Centrale PC 2 2023 : corrigé

Q1) $R\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(\forall x \in]-1,1[)$

Q2) On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

On sait que $R\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geq 0} n a_n z^n\right)$ si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Donc $R\left(\sum_{n\geq 0} n x^n\right) = 1$. On peut de plus dériver terme à terme sur $]-1,1[$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1,1[$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (\forall x \in]-1,1[)}$

Q3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq k$, on calcule $\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!}$

Donc $\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+1-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on a bien $\binom{n}{k} \neq 0$ pour $n \geq k$

donc avec d'Alembert, $R\left(\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} x^n\right) = 1$

De plus, on part de la relation $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et on dérive k fois cette égalité.

D'une part, $f(x) = (1-x)^{-1}$, donc $f'(x) = (1-x)^{-2}$, puis

$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$ et $f^{(3)}(x) = 2\times 3\,(1-x)^{-4}$ donc par récurrence, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ $(\forall x \in]-1,1[)$

D'autre part, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, donc $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$

donc $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

Donc $x^k f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = k! \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n\right)$ puisque $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

On a donc bien $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

Q4) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-1,1[$.

On pose $U_n(x) = n^k x^n$. On prend $x \neq 0$

Alors $|n^2 U_n(x)| = n^{k+2} |x|^n = n^{k+2} e^{n \ln(|x|)}$ avec $\ln|x| < 0$

donc $n^2 |U_n(x)| = \dfrac{n^{k+2}}{\exp(-n \ln|x|)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $n^2 U_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $U_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} > 0$.

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum U_n(x)$ converge et $f_k(x)$ est défini.

Si $x = 0$, $U_n(x) = 0$ $\forall n \geq 1$ et $\sum U_n(x)$ converge.

De plus, si $x \notin]-1,1[$, $|U_n(x)| = n^k \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ diverge grossièrement.

donc $f_k(x)$ n'est pas défini si $|x| \geq 1$.

Donc $\boxed{D_{f_k} =]-1,1[}$

Q5) Soit $k \in \mathbb{N}$. $(H_0, -, H_k)$ forment une famille libre de $(k+1)$ vecteurs (car ce sont des polynômes de degré échelonné) dans un espace de dimension $(k+1)$. En effet, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\deg(H_j) = j$

Donc $B = (H_0, \ldots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$

Dans cette base, on a existence et unicité des coordonnées de tout vecteur, donc en particulier de $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$.

Donc $\exists! (\alpha_{k,0}, \ldots \alpha_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$, $X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j$)

Q6) : Soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \frac{1}{j!} X(X-1) \ldots (X-j+1)$ donc $H_j(0) = 0$

et en prenant la valeur en 0 : $0^k = \alpha_{k,0}$

Donc $\boxed{\begin{cases} \alpha_{k,0} = 0 & \forall k \geq 1 \\ \alpha_{0,0} = 1 \end{cases}}$

On a $X^k = \alpha_{k,0} H_0 + \alpha_{k,1} H_1 + \ldots + \alpha_{k,k} H_k$.

On regarde le terme de plus haut degré : il apparaît seulement dans H_k et vaut $\boxed{1 = \alpha_{k,k}}$

Soient $j, k \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq j \leq k$.

On a $X^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i$. <u>On évalue en $X = j$</u> :

$$j^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j). \quad \text{Or pour } i > j,\ H_i(j) = 0$$

$$\text{donc } j^k = \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} H_i(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} H_i(j) + \alpha_{k,j} H_j(j).$$

$$\text{Or si } i \leq j,\ H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (j-k) = \frac{1}{i!} \left(j(j-1) \cdots (j-i+1) \right) = \frac{1}{i!} \frac{j!}{(j-i)!}$$

$$\underline{\text{donc } H_i(j) = \binom{j}{i} \text{ et } H_j(j) = 1.}$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}}} \text{ et } \alpha_{k,j+1} = (j+1)^k - \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} \alpha_{k,i}$$

Q8)

```
def alpha(k,j):
    if k==0:
        return 1
    else:
        L=[0]
        for l in range(j):
            L.append((l+1)**k - sum([binome(l+1,i)*
            A[i] for i in range(l+1)]))
        return A[j]
```

Q9) Pour $x \in]-1,1[$, il vient :

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \right) x^n$$

Or pour $j, n \in \mathbb{N}$, $H_j(n) = \binom{n}{j}$ (cette quantité est nulle si $j > n$ et si $j \leq n$, $H_j(n) = \frac{1}{j!} n(n-1)\cdots(n-j+1) = \frac{n!}{j!(n-j)!}$)

De plus, comme $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} \binom{n}{j} x^n$ converge avec Q3

On a donc $f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n \right)$ (c'est une somme finie de séries convergentes). Donc avec Q3),

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} x^j (1-x)^{k-j} \right)$$

Ceci donne l'existence et l'expression de P_k.

