Mines Maths 2 PSI 23

1) Il y a $n!$ bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Donc $\boxed{\mathrm{card}(S_n)=n!}$

On a alors $\left(\frac{d_n}{n!}1^n\right)$ bornée car $0\leq \frac{d_n}{n!}\leq 1$.

(les dérangements sont des permutations, donc $\frac{d_n}{n!}\leq 1$).

donc $\boxed{R\geq 1}$ (puisque $R=\sup(\{r\in\mathbb{R}_+, (\frac{d_n}{n!}r^n) \text{ bornée}\})$)

2) Soit $k\in[\![0,n]\!]$.

Pour construire une permutation ayant k points fixes, on choisit les points fixes et il y a $\binom{n}{k}$ manières de le faire.

Ces points fixes étant fixés, il reste à construire une bijection sans point fixe entre les $(n-k)$ points restants. Ce sont des dérangements et il y a d_{n-k} possibilités.

<u>Donc il y a $\binom{n}{k}d_{n-k}$ permutations de $[\![1,n]\!]$ avec k points fixes</u>

On a donc $P_n(X_n=k)=\dfrac{\binom{n}{k}d_{n-k}}{n!}$ (puisque la probabilité P_n est uniforme sur S_n).

Donc $\boxed{P_n(X_n=k)=\dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}}$

Soit $x \in]-1,1[$. On effectue un produit de Cauchy :

$R\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) = +\infty$ (avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \frac{x^n}{n!}$) et $R \geq 1$,

donc pour $|x|<1$, $s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$

donc $s(x)e^x = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} P(X_n=k)\right)x^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n$ car

par union disjointe, $\sum_{k\geq 0}^{n} P_n(X_n=k) = P_n(S_n) = 1$.

Donc $\forall x \in]-1,1[, s(x)e^x = \frac{1}{1-x}$

On sait que $R\geq 1$. Si par l'absurde $R>1$, alors la série

$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$ serait absolument convergente pour

$|x|<R$ par produit de Cauchy. Or $\sum_{n\geq 0} x^n$ diverge pour $x=1$.

Donc $R\leq 1$ et $R=1$

4) Soit $x \in]-1,1[$.

$(1-x)\,s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{d_{n}}{n!}x^{n+1}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

Donc pour $n\geq 1$, par unicité du développement en série entière :

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Par somme télescopique,

On conclut $\frac{d_n}{n!} - \frac{d_0}{1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $\boxed{\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$

5) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

On a prouvé $\underline{P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}}$ avec 4)

6) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $\sigma(i)$ peut prendre toutes les valeurs de $[\![1, n]\!]$ avec la même probabilité. En particulier, $P(\sigma(i) = i) = \frac{1}{n}$.

Donc $P(U_i = 1) = \frac{1}{n}$ et $U_i(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\underline{U_i \sim \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{n}\right)}$$

Soit $i \neq j$. $\underline{U_i U_j(\Omega) = \{0, 1\}}$.

$$P(U_i U_j = 1) = P(U_i = 1, U_j = 1) = P(\sigma(i) = i, \sigma(j) = j)$$
$$= P(\sigma(j) = j \,/\, \sigma(i) = i)\, P(\sigma(i) = i).$$

Si $\sigma(i) = i$, il reste $n-1$ valeurs possible pour $\sigma(j)$ puisque σ est bijective, donc injective, ce qui entraîne $\sigma(j) \neq i$.

Donc $P(U_i U_j = 1) = \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}$ et $\boxed{U_i U_j \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)}$

7) Si $\sigma \in S_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ.

Donc $\boxed{X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i}$ (car $U_i = \mathbb{1}_{\sigma(i)=i}$)

Donc $E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(U_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$ par linéarité de l'espérance.

$$V(X_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(U_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \text{cov}(U_i, U_j).$$

Pour $1\leq i<j\leq n$, $\text{cov}(U_i,U_j) = E(U_iU_j) - E(U_i)E(U_j)$

$$= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}$$

Donc $V(X_n) = n\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{n} + 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\right)\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{n(n-1)}{n^2}$$

Donc $\boxed{V(X_n) = 2 - 1 = 1}$

8) Soit $k\in\mathbb{N}$. $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{e^{-1}}{k!}$

(On sait que $\sum \frac{(-1)^i}{i!}$ converge).

