ est bornée ($\forall n \in \mathbb{N}, p_n \leq 1$), donc

comme $R_p = \inf(\{r, (p_n r^n) \text{ est bornée}\})$, $\boxed{R_p \geq 1}$

Q30) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On calcule $\prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{2k-1}{2}\right) \times (-1)^m$

donc $\prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{(-1)^m}{2^m} \times \frac{(2m)(2m-1) \times \dots \times 1}{(2m)(2m-2) \times \dots \times 2}$

donc $\prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{(-1)^m}{2^m} \times \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

Donc $\boxed{\frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \binom{2m}{m} \times \frac{1}{4^m} = p_{2m}}$

Q31) Soit $x \in]-1,1[$.

Alors $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} p_n x^n = \sum_{m \geq 0}^{+\infty} p_{2m} x^{2m} = \sum_{m \geq 0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^m}{m!} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-m+1\right)\right]$

Or $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} u^n$

Donc $\boxed{\text{on prend } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ et } f(x) = (1-x^2)^\alpha \quad (\forall x \in]-1,1[)}$

Q32) $\boxed{q_1 = P(T=1) = 0}$ (car si $T=1$, $S_1 = 0$, ce qui est exclu car $p_1 = 0$).

$q_2 = P(T=2) = P(S_1 \neq 0 \text{ et } S_2 = 0) = P(S_2 = 0) = p_2 = \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{q_2 = \frac{1}{2}}$

Q33) $\|g_n\|_{\infty, [-1,1]} = q_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Or $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T=n)\right) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} q_n \leq 1$ (c'est une union disjointe)

Donc $\sum \|g_n\|_{\infty, [-1,1]}$ converge et

$\boxed{\sum g_n \text{ converge normalement sur } [-1,1]}$

Si par l'absurde $R_q < 1$, alors $\sum q_n 1^n$ diverge. Ce n'est pas le cas donc $\boxed{R_q \geq 1}$

Q34) Soit $x \in]-1,1[$. Alors $|x| < \min(R_p, R_q)$.

Alors on peut effectuer un produit de Cauchy et

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n$$

donc comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \sum_{k\geq 0}^{n} p_k q_{n-k}$, il vient, avec $q_0 = 0$:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n + \left(\sum_{k\geq 0}^{0} p_k q_{0-k}\right) = f(x) - p_0 = f(x) - 1$$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x)\,g(x) = f(x) - 1}$

Q35). Pour $x \in]-1,1[$, il vient $g(x) = \dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

En effet, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ avec Q31 et on peut diviser.

Donc $g(x) = 1 - (1-x^2)^{1/2} = 1 - \sqrt{1-x^2}$

Pour $|u| < 1$, $(1+u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} u^n$

donc $(1+u)^{1/2} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1}{n!}(-1)^{n-1}(1\times 3\times\cdots\times(2n-3))\,u^n$

donc $(1+u)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \times \dfrac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\, u^n$

Donc $\boxed{g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n-2)!\times 2}{4^n n!(n-1)!}\, x^{2n}}$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^{2n}$ est noté R_g, avec $b_n = \frac{(2n-2)! \times 2}{4^n n!(n-1)!}$.

Pour $x>0$, on pose $U_n = b_n x^{2n}$.

$$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{(2n)(2n-1)}{4(n+1)n} \times x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{1}.$$

Donc si $x^2<1$, $\sum b_n x^{2n}$ converge et si $x^2>1$, $\sum b_n x^{2n}$ diverge avec d'Alembert pour les séries numériques.

Donc $\boxed{R_g = R\left(\sum b_n x^{2n}\right) = 1}$

Q36) On a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!\,2}{4^n(n!)(n-1)!} x^{2n}$ $(\forall x \in]-1,1[)$

<u>Par unicité du développement en série entière</u>, il vient :

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\begin{array}{l} a_{2n} = \frac{(2n-2)!\,2}{4^n n!(n-1)!} \quad (\text{et } a_0 = 0) \\ a_n = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair} \end{array}}$

Pour $n=1$: $a_2 = \frac{1\times2}{4\times1} = \frac{1}{2}$. C'est cohérent.

Q37) Comme $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et que chaque fonction g_n est continue sur $[-1,1]$, on peut dire que $g = \sum_{n\geq0}^{+\infty} g_n$ <u>est continue sur $[-1,1]$</u>

8

Dès lors, $\begin{cases} g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \xrightarrow[x\to 1]{} 1 \\ g(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} g(1) \end{cases}$

Par unicité de la limite, $g(1) = 1 = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} q_n$.

Donc $\boxed{P(T=+\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n) = 0}$

Il est donc presque sûr que le pion effectue un retour à l'origine

Q38) Pour $x \in]-1,1[$, $g(x) = G_T(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} P(T=n)x^n$.

On sait que T est d'espérance finie si et seulement si G_T est dérivable en 1.

On $\frac{g(1-h) - g(1)}{h} = \frac{-\sqrt{1-(1-h)^2}}{h} \underset{h\to 0^+}{\sim} -\frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -\infty$

Donc g et G_T ne sont pas dérivables en 1.

$\boxed{\text{T n'est pas d'espérance finie}}$