ALGEBRE

Séance 1 : Vendredi 15 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 2

Exercice 1 (Oral Mines 24, Léo,2) : On pose $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, D_n désigne le déterminant de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés pour $1 \le i, j \le n$ par $A_{i,j} = f_{|i-j|}$. Calculer D_n en fonction de n.

Ind : utiliser des opérations élémentaires sur le déterminant et établir une relation de récurrence.

On étudie pour $n \ge 2$ $D_{n+1} = \begin{vmatrix} f_0 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n \\ f_1 & \cdots & f_{n-3} & f_{n-2} & f_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1} & \cdots & f_1 & f_0 & f_1 \\ f_n & \cdots & f_2 & f_1 & f_0 \end{vmatrix}$. On note $C_1,...,C_{n+1}$ les colonnes de cette matrice dont on calcule le déterminant. On fait $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - C_n - C_{n-1}$.

Il vient $D_{n+1} = \begin{vmatrix} f_0 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} & 0 \\ f_1 & \cdots & f_{n-3} & f_{n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1} & \cdots & f_1 & f_0 & 0 \\ f_n & \cdots & f_2 & f_1 & -f_3 \end{vmatrix} = -f_3 D_n$

Or $f_2 = 1$ et $f_3 = 2$, donc on obtient que $D_{n+1} = (-2) D_n$. C'est une suite géométrique.

Ainsi, pour $n \ge 2$, $D_n = (-2)^{n-2} D_2$. Or $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, donc $\boxed{D_n = (-1)^{n-1} 2^{n-2}}$

Exercice 2 (oral IMT 24, Tristan,3) : Soit $E = \mathbb{R}^n$.

1) Donner une caractérisation d'un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$.
2) Représenter la matrice d'un tel endomorphisme dans une base choisie pour maximiser le nombre de coefficients nuls, et ne faire apparaitre que des 0 et des 1.

Ind :

1) Procéder par analyse et synthèse. Montrer $\mathrm{Im}(f) = Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} f \circ f = 0_{L(E)} \\ rg(f) = \dfrac{n}{2} \end{cases}$.
2) Prendre une base $(e_1,..,e_p)$ de $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$, et pour $k \in [\![1, p]\!]$, un vecteur e_{k+p} tel que $f(e_{k+p}) = e_k$.

1) On procède par analyse et synthèse. Soit $f \in L(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$. Alors $f \circ f = 0_{L(E)}$.

   De plus, par théorème du rang, si on pose $rg(f) = p$, il vient $n = 2p$, donc $rg(f) = \dfrac{n}{2}$.

   On a donc prouvé que si $f \in L(E)$ vérifie $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$, alors $\begin{cases} f \circ f = 0_{L(E)} \\ rg(f) = \dfrac{n}{2} \end{cases}$.

Réciproquement, on suppose $\begin{cases} f\circ f = 0_{L(E)} \\ rg(f)=\dfrac{n}{2} \end{cases}$. Alors $\mathrm{Im}(f)\subset Ker(f)$ et par théorème du rang, il vient

$\dim\big(\ker(f)\big) = rg(f) = \dfrac{n}{2}$, donc $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$.

$$\boxed{\text{On a donc pour } f\in L(E) : \mathrm{Im}(f)=Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} f\circ f = 0_{L(E)} \\ rg(f)=\dfrac{n}{2} \end{cases}}.$$

2) Soit $f\in L(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f)=Ker(f)$. On pose $p = rg(f) = \dfrac{n}{2}$. On prend une base $(e_1,..,e_p)$ de $\mathrm{Im}(f)=Ker(f)$. On considère, pour $k\in[\![1,p]\!]$, un vecteur e_{k+p} tel que $f(e_{k+p})=e_k$.
On pose $C=\left(e_1,...,e_p,e_{p+1},...,e_{2p}\right)$. On prouve que c'est une base de E.
Soient $\alpha_1,...,\alpha_p,\alpha_{p+1},...,\alpha_{2p}\in\mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{2p}\alpha_k e_k = 0_E$.
On applique f et il vient $\sum_{k=p+1}^{2p}\alpha_k e_{k-p} = 0_E$, donc comme $(e_1,..,e_p)$ est libre, $\alpha_{p+1}=...=\alpha_{2p}=0$.
Puis on reprend $\sum_{k=1}^{2p}\alpha_k e_k = 0_E$, et $\alpha_1=...=\alpha_p=0$. Donc C est libre, et contient $2p=n$ vecteurs : c'est une base de E.

$$\boxed{\text{Dans cette base, on obtient par blocs : } M_C\left(f\right)=\begin{pmatrix}(0) & (0)\\ (0) & I_p\end{pmatrix}}.$$

Cette matrice ne fait apparaître que des 0 et des 1 et contient seulement p coefficients non nuls, ce qui est un minimum. En effet, comme $rg(f)=p$, $M_C\left(f\right)$ doit contenir au moins p colonnes non nulles, donc au moins p coefficients non nuls.