Donc $\boxed{y_k = \lim_{n\to+\infty} P_n(X_n = k) = \frac{1}{e\,k!}}$

On voit que $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!} = y_k$

Donc $\boxed{Y \sim \mathcal{P}(-1) \text{ (loi de Poisson de paramètre } -1)}$

9) $X_n(\Omega)$ est fini donc G_{X_n} existe bien. (3

Soit $s \in \mathbb{R}$. $G_{X_n}(s) = E(s^{X_n}) = \sum_{k=0}^{n} s^k P(X_n = k)$

<u>Avec 5)</u>, on sait que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$

$$\text{Donc } G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

$$\text{Donc } G_{X_n}(s) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \right) \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)}_{U_n(s)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}_{V_n(s)}.$$

Par produit, $U_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^s e^{-1} = e^{s-1}$

De plus, $|V_n(s)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|s|^k}{k!} \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)!} \right)$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|s|^k}{k!} \times k \times \frac{1}{(n-(k-1))!} \leq |s| \sum_{k=1}^{n} \frac{|s|^{k-1}}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

$$|V_n(s)| \leq |s| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|s|^k}{k!(n-k)!} \leq \frac{|s|}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{|s|^k n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{Donc } |V_n(s)| \leq \frac{|s|}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |s|^k \leq \frac{|s|}{n!} (1+|s|)^n$$

Par encadrement, $V_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\underline{\underline{G_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{s-1}}}$

Or $Y \sim \mathcal{P}(+1)$ donc $G_Y(s) = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!}(+1)^k e^{-1} = e^{s-1}$

On a bien $\underline{\underline{G_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G_Y(s)}}$

10) Soient x, y, z trois distribution de $\mathbb{N}$.

On sait que $\sum_{k\geq 0} x(k)$ et $\sum_{y\geq 0} y(k)$ convergent et que

$\sum_{k\geq 0}^{+\infty} |x(k)| = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} x(k) = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} y(k) = 1$, ce qui justifie les écriture suivante.

$d_{VT}(x,y) \leq \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} (|x(k)| + |y(k)|) \leq \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} x(k) + \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} y(k)$

Donc $\underline{\underline{0 \leq d_{VT}(x,y) \leq 1}}$

Si $x = y$, $d_{VT}(x,y) = 0$

Si $d_{VT}(x,y) = 0$, on a pour $k \in \mathbb{N}$: $0 \leq |x(k) - y(k)| \leq 2 d_{VT}(x,y)$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $x(k) = y(k)$ et $x = y$.

Donc $\underline{\underline{d_{VT}(x,y) = 0 \iff x = y}}$

$\underline{d_{VT}(y,x) = \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} |y(k) - x(k)| = d_{VT}(x,y)}$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $|x(k) - z(k)| = |x(k) - y(k) + (y(k) - z(k)|$

$\leq |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|$

Comme les séries convergent : Donc $\frac{1}{2} \sum_{k\geq 0}^{+\infty} |x(k) - z(k)| \leq d_{VT}(x,y) + d_{VT}(y,z)$

On a bien $\underline{\underline{d_{VT}(x,z) \leq d_{VT}(x,y) + d_{VT}(y,z)}}$

11) On a $\begin{cases} p_X(0) = 1-\lambda \ ; \ p_X(1) = \lambda \text{ et } \forall k \geq 2, \ p_X(k) = 0 \\ p_Y(0) = 1-\mu \quad p_Y(1) = \mu \text{ et } \forall k \geq 2, \ p_Y(k) = 0 \end{cases}$

Donc $d_{VT}(p_X, p_Y) = \frac{1}{2}\left[|1-\lambda - (1-\mu)| + |\lambda - \mu| \right] = |\lambda - \mu|$

Donc $\boxed{d_{VT}(p_X, p_Y) = |\lambda - \mu|}$

12) $X \sim \mathcal{B}(\lambda)$.