Montrons l'unicité : soit Q_k un autre polynôme convenant.

Alors $\forall x \in]-1, 1[$, $P_k(x) = (1-x)^{k+1} f_k(x) = Q_k(x)$

Donc P_k et Q_k coïncident sur un ensemble infini et $P_k = Q_k$

On a bien l'unicité.

Q10) On a $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} x^j \left(\sum_{l=0}^{k-j} \binom{k-j}{l} (-1)^l x^l \right)$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k-j} \alpha_{kj} \binom{k-j}{l} (-1)^l x^{l+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=j}^{k} \alpha_{kj} \binom{k-j}{l-j} (-1)^{l-j} x^l \qquad \begin{cases} 0 \leq j \leq k \\ j \leq l \leq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq l \leq k \\ 0 \leq j \leq l \end{cases}$$

$$P_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \left[\sum_{j=0}^{l} \alpha_{kj} \binom{k-j}{l-j} (-1)^{l-j} \right] x^l$$

```
def P(k):
    L = []
    for l in range(k+1):
        L.append(sum([alpha(k,j)*binome(k-j,l-j)*(-1)**(l-j)
        for j in range(l+1)]))
    return(L)
```

Q11) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-1,1[$.

Alors $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$. On peut dériver terme à terme sur $]-1,1[$

et $f_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1}$ et $\underline{\underline{x f_k'(x) = f_{k+1}(x)}} = \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}}$

Par ailleurs, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$, donc $f_k'(x) = \frac{P_k'(x)}{(1-x)^{k+1}} + \frac{(k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$

donc $x f_k'(x) = \frac{x P_k'(x)(1-x) + (k+1) x P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$

On a donc $\forall x \in]-1,1[$, $P_{k+1}(x) = x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x)$

Ces deux polynômes coïncident sur un ensemble infini et on

conclut : $\underline{\underline{P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k}}$

Q12) Avec Q1), $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $\underline{P_0 = 1}$

Avec Q2), $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc $\underline{P_1 = X}$

Dès lors, $P_2 = X(1-X) + 2X^2 = X^2+X$ donc $\boxed{P_2 = X^2+X}$

Par ailleurs, avec Q11) : $P_3 = X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X)$

Donc $P_3 = X\left[3X^2+3X-2X^2+X+1\right] = X^3+4X^2+X$

donc $\boxed{P_3 = X^3+4X^2+X}$

Q13) Pour $k\in\mathbb{N}$, on note $cd(P_k)$ le coefficient dominant de P_k.

On montre par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$: " $\deg(P_k)=k$ et $cd(P_k)=1$ ", que l'on note $H(k)$

- $H(0), H(1), H(2), H(3)$ sont vraies.
- Soit $k\in\mathbb{N}$, $H(k)$ vraie. Montrons $H(k+1)$.

$P_k = X^k+S$, $\deg S<k$ donc $P_k' = kX^{k-1}+S'$

et $P_{k+1} = X^{k+1}(k+1-k)+T$, $\deg T<k+1$.

donc $H(k+1)$ est vraie.

Donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \deg(P_k)=k \text{ et } cd(P_k)=k}$

Q14) Par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$, on prouve $P(k)$: " $\forall x\in\,]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$ ".

→ pour $k=1$: $x^2 P_1\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\times\frac{1}{x} = x$ car $P_1 = X$.

On a bien $P(1)$ vraie

→ soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ vraie. Montrons $P(k+1)$.

Soit $x\in\,]0,1[$: $P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{k+1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)$

Or $P_k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{k+1}} \times P_k(x)$ et $P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{P_k'(x)}{x^{k+1}} - (k+1)\frac{P_k(x)}{x^{k+2}}$

donc $P_k'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k+1}{x^k} P_k(x) - \frac{P_k'(x)}{x^{k-1}}$ et $P_k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P_k(x)}{x^{k+1}}$

Donc
$$P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x^2} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{k+1}{x^{k+2}} P_k(x)$$
$$= \frac{(k+1)}{x^{k+2}}(x-1+1)P_k(x) + \frac{(1-x)P_k'(x)}{x^{k+1}}$$
$$= \frac{1}{x^{k+2}}\left[x(1-x)P_k'(x) + (k+1)x P_k(x)\right] = \frac{P_{k+1}(x)}{x^{k+2}}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie

Ona bien $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,1[, \ x^{k+1} P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$

Q15) $P_k = \sum_{j=0}^{k} b_{kj} X^j$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x \in]0,1[$, $x^{k+1} P_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{j=0}^{k} b_{kj}\, x^{k+1-j} = \sum_{j=0}^{k} b_{kj}\, x^j$

avec la relation obtenue en Q14).