Exercice 3 (oral IMT 24, Diego,3) : déterminer toutes les suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=2U_n+2n^2+2n+1$.
On pourra considérer $s:\begin{matrix}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ U\mapsto s(U)\end{matrix}$, avec $\forall n\in\mathbb{N}, \left[s(U)\right]_n = U_{n+1}$ et utiliser $s-2Id_E$, où $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ind : chercher une solution particulière de la forme $a_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$.

On note E_n l'ensemble des suites qui vérifient $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=2U_n+2n^2+2n+1$.
On note $b=(b_n)$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, b_n=2n^2+2n+1$
Si $U\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il vient $U\in E_n \Leftrightarrow (s-2Id_E)(U)=b$
Si on trouve une solution particulière $a=(a_n)$ de cette équation linéaire, on aura $E_n=\left\{a+h, h\in\ker(s-2Id_E)\right\}$
On cherche une solution particulière sous la forme $a_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$.
On veut $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=2a_n+2n^2+2n+1$, c'est-à-dire :
$\forall n\in\mathbb{N}, \alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma = \left(2\alpha+2\right)n^2+\left(2\beta+2\right)n+2\gamma+1$.
Il suffit d'avoir $\begin{cases}\alpha=2\alpha+2\\ 2\alpha+\beta=2\beta+2\\ \alpha+\beta+\gamma=2\gamma+1\end{cases}$. On résout ce système : $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-6\\ \gamma=-9\end{cases}$.
On pose $a_n=-2n^2-6n-9$ pour $n\in\mathbb{N}$. $a=(a_n)$ est une solution de l'équation.
De plus, $h\in\ker(s-2Id_E)\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h_{n+1}=2h_n \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, h_n=\lambda 2^n$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{E_n = \{n \mapsto \lambda 2^n - 2n^2 - 6n - 9, \lambda \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 4 (Oral CCINP 24, Madeleine,3) :

1) Soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel, stable par produit, déterminer sa dimension.

On suppose dans la suite que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, avec $n \geq 2$.
On suppose aussi que F est stable par produit et que $I_n \notin F$.

2)
   a) Déterminer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.
   b) Montrer que $F \oplus Vect(I_n) = M_n(\mathbb{R})$.
3) Soit p le projecteur sur $Vect(I_n)$ parallèlement à F.
   a) Montrer que si $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$, alors $p(MM') = p(M)p(M')$
   b) Montrer que si $M^2 \in F$, alors $M \in F$.
4) Montrer que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $E_{i,j} \in F$. En déduire une contradiction.
5) F est défini comme l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, trouver sa dimension et montrer de 2 manières différentes que F n'est pas stable par produit.

Ind :

1) Trouver une base à l'aide des matrices de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
2) a) Montrer $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ en calculant les coefficients.
   b) Travailler sur l'intersection et les dimensions.
3) a) Ecrire $M = \alpha I_n + A$ et $M' = \alpha' I_n + A'$.
   b) Procéder de même pour calculer $(p(M))^2$.
4) Montrer d'abord avec 3b) que si $i \neq j$, alors $E_{i,j} \in F$, puis en déduire que $E_{i,i} \in F$.
5) Utiliser ce qui précède pour une des deux manières, et pour l'autre trouver deux matrices de trace nulle dont le produit ne l'est pas.

1) $F = Vect(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$, donc F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est libre et génératrice de F donc c'est une base de F et $\boxed{\dim(F) = 3}$.

   Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in F$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in F$, alors $MM' \in F$ en faisant le calcul.

   $\boxed{F \text{ est stable par produit}}$.

2) a) Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.

   Alors pour $p, q \in [\![1, n]\!]$, $(E_{i,j}E_{k,l})_{p,q} = \sum_{s=1}^{n} (E_{i,j})_{p,s} (E_{k,l})_{s,q} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{i,p}\delta_{j,s}\delta_{k,s}\delta_{l,q} = \delta_{j,k}\delta_{i,p}\delta_{l,q}$.