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k \geq 0}^{+\infty} \left| p_X(k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|1-\lambda - e^{-\lambda}| + |\lambda - \lambda e^{-\lambda}| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right)$$

On étudie sur $]0,1[$ $\varphi : \lambda \mapsto 1-\lambda-e^{-\lambda}$ pour déterminer son signe.

$\varphi'(\lambda) = -1 + e^{-\lambda} \leq 0$ Donc

λ	0		1
$\varphi(\lambda)$	0	$\searrow$	

Donc $\forall \lambda \in]0,1[, \ \varphi(\lambda) \leq 0$ et $|1-\lambda-e^{-\lambda}| = e^{-\lambda} + \lambda - 1$.

Donc $d_{VT}(p_X, \pi_Y) = \frac{1}{2}\left(e^{-\lambda} + \lambda - 1 + \lambda - \lambda e^{-\lambda} + \left(\sum_{k \geq 0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \right)$

Donc $d_{VT}(p_X, \pi_Y) = \frac{1}{2}\left(2\lambda - 2\lambda e^{-\lambda} + e^{\lambda}e^{-\lambda} - 1 \right)$

On a bien $\boxed{d_{VT}(p_X, \pi_Y) = \lambda(1 - e^{-\lambda})}$

Or pour $\lambda \in]0,1[$, $\varphi(\lambda) = 1-\lambda-e^{-\lambda} \leq 0$

donc $1-e^{-\lambda} \leq \lambda$ et $\boxed{d_{V_T}(p_X, \pi_Y) \leq \lambda^2}$

13) $$2 d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |0 - \pi_1(k)|$$

car pour $k > n$, $P_n(X_n = k) = 0$

Donc $$2 d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-1} \times \frac{1}{k!}$$

Or $$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}$$ donc $$\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - e^{-1} = \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

On a donc bien $$\underline{\underline{2 d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}}}$$

14) Soit $k \geq n+1$.

$$k! = (n+1)! \underbrace{(n+2)(n+3) \cdots (k)}_{k-(n+1) \text{ terme}}$$

Donc $k! \geq (n+1)! \, (n+2)^{k-(n+1)}$

donc $$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}$$

Donc $$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$ en changeant d'indice (la série $\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{(n+2)}\right)^k$ est clairement convergente car $\left|\frac{1}{(n+2)}\right|<1$, donc les séries qui interviennent sont toutes convergentes)

On a donc bien $r_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k}$ (1)

On calcule $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{(n+2)}} = \frac{n+2}{n+1}$.

Donc $r_n = \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}$

avec $0 \leq r_{n+1} \leq \frac{1}{(n+2)!}\times\frac{n+3}{n+2}$ (on applique (1) pour r_{n+1}). Donc $0 \leq (n+1)!\, r_{n+1} \leq \frac{1}{(n+2)}\times\frac{n+3}{n+2}$.

Par encadrement, $(n+1)\, r_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $r_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$

Donc $\boxed{r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}}$

15) On sait que $\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^i}{i!}$ est une série alternée, avec $\left(\left|\frac{(-1)^i}{i!}\right|\right) = \left(\frac{1}{i!}\right)$ décroissante et tendant vers 0.

Donc avec la majoration du reste :

$$\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$$

Donc $2 d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) \leq \sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{(n-k+1)!} + e^{-1} \times r_n$

Or $\sum_{k\geq 0}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{(n-k+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k\geq 0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc $0 \leq 2 d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \frac{e^{-1}}{(n+1)!}$

donc $0 \leq 2 \frac{(n+1)!}{2^n} d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) \leq 2 + \frac{n+2}{(n+1)} e^{-1} \times \frac{1}{2^n}$

$0 \leq 2 \frac{(n+1)!}{2^n} d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) \leq 2 + \frac{2}{e}$

car $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2$

Donc $d_{V_T}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$

16) On sait que $\sum_{k\geq 0}^{+\infty} x(k) = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} y(k) = 1$ et que les deux séries sont absolument convergentes.