Or avec Q11), pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1}(0) = 0$ donc $b_{k0} = 0$.

Donc $\sum_{j=0}^{k} b_{kj}\, x^{k+1-j} = \sum_{j=1}^{k} b_{kj}\, x^{k+1-j} = \sum_{j=1}^{k} b_{k,k+1-j}\, x^j = \sum_{j=1}^{k} b_{kj}\, x^j$

Donc ces deux polynômes coïncidant sur un ensemble infini,

On conclut qu'ils sont égaux et $\boxed{\begin{cases} \forall j \in [\![1,k]\!],\ b_j = b_{k+1-j} \\ b_0 = 0\ (= b_{k+1}) \end{cases}}$

Q16) · Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n} \neq 0$. (5

On utilise la règle de d'Alembert pour les séries entières :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4 \text{ donc } \boxed{R = \frac{1}{4}}$$

Pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1+(-4x))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4x)^n$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{4^n}{2^n n!}(1\times 3\times\cdots\times 2n-1)x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{4^n}{2^n n!}\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)x^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

On a bien $\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n}}$

Q17) Soit $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$

On peut intégrer terme à terme la relation précédente sur l'intervalle ouvert de convergence : si $x>0$; $[0, x] \subset]-R, R[$ (et $[x, 0] \subset]-R, R[$ si $x<0$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{(-4)}{(-4)} \text{. donc } \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-4t}}\,dt = \frac{2\sqrt{1-4x}}{(-4)} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4x}\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Comme $x \neq 0$, on peut ensuite diviser par x et :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$$

Q18) Soit $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$.

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right) = \left(\sqrt{1-4x}\right) \times \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \times \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{(n+1)}.$$

On effectue un produit de Cauchy $\left(R\left(\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}\right) = \frac{1}{4}\right.$, par exemple avec d'Alembert).

Pour $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[\setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \sum_{k\geq 0}^{n} \binom{2k}{k} \times \frac{1}{k+1} \binom{2n-2k}{n-k} x^n$$

Q19) Pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \quad \text{avec Q16)}$$

Donc $$\frac{1}{2x} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} x^n$$

Donc si $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n \left(\sum_{k\geq 0}^{n} \binom{2k}{k} \times \frac{1}{k+1} \binom{2n-2k}{n-k}\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} x^n$.

Ça reste vrai pour $x=0$ $(1=1)$ donc par unicité du développement en série entière, on a bien

$$\sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}$$

Q20) Soit $n \geq 1$.

On note $a_{n,k} = n x^{n(1+k)}$. $|a_{n,k}| = n|x|^{n(1+k)}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} n|x|^{n(1+k)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n|x|^n \times \frac{1}{1-|x|^n} \right) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Pour $n \geq 1$, on note $U_n = \dfrac{n|x|^n}{1-|x|^n} \geq 0$.

- si $x = 0$, $\sum U_n$ converge
- si $x \neq 0$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1$ donc d'après d'Alembert

pour les séries numériques, $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge

Donc la famille $(|a_{n,k}|)_{\substack{1\leq n \\ 0\leq k}}$ est sommable et avec l'énoncé

$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} n x^{n(1+k)}$ existe et $\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} n x^{n(1+k)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{1-x^n}}}$

(car avec $\sum_{k\geq 0}^{+\infty} x^{nk} = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} (x^n)^k = \dfrac{1}{1-x^n}$ car $|x^n| < 1$).

Q21) Avec le résultat admis par l'énoncé, et Q 20),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k\geq 0}^{+\infty} n x^{n(1+k)} \right) = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n (x^{1+k})^n \right).$$

Or si $|y| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} = \dfrac{y}{(1-y)^2}$

(en effet, $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n$, donc en dérivant terme à terme

sur $]-1,1[$, $\frac{1}{(1-y)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1}$).