   Donc $(E_{i,j}E_{k,l})_{p,q} = \delta_{j,k}(E_{i,l})_{p,q}$ et $\boxed{E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}}$

   b) On détermine $F \cap Vect(I_n)$. Soit $M \in F \cap Vect(I_n)$. Alors $M = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda} M \in F$, donc $I_n \in F$, ce qui est absurde. Donc $M = 0$ et $F \cap Vect(I_n) = \{0\}$.

   De plus, $\dim(F) + \dim(Vect(I_n)) = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R}))$.

   $\boxed{\text{On a donc bien } F \oplus Vect(I_n) = M_n(\mathbb{R})}$.

3) a) Soit p le projecteur sur $Vect(I_n)$ parallèlement à F. Soient $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$.
On décompose $M = \alpha I_n + A$, avec $A \in F$. De même, $M' = \alpha' I_n + A'$, avec $A' \in F$.
Alors $p(M) = \alpha I_n$ $p(M') = \alpha' I_n$.
Alors $MM' = \alpha\alpha' I_n + \alpha' A + \alpha A' + AA'$.
Comme F est stable par produit, $\alpha' A + \alpha A' + AA' \in F$. Donc $p(MM') = \alpha\alpha' I_n$.
On a bien $\boxed{p(MM') = p(M)p(M')}$

b) On suppose $M^2 \in F$. Alors $p\left(M^2\right) = \left(p(M)\right)^2 = 0$, donc $\left(p(M)\right)^2 = 0$.
Mais si $M = \alpha I_n + A$, avec $A \in F$, il vient $p(M) = \alpha I_n$, donc $\left(p(M)\right)^2 = \alpha^2 I_n$. Donc $\alpha = 0$ et $p(M) = 0$, et ainsi $\boxed{M \in F}$.

4) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Si $i \neq j$, $E_{i,j}E_{i,j} = 0 \in F$, donc avec 3b), $E_{i,j} \in F$.
De plus, si on prend $i \neq j$ $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \in F$ car F est stable par produit.
Donc $\boxed{\text{pour } i, j \in [\![1, n]\!],\ E_{i,j} \in F}$.
Comme F est stable par combinaison linéaire, il vient lors $\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_{i,i} = I_n \in F \text{, ce qui est absurde}}$.

5) L'application $Tr : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto Tr(M) \end{array}$ est une forme linéaire non nulle (car $Tr(I_n) \neq 0$).
Donc $\boxed{F = \ker(Tr) \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_n(\mathbb{R})}$

De plus, F est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ et $\dim(F) = n^2 - 1$. Comme $I_n \notin F$, avec l'absurdité établie au 4), $\boxed{F \text{ n'est pas stable par produit.}}$

On peut aussi le voir directement : on prend la matrice $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix} \in F}$. Pourtant, $\boxed{D^2 \notin F}$ car $Tr\left(D^2\right) = 2 \neq 0$.

Exercice 5 (Oral Mines 24, Elise,3). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note E^* l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in E$. Montrer que $x = y \Leftrightarrow \forall \Phi \in E^*, \Phi(x) = \Phi(y)$.

Ind : pour le sens retour, prendre une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E et considérer l'application qui à $a = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in E$ associe a_i.

Le sens direct est clair. On suppose maintenant $\forall \Phi \in E^*, \Phi(x) = \Phi(y)$ et on veut montrer que $x = y$.
On considère une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E. Pour $a \in E$, si $a = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, on note pour $i \in [\![1, n]\!]$
$\Phi_i(a) = a_i$
Φ_i est une application de E dans $\mathbb{R}$. On peut montrer sans difficultés qu'elle est linéaire. Donc $\Phi_i \in E^*$.
De plus, si $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + ... + y_ne_n$, il vient $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$, donc $x_i = y_i$.
Comme ceci est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a bien $x = y$.
On a donc bien $\boxed{x = y \Leftrightarrow \forall \Phi \in E^*, \Phi(x) = \Phi(y)}$

Exercice 6 (Oral Mines 24, Simon,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt)$. Montrer que n est impair.
2) On suppose que $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence et l'unicité du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt)$. On le note P_p.
3) Déterminer P_0, P_1, P_2.
4) Déterminer le degré de P_p et son coefficient dominant.
5) Montrer que P_p est scindé à racines simples.