On effectue un produit de Cauchy :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \times \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\geq 0}^{k} x(i) y(k-i) \right).$$

Donc $\sum_{k\geq 0}^{+\infty} (x*y)(k) = 1$ (et cette série converge absolument)

De plus, on a bien $x*y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

Donc $x * y$ est une distribution de probabilité

17) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P_{X+Y}(k) = P(X+Y=k) = P\left(\bigcup_{i=0}^{k} (X=i \cap Y=k-i)\right).$$

C'est une union disjointe, donc :

$$P_{X+Y}(k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i \cap Y=k-i).$$

Par indépendance, $P_{X+Y}(k) = \sum_{i=0}^{k} P_X(i)\, P_Y(k-i)$

$$= P_X * P_Y(k)$$

On a bien $\underline{\underline{P_{X+Y} = P_X * P_Y}}$

18) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$|(x*y)(k) - (u*v)(k)| = \left| \sum_{i+j=k} x(i)y(j) - \sum_{i+j=k} u(i)v(j) \right|$$

$$= \left| \sum_{i+j=k} x(i)y(j) - \sum_{i+j=k} u(i)y(j) + \sum_{i+j=k} u(i)y(j) - \sum_{i+j=k} u(i)v(j) \right|$$

Par inégalité triangulaire :

$$|(x*y)(k) - (u*v)(k)| \leq \sum_{i+j=k} |y(j)|\, |x(i)-u(i)| + \sum_{i+j=k} |u(i)|\, |y(j)-v(j)|$$

Comme u, y sont à valeurs positives, on a bien le résultat

19) $2d_{V_T}(x*y, u*v) = \sum_{k=0}^{+\infty} |(x*y)(k)-(u*v)(k)|$

Or $\sum_{i+j=k} y(j)\,|u(i)-x(i)| = \sum_{i=0}^{k} |u(i)-x(i)| \times y(k-i)$

On utilise le théorème de Fubini (les quantités concernées sont à valeurs positives et on calcule dans $\overline{\mathbb{R}_+}$).

Il vient $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{k} |u(i)-x(i)|\, y(k-i)\right) = \sum_{k\geq 0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,k}\right)$,

avec $a_{i,k} \begin{cases} = |u(i)-x(i)|\, y(k-i) & \text{si } i\in[\![0,k]\!] \\ = 0 & \text{si } i>k. \end{cases}$

Par Fubini, $A = \sum_{k\geq 0}^{+\infty}\left(\sum_{i\geq 0}^{k} |u(i)-x(i)|\, y(k-i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} |u(i)-x(i)|\, y(k-i)$

donc $A = \sum_{i\geq 0}^{+\infty} |u(i)-x(i)| \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) = \sum_{i\geq 0}^{+\infty} |u(i)-x(i)|$.

Ainsi, $d_{V_T}(x*y, u*v) \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq 0}^{+\infty} |u(i)-x(i)| + \sum_{i=0}^{+\infty} |y(i)-v(i)|\right)$

(avec un calcul analogue pour le second terme).

Donc $\boxed{d_{V_T}(x*y, u*v) \leq d_{V_T}(x,u) + d_{V_T}(y,v)}$

20) $U \sim B(n,\lambda)$ soient $U_1, \ldots U_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi $B(\lambda)$ (loi de Bernoulli de

paramètre λ). Alors $U_1+\dots+U_n \sim \mathcal{B}(n,\lambda)$ donc U (7

et $(U_1+\dots+U_n)$ ont même loi.

Donc $P_U = P_{(U_1+\dots+U_n)} = P_{U_1} * P_{U_2} * \dots * P_{U_n}$ avec 17),

une récurrence et le lemme de coalitions (qui permet

de dire que $(U_1+\dots+U_{n-1})$ et U_n sont indépendantes)