Donc $$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}}}$$

Q22) Soit $W_k = \frac{1}{k^3(k+1)}$. $W_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4} > 0$.

$\left(\frac{1}{k^4}\right)_{k>0}$ est de signe fixe et $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^4}$ converge donc $\sum_{k\geq 1} W_k$

converge. Donc le reste de cette série convergente existe bien

et <u>U_n est bien défini</u>

Q23) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k^3(k+1)} \mathbb{1}_{k\geq n} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}).$$

Donc $$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{k^3(k+1)} \mathbb{1}_{n\leq k}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} n\right) \times \frac{1}{k^3(k+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2k^3(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \frac{\pi^2}{12}}$

Q24) Pour $j>i$, $b_{ij}=\frac{2^i}{2^j}$ et $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^j$ converge, donc (7

$\sum_{j\geq 0} b_{ij}$ converge (pour $i\in\mathbb{N}$, fixé).

De plus, $\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} = \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} + (-1) = -1 + \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j$

donc $\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1-1=0$.

Donc $\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0 \text{ et la somme existe bien}}$

Q25). Soit $j\in\mathbb{N}$ fixé. Pour $i>j$, $b_{ij}=0$. Donc

$\sum_{i\geq 0} b_{ij}$ converge et $\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} = \sum_{i=0}^{j} b_{ij} = -1 + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{2^i}{2^j}$

donc $\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^j\left[\frac{1-2^j}{1-2}\right] = -1 + \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = -\frac{1}{2^j}$

Or $\sum_{j\geq 0}\frac{1}{2^j}$ converge donc

$S=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij}$ existe et $S = -\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j = -\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = -2$

Donc $\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} = -2}$

Q26) On constate avec Q24) et Q25) que $\underline{\underline{\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} \neq \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij}}}$

Q27) Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour $j > i$, $-2i\,3^{i-j} = \dfrac{-2i\,3^i}{3^j}$.

Or $\sum_{j \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^j$ converge car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Donc $\sum_{j \geq 0} a_{ij}$ converge

et $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} = i - \sum_{j=i+1}^{+\infty} (-2i\,3^i) \times \left(\frac{1}{3}\right)^j = i - 2i\,3^i \times \left(\frac{1}{3}\right)^{i+1} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}$.

Donc $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} = i - i = 0$

Donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}$ existe et vaut 0

Q28) Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour $i > j$, $a_{ij} = 0$ donc $\sum_{i \geq 0} a_{ij}$ converge

et $\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{j} a_{ij} = j + \sum_{i=0}^{j-1} (-2i\,3^{i-j}) = S_j$.

Alors $S_{j+1} = \sum_{i=0}^{j+1} a_{i,j+1} = (j+1) + \sum_{i=0}^{j} (-2i\,3^{i-j-1})$

donc $S_{j+1} = j+1 - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}(S_j - j) = 1 + \frac{1}{3} S_j$.

On a une suite arithmético-géométrique.

$c = 1 + \frac{1}{3} c \iff c = \frac{3}{2}$.

$S_{j+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(S_j - \frac{3}{2}\right)$ donc $S_j - \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(S_0 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^j$

car $S_0 = 0$. Donc $\boxed{S_j = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^j}\right) = \dfrac{3^j - 1}{2 \times 3^{j-1}}}$

Q29) Si $W_j = \frac{1}{2}\left(\frac{3^j - 1}{3^{j-1}}\right) \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}$.

Donc $W_j \underset{j\to+\infty}{\not\to} 0$ et $\sum_{j\geqslant 0} W_j$ diverge grossièrement.

Donc $\sum_{j\geqslant 0}\left(\sum_{i\geqslant 0}^{+\infty} a_{ij}\right)$ diverge (grossièrement)

Q30) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}$.

Alors $P\left((X=n)\cap(Y=k)\right) = P(Y=k / X=n)\,P(X=n)$

$P((X=n)\cap(Y=k)) = p(1-p)^{n-1} e^{-n}\frac{n^k}{k!}$

Q31) Avec ce qui précède : on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$P(Y=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((Y=0)\cap(X=n)) = p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}e^{-n}$

donc $P(Y=0) = pe^{-1}\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty}\left[(1-p)e^{-1}\right]^n$, avec $|(1-p)e^{-1}|<1$.

Donc $P(Y=0) = pe^{-1}\times\frac{1}{1-(1-p)e^{-1}} = \frac{p}{e-(1-p)}$. Donc $\boxed{P(Y=0) = \frac{p}{e-(1-p)}}$

Q32) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$P(Y=k) = p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ et $f_k(x) = \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} n^k x^n$ à $x\in[-1,1]$.

Donc $P(Y=k) = \frac{p}{(1-p)k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n n^k$ (le terme en $n=0$ est nul)

Donc on a bien $\boxed{P(Y=k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)}$

Q32) On calcule $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{p}{(1-p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n n^k$.

Ce sont des nombres positifs ; on peut échanger les sommes et utiliser Fubini.

$$\sum_{k\geq 1}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{p}{1-p} \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} n^k \times \frac{1}{k!}$$

Or $\sum_{k\geq 1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n - 1$. Donc $\sum_{k\geq 1}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{p}{1-p} \times \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n (e^n - 1)\right)$

Or $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{1}{p}$ et $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1-p}{e}} = \frac{e}{e-(1-p)}$.

Donc $\sum_{k\geq 1}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{1}{1-p} - \frac{ep}{(e-(1-p))(1-p)}$

Donc $\sum_{k\geq 0}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{p}{e-(1-p)} + \frac{1}{1-p} - \frac{ep}{(e-(1-p))(1-p)}$

$$= \frac{p(1-p) + e - (1-p) - ep}{(e-(1-p))(1-p)}$$

Or $(e-(1-p))(1-p) = e - ep - (1-p) + p(1-p)$ donc on a bien $\sum_{k\geq 0}^{+\infty} P(Y=k) = 1$

Q33) Y est à valeurs positives.

On calcule $\sum_{k\geq 0}^{+\infty} k P(Y=k) = E(Y) \in [0, +\infty]$

Donc $E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!}\left(\frac{p}{1-p} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{e^n} n^k\right)$

$= \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{(k-1)!}\right) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n n e^n$

Donc $E(Y) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^n = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$ avec

Q2) . On a donc $\boxed{E(Y) = \frac{1}{p}}$ et Y est d'espérance finie

Q34) . On calcule $E(Y^2)$ avec le théorème de transfert :

$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Y=k) = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{e^n} n^k\right)$

$= \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k n^k}{(k-1)!}$

Or $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k n^k}{(k-1)!} = n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{k!}\right) n^k = n(e^n + n e^n) = n e^n + n^2 e^n$

Donc $E(Y^2) = \frac{p}{1-p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (1-p)^n\right)$ avec $n^2 = n(n-1) + n$

$= \frac{p}{1-p}\left((1-p) \times 2 \times \frac{1}{p^2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{2} \times (1-p)^n\right)$

Donc $E(Y^2) = \frac{2}{p} + \frac{2p}{1-p} \times \frac{(1-p)^2}{p^3}$ avec Q3) pour $k=2$ et $x = 1-p$

Donc $E(Y^2) = \frac{2}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} = \frac{2}{p^2}$ Y^2 est d'espérance finie donc

Y admet une variance et $\boxed{V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{p^2}}$

Q35) $A_n = (X_1+X_2+ \cdots + X_{2n} = n)$

(en effet, on doit avoir n fois pile et n fois face).

Or $X_k \sim B(p)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ et comme $(X_1 \ldots X_n)$ sont indépendants, $S_n = X_1 + \cdots + X_{2n} \sim B(2n,p)$.

Donc $P(A_n) = P(S_n = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

Q36) Soit $i<j$. Si B_i et B_j sont vérifiés, alors on obtient autant de piles que de faces pour la première fois à l'issue de $2i$ lancers et de $2j$ lancers, avec $2j > 2i$.

Ce n'est pas possible. B_i et B_j sont incompatibles

Q37) On prouve $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

Par double inclusion :

$\boxed{\subset}$ Si $\omega \in C$, $O = \{n \in \mathbb{N}^*$, à l'issue des $2n$ lancers, on a autant de piles que de faces$\}$ est non vide. Si on prend $n = \min(O)$, alors $\omega \in B_n$ donc $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$

$\supset$ Si $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in B_n$ et $\omega \in C$

Donc $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. C'est une union dénombrable d'événements, donc C est un événement.

De plus, comme l'union est disjointe (les événements sont incompatibles avec Q36)), $\underline{\underline{P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)}}$ (10

Q38) $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

Donc $((B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \overline{C})$ est un système complet d'événements.

<u>D'après la formule des probabilités totales</u> :

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_n \cap B_k) + P(A_n \cap \overline{C}).$$

Si A_n est vérifié, il y a autant de fois Pile et Face pour la première fois après $2k$ lancers, avec $k \leq n$.

$$\text{Donc } P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \cap B_k) \quad \text{(les autres termes sont nuls)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A_n / B_k)$$

$$\text{Or } P(A_n / B_k) = P(X_1 + \dots + X_{2n} = n / B_k) = P(X_{2k+1} + \dots + X_{2n} = n-k)$$

(si B_k est vérifié, $X_1 + \dots + X_{2k} = k$ et B_k ne dépend que de $X_1, \dots, X_{2k}$, donc $(X_{2k+1} + \dots + X_{2n} = n)$ et B_k sont <u>indépendants</u>).

Or $\underline{X_{2k+1} + \dots + X_{2n} \sim X_1 + \dots + X_{2n-2k}}$.

$$\text{Donc } P(X_{2k+1} + \dots + X_{2n} = n) = P(X_1 + \dots + X_{2n-2k} = n-k) = P(A_{n-k})$$

D'où $\underline{P(A_n) = \sum_{k\geq 1}^{n} P(B_k) P(A_{n-k})}$ [si $k = n$, $P(A_0) = P(\Omega) = 1$ et $P(A_n / B_n) = 1$]

Q39) On procède par récurrence forte et on prouve pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{" } P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n \text{ "} = H(n)$$

• Pour $n=1$: $P(B_1) = P(A_1) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2p(1-p)$

On a bien $P(B_1) = \frac{2}{1}\binom{0}{0} p(1-p)$ et $H(1)$ vraie

• Soit $n \geq 2$ tel que $H(1)$ --- $H(n-1)$ sont vraies

Alors avec Q38) :

$$P(A_n) = P(B_n)\times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k)P(A_{n-k})$$

Donc $P(B_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}\binom{2n-2k}{n-k} p^n (1-p)^n$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\binom{2(k-1)}{k-1}\binom{2(n-k)}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-1-k)}{n-1-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-1)-2k}{n-1-k} - \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$$

$= \frac{1}{2}\binom{2n}{n} - \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$ avec I-3) appliqué pour $n-1 \in \mathbb{N}$

Donc $P(B_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n [1-1] + \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n$.

On a bien $P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} p^n (1-p)^n$ et $H(n)$ vraie,

ce qui achève la preuve.

Q40) Soit $p \neq \frac{1}{2}$. $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} p^{n+1}(1-p)^{n+1}$

On pose $x = p(1-p)$ et on applique I-2) pour $x \in]-R, R[=]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$

Il vient $P(C) = 2p(1-p) \times \frac{1}{2p(1-p)} \left(1 - \sqrt{1-4p(1-p)}\right)$ (11

On a donc bien $\underline{\underline{P(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}}}$

On a bien $x = p(1-p) \in]-R, R[=]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

On étudie en effet $\varphi(t) = t(1-t)$ sur $[0,1]$

Il vient $\varphi'(t) = 1 - 2t$ et φ est maximale pour $t = \frac{1}{2}$, et positive. Or $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, avec φ strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Donc $\varphi(p) \in [0, \frac{1}{4}[$

et $\underline{x \in]-R, R[\text{, ce qui justifie d'appliquer I-2}}$.

Q41) Pour $p = \frac{1}{2}$, on veut calculer $P(C)$. Pour $p \in]0,1[$, on a

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-1}{n-1} (p(1-p))^n = \Psi(p)$$

Pour $p \neq \frac{1}{2}$, $\Psi(p) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.

On montre que $\underline{\Psi \text{ est continue en } \frac{1}{2}}$. Alors $\Psi(p) \xrightarrow[p \to \frac{1}{2}]{} \Psi(\frac{1}{2}) = 1$.

On pose $U_n(p) = \frac{1}{n} \binom{2n-1}{n-1} (p(1-p))^n$.

Avec l'étude de φ effectuée en Q40), $\|U_n\|_{\infty,]0,1[} = \frac{1}{n 4^n} \binom{2n-1}{n-1}$

$\underline{\text{Avec Stirling}}$, $\binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{2} \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$

Donc $\binom{2n-1}{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi} \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 4^n \times \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}$

Donc $\|U_n\|_{\infty,]0,1[} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n^{3/2}}$ qui est de signe fixe.

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, $\sum U_n$ est normalement convergente sur $]0,1[$. Or chaque U_n est continue sur $]0,1[$, donc Ψ est continue sur $]0,1[$

Donc pour $p = \frac{1}{2}$, $P(C) = \Psi(\frac{1}{2}) = 1$