Ind :

1) Calculer $P(\sin(\pi - t))$.
2) Pour l'existence, partir de $\sin((2p+1)t) = \mathrm{Im}\left(\left(e^{it}\right)^{2p+1}\right)$ et développer avec le binôme pour trouver un polynôme qui convient. Pour l'unicité, supposer qu'il existe une autre solution et étudier les racines de la différence entre les deux.
3) Utiliser la formule précédente.
4) Regrouper les termes de plus haut degré et montrer que $\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k}$.
5) Calculer $P_p(\sin(\theta_k))$, avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$.

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt)$. On suppose par l'absurde que $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors pour $t \in \mathbb{R}$, $P(\sin(\pi - t)) = \sin(2p(\pi - t)) = -\sin(2pt)$.

   Donc $\sin(2pt) = -\sin(2pt)$ et $\sin(2pt) = 0$. On l'applique pour $t = \dfrac{\pi}{4p}$ et on obtient une absurdité.

2) On suppose $n = 2p+1$. Alors $\sin((2p+1)t) = \mathrm{Im}\left(\left(e^{it}\right)^{2p+1}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (i\sin t)^k (\cos t)^{2p+1-k}\right)$.

   On ne garde que les valeurs impaires de k dans la partie imaginaire.

   Il vient donc $\sin((2p+1)t) = \mathrm{Im}\left(i \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k (\sin t)^{2k+1} (\cos t)^{2(p-k)}\right)$.

   Donc $\sin((2p+1)t) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k (\sin t)^{2k} (1 - \sin^2 t)^{p-k}$.

   On pose $\boxed{P_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} (-1)^k X^{2k+1} (1 - X^2)^{p-k}}$. Il convient, ce qui prouve l'existence.

   Soit de plus un autre polynôme Q_p convenant. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt) = Q(\sin(t))$.

   Donc $\forall t \in \mathbb{R}, (P - Q)(\sin(t)) = 0$. Donc $P - Q$ possède une infinité de racines (tous les éléments de $[-1,1]$), donc $P - Q = 0$ et $P = Q$. Ceci prouve l'unicité.

   $\boxed{\text{Donc si } n = 2p+1, \text{ avec } p \in \mathbb{N},\ \exists! P \in \mathbb{R}[X], \forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt)}$.

3) On calcule pour $p = 0$: $\boxed{P_0 = X}$. Puis pour $p = 1$. $\boxed{P_1 = 3X(1 - X^2) - X^3 = 3X - 4X^3}$.

   Enfin, $P_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{2k+1} (-1)^k X^{2k+1} (1 - X^2)^{2-k} = 5X(1 - X^2)^2 - 10X^3(1 - X^2) + X^5$.

   Donc $\boxed{P_2 = 16X^5 - 20X^3 + 5X}$

4) $P_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1}(-1)^k X^{2k+1}(1-X^2)^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1}(-1)^k X^{2k+1}\left((-1)^{p-k}X^{2p-2k}+R_k\right)$, avec pour $k\in[\![0,p]\!]$, $\deg(R_k)<2p-2k$.

Donc $P_p=X^{2p+1}\left((-1)^p\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1}\right)+S_p$, avec $\deg(S_p)<2p+1$.

On calcule $b_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2p+1-(2k+1)}=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2p-2k}$.

On change d'indice en posant $q=p-k$: $b_p=\sum_{q=0}^{p}\binom{2p+1}{2q}=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k}$.

Donc en ajoutant : $2b_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1}+\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k}=\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}=2^{2p+1}$.

Donc $\boxed{P_p \text{ est de degré } 2p+1 \text{ et son coefficient dominant est } 2b_p=2^{2p}=4^p}$.

5) On a pour $\forall t\in\mathbb{R}, P_p(\sin(t))=\sin((2p+1)t)$. On pose pour $k\in[\![0,2p]\!]$: $\dfrac{k\pi}{2p+1}=\theta_k$.

Alors on constate que pour $k\in[\![0,2p]\!]$: $P_p(\sin(\theta_k))=\sin(k\pi)=0$.

Or sin est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, et les $x_k=\sin(\theta_k)$ sont donc $2p+1$ racines distinctes de P_p.

Comme P_p est de degré $2p+1$, on a trouvé toutes ses racines, elles sont simples et ainsi :

$\boxed{P_p \text{ est scindé à racines simples}}$.

Séance 2 : Mercredi 21 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 5

Exercice 7 : (oral CCINP 24, Victor,1). Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=2A$, avec (A,I_n) libre.

On considère définie par $f(M)=AM$.

1) Déterminer $f^2=f\circ f$.
2) f est-elle diagonalisable ? Trouver son spectre.

Ind :

1) Faire le calcul.
2) Utiliser un polynôme annulateur.

3) Soit $M\in M_n(\mathbb{R})$. On calcule $f\circ f(M)=A^2M=2f(M)$. On a donc $\boxed{f^2=f\circ f=2f}$
4) f annule le polynôme $X^2-2X=X(X-2)$ qui est scindé à racines simples.

   Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

   De plus, $Sp(f)\subset\{0,2\}$. Supposons par l'absurde que $Sp(S)\neq\{0,2\}$. Comme elle est diagonalisable, elle possède donc une unique valeur propre λ. Donc S est semblable, donc égale à λI_n, ce qui est absurde. Donc $\boxed{Sp(S)=\{0,2\}}$

Exercice 8 (Oral CCINP 24, Sandra,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \geq 3$

1) Déterminer le rang de A.
2) A est-elle diagonalisable ?

Ind :

1) Etudier les lignes de A.
2) Ecrire le système $AX = \lambda X$ pour déterminer les valeurs propres de A et la dimension du sous-espace propre associé.

1) On note $L_1, ..., L_n$ les lignes de A. Alors $L_1 = L_n$ et $L_2 = L_3 = ... = L_{n-1}$.

   On a donc $rg(A) = rg\left(L_1, ..., L_n\right) = rg\left(L_1, L_2\right)$.

   Or $\left(L_1, L_2\right)$ est libre, donc $\boxed{rg(A) = 2}$

2) On cherche les valeurs propres non nulles de A (si elles existent).

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à quelle condition $AX = \lambda X$ possède une solution non nulle. Le système s'écrit $(S): \begin{cases} x_1 + ... + x_n = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!], x_1 + 2x_n = \lambda x_i \\ x_1 + ... + x_n = \lambda x_n \end{cases}$.

   Ceci équivaut à $\begin{cases} x_1 = x_n \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!], \dfrac{3x_1}{\lambda} = x_i \\ \left(2 - \lambda + 3\dfrac{n-2}{\lambda}\right) x_1 = 0 \end{cases}$. On résout $\left(2 - \lambda + 3\dfrac{n-2}{\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3(n-2) = 0$

   Le discriminant est alors $\Delta = 4 + 12(n-2) > 0$. Il y a donc deux solutions distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non nulles (car leur produit vaut $-3(n-2) \neq 0$). α, β sont valeurs propres de A (le système (S) admet alors au moins une solution $X \neq 0$).

   On a donc $\dim\left(\ker(A)\right) + \dim\left(\ker(A - \alpha I_n)\right) + \dim\left(\ker(A - \beta I_n)\right) \geq n - 2 + 1 + 1 = n$.

   Or $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\left(\ker(A - \lambda I_n)\right) \leq n$ donc $Sp(A) = \{0, \alpha, \beta\}$ et $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 9 (oral CCINP 23, Mathilde,2) : on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \left\{M(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

1) Soit $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2 et exprimer $M(a,b,c)$ avec J, J^2, I_3.
2)
   a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et en trouver une base et la dimension.
   b) Montrer que le produit de deux matrices de E appartient à E.
3) Montrer que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.
4) Montrer que $M = M(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de celles de J.
5) Montrer que $Sp(M) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow b = c$.

Ind :

2) a) Montrer $E = Vect\left(I_3, J, J^2\right)$ et en déduire que c'est un espace vectoriel.

b) Utiliser la première question et calculer J^3.

3) Calculer le polynôme caractéristique.

4) Utiliser 1) et la diagonalisation de J effectuée au 3).

5) Calculer $1 + j + j^2$ et procéder avec soin par double implication.

1) $J = M(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(0,0,1)$.

Donc on a directement $\boxed{M(a,b,c) = a\,I_3 + b\,J + c\,J^2}$

2) a) $E = \left\{M(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{a\,I_3 + b\,J + c\,J^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = Vect\left(I_3, J, J^2\right)$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et $\left(I_3, J, J^2\right)$ est génératrice de E.