De même, soient $X_1, \dots X_n$, indépendantes, telles que

pour $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Alors $X = X_1+\dots+X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$

et $P_X = P_{X_1} * \dots * P_{X_n} = \Pi_{n\lambda}$

Dès lors, $d_{VT}(P_U, \Pi_{n\lambda}) = d_{VT}(P_{U_1} * \dots * P_{U_n}, P_{X_1} * \dots * P_{X_n})$

et on utilise 19) et une récurrence :

$$d_{VT}(P_U, \Pi_{n\lambda}) \leq d_{VT}(P_{U_n}, P_{X_n}) + d_{VT}(P_{U_1+\dots+U_{n-1}}, P_{X_1+\dots+X_{n-1}})$$

$$\leq d_{VT}(P_{U_n}, P_{X_n}) + d_{VT}(P_{U_1+\dots+U_{n-2}} * P_{U_{n-1}}, P_{X_1+\dots+X_{n-2}} * P_{X_{n-1}})$$

donc $\boxed{d_{VT}(P_U, \Pi_{n\lambda}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_{VT}(P_{U_k}, P_{X_k})}$

Or avec 12), $d_{VT}(P_{U_k}, P_{X_k}) \leq \lambda^2$.

On a donc bien $\underline{\underline{d_{VT}(P_U, \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2}}$

21) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq k$:

$$P(B_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$$

On prouve le résultat directement (voir cours) :

$$P(B_n=k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right)\alpha^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n \times \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^k}$$

Or $n(n-1)\ldots(n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$; $\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{\alpha}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\alpha}$

et $\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc $\underline{\underline{P(B_n=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}}}$

On peut aussi utiliser le résultat précédent pour $\lambda = \frac{\alpha}{n}$.

$$0 \leq d_{VT}\left(P_{B_n}, \pi_{n\frac{\alpha}{n}}\right) \leq n \times \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$$

donc $d_{VT}(P_{B_n}, \pi_\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or pour $k\in\mathbb{N}$, $0 \leq |P_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)| \leq 2d_{VT}(P_{B_n}, \pi_\alpha)$

donc $\underline{\underline{P_{B_n}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi_\alpha(k) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}}}$

22) Soient $\alpha, \beta > 0$.

On considère pour $n > \lfloor\alpha\rfloor$, B_n binomiale de paramètre n et $\frac{\alpha}{n}$. Soit aussi, pour $n > \lfloor\beta\rfloor$,

$C_n \sim B(n, \frac{\beta}{n})$.

Alors $d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq d_{VT}(\pi_\alpha, P_{B_n}) + d_{VT}(P_{B_n}, \pi_\beta)$

$$\leq d_{VT}(\pi_\alpha, P_{B_n}) + d_{VT}(P_{B_n}, P_{C_n}) + d_{VT}(P_{C_n}, \pi_\beta) \quad \underline{(2)}$$

(en utilisant la dernière propriété du 10)).

Or si $T_1, \ldots T_n$ sont des variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\alpha}{n}$, on sait que

$B_n = T_1 + \ldots + T_n \sim B(n, \frac{\alpha}{n})$.

Donc $P_{B_n} = P_{T_1 + \ldots + T_n} = P_{T_1} * \ldots * P_{T_n}$

De même, on prend $W_1 \ldots W_n$, indépendantes, de loi $B(\frac{\beta}{n})$,

et $C_n = W_1 + \ldots + W_n \sim B(n, \frac{\beta}{n})$.

Alors $d_{VT}(P_{B_n}, P_{C_n}) = d_{VT}(P_{T_1} * \ldots * P_{T_n}, P_{W_1} * \ldots * P_{W_n})$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} d_{VT}(P_{T_k}, P_{W_k}) \quad \underline{\text{avec 17) et 19)}}$$

Donc $d_{VT}(P_{B_n}, P_{C_n}) \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right|$ <u>avec 11)</u>

donc $\underline{\underline{d_{VT}(P_{B_n}, P_{C_n}) \leq |\alpha - \beta|}}$

D'autre part, avec 20), $d_{VT}(P_{B_n}, \pi_{n\frac{\alpha}{n}}) = d_{VT}(P_{B_n}, \pi_\alpha) \leq n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$

et de même, $d_{VT}(P_{cn}, \pi_\beta) \leq \frac{\beta^2}{n}$

Donc on revient à (2) :

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha-\beta| + \frac{\alpha^2+\beta^2}{n}.$$

En passant l'inégalité à la limite :

$$\boxed{d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha-\beta|}$$