Par ailleurs, elle est libre (si $aI_3 + b\,J + c\,J^2 = 0$; alors $M(a,b,c) = 0$ donc $a = b = c = 0$). Donc $\boxed{\left(I_3, J, J^2\right) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = 3}$

b) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$.

On calcule $M(a,b,c).M(a',b',c') = \left(a\,I_3 + b\,J + c\,J^2\right)\left(a'\,I_3 + b'J + c'J^2\right)$.

Or $J^3 = I_3$, $J^4 = J$, donc $M(a,b,c).M(a',b',c') \in Vect\left(I_3, J, J^2\right) = E$.

Donc $\boxed{\text{le produit de deux matrices de } E \text{ appartient à } E}$

3) On calcule $\chi_J = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ (les solutions de $z^3 = 1$ sont les racines troisièmes de 1, à savoir 1, $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ et $j^2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right)$)

Donc $\boxed{Sp(J) = \left\{1, j, j^2\right\}}$. J possède 3 valeurs propres complexes distinctes et $J \in M_3(\mathbb{C})$ donc J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

4) Soit $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ telles que $J = P\,D\,P^{-1}$. Alors $J = P\,D^2\,P^{-1}$

Donc si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $M(a,b,c) = a\,I_3 + b\,J + c\,J^2 = P\left(a\,I_3 + b\,D + c\,D^2\right)P^{-1}$

Donc $M(a,b,c)$ est semblable à $D(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$

Donc $M = M(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\boxed{Sp\left(M(a,b,c)\right) = \left\{a+b+c, a+jb+j^2c, a+j^2b+jc\right\}}$

5) On suppose $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $Sp(M)\subset\mathbb{R}$. Alors $z=a+jb+j^2c\in\mathbb{R}$ et $a+j^2b+jc\in\mathbb{R}$.

On a donc $\overline{z}=z$. Or $\overline{j}=\exp\left(\dfrac{-2i\pi}{3}\right)=j^2$, donc $\overline{z}=a+j^2b+jc$.

Donc $a+jb+j^2c=a+j^2b+jc$ et en soustrayant, $\left(j^2-j\right)c=(j^2-j)b$.

Donc comme $j\neq j^2$ (les racines troisièmes de 1 sont distinctes), on a bien $b=c$.

Réciproquement, si $b=c$, alors $a+bj+cj^2=a+bj^2+cj=a+b(j+j^2)=a-b\in\mathbb{R}$ (on sait en effet que $1+j+j^2=0$). On a donc bien $\boxed{Sp(M)\subset\mathbb{R}\Leftrightarrow b=c}$

Exercice 10 (Oral IMT 24, Charline,3) : soit $n\geq 2$, $A\in M_n(K)$ et $u:M\mapsto M-Tr(M)A$, avec $M\in M_n(K)$
.

1) Montrer que u est un endomorphisme.
2) Déterminer les éléments propres de u.
3) u est-elle diagonalisable ?

Ind :

1) Sans difficulté.
2) Procéder par analyse et synthèse pour résoudre $u(M)=\lambda M$.
3) Distinguer plusieurs cas. Séparer notamment le cas $Tr(A)=0$.

1) Tout d'abord, on a bien $u:M_n(K)\to M_n(K)$.
De plus, si $\alpha,\beta\in K$ et $M,N\in M_n(K)$, alors $u\left(\alpha M+\beta N\right)=\alpha M+\beta N-Tr\left(\alpha M+\beta N\right)A$.
Donc par linéarité de la Trace, $u\left(\alpha M+\beta N\right)=\alpha u\left(M\right)+\beta u\left(N\right)$ et u est linéaire.
Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } M_n(K)}$.

2) Soit $\lambda\in K$. On procède par analyse et synthèse.
On suppose que λ est valeur propre de u. Soit alors $M\neq 0$ tel que $u(M)=\lambda M$.
Alors $\lambda M=M-Tr(M)A$, donc $(\lambda-1)M=-Tr(M)A$.
Si $\lambda\neq 1$, alors $M=\dfrac{Tr(M)}{1-\lambda}A$, donc on a nécessairement $M=\alpha A$, avec $\alpha=\dfrac{Tr(M)}{1-\lambda}\in K$.
Réciproquement, si $M=\alpha A$, alors $u(M)=u(\alpha A)=(1-Tr(A))M$, donc $\lambda=1-Tr(A)$
On a donc $Sp(u)\subset\{1,1-Tr(A)\}$.
De plus, si $tr(A)\neq 0$, alors $\lambda=1-Tr(A)\in Sp(u)$ et $E_\lambda(A)=Vect(A)$ (2).

- $\boxed{\text{Si } tr(A)\neq 0}$, $A\neq 0$, donc $u(M)=M\Leftrightarrow Tr(M)=0$.

Or $Tr:M_n(K)\to K$ est une forme linéaire non nulle ($Tr(I_n)\neq 0$), donc son noyau est un hyperplan.
Ainsi, $1\in Sp(u)$ et $E_1(u)=\ker(Tr)$, avec $\dim E_1(u)=n^2-1>0$ car $n\geq 2$.
Enfin, avec (2), on conclut : $\boxed{Sp(u)=\{1,1-Tr(A)\},\ E_1(u)=\ker(Tr) \text{ et } E_{1-Tr(A)}(A)=Vect(A)}$

- $\boxed{\text{Si } Tr(A)=0, \text{ et } A\neq(0)}$, alors $\boxed{Sp(u)=\{1\},\text{ et } E_1(u)=\ker(Tr)}$

- Enfin, $\boxed{\text{si } A=(0), \text{ alors } u=Id_{M_n(K)}, \text{ donc } Sp(u)=\{1\} \text{ et } E_1(u)=M_n(K)}$

3) On revient sur chacun de ces trois cas :
- Si $tr(A)\neq 0$, alors $\dim E_1(u)+\dim\left(E_{1-Tr(A)}(A)\right)=n^2-1+1=n^2$, donc u est diagonalisable.
- Si $Tr(A)=0$, et $A\neq(0)$ alors $Sp(u)=\{1\}$ mais $\dim E_1(u)=n^2-1<n^2$, donc n'est pas diagonalisable.

- Si $A=(0)$, $u = Id_{M_n(K)}$ est diagonalisable (sa matrice dans toute base de $M_n(K)$ est diagonale.

Finalement, $\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si } tr(A)\neq 0 \text{ ou } A=(0)}$

Exercice 11 (Oral Centrale 24, Pauline,4) : soit $n\geq 3$ et $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $B^3 = A$ et $rg(A)=1$

1) Exprimer $Tr(A)$ en fonction de $Tr(B)$.
2) On suppose $Tr(A)=0$. Montrer que B n'est pas diagonalisable.
3) On suppose $Tr(A)\neq 0$. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $\ker(B)=\ker(B^2)$.

Ind :

1) Trigonaliser B et calculer B^3.
2) Utiliser ce qui précède pour montrer que 0 est la seule valeur propre de B.
3) Dans le sens direct, montrer que $rg(B)=rg(B^2)$ après avoir diagonalisé. Dans le sens retour, montrer $\ker(B)=\ker(B^3)$ par double inclusion, puis déterminer γ_B et utiliser $Tr(B)\neq 0$.

1) $B\in M_n(\mathbb{R})\subset M_n(\mathbb{C})$, donc B est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, donc semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure T. On considère ainsi $P\in GL_n(\mathbb{C})$, $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & (*)\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, triangulaire supérieure telles que $B=PTP^{-1}$, avec $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in\mathbb{C}$

   Alors $A=B^3=PT^3P^{-1}$, avec $T^3=\begin{pmatrix}\lambda_1^3 & & & (*)\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^3\end{pmatrix}$.

   Alors $rg(A)=rg(T^3)=1$, donc la multiplicité de 0 comme valeur propre de T^3 est supérieure ou égale à $n-1$. Ainsi, au moins $n-1$ coefficients diagonaux de T^3 (qui sont ses valeurs propres) sont nuls.

   Si on note λ le coefficient restant, il vient $Tr(A)=Tr(B^3)=\lambda^3=\left(Tr(B)\right)^3$.

   Il vient donc $\boxed{Tr(A)=\left(Tr(B)\right)^3}$

2) On suppose $Tr(A)=0$. Alors avec les notations précédentes, $\lambda=0$ et B est semblable à

   $T=\begin{pmatrix}0 & & & (*)\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0\end{pmatrix}$, donc $Sp(B)=\{0\}$.

   Dès lors, B est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice nulle, ce qui entraîne $B=0$, puis $A=0$, ce qui est absurde puisque $rg(A)=1$.

   $\boxed{\text{Donc si } Tr(A)=0, \text{ alors } B \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3) On suppose $Tr(A)\neq 0$.

   On prouve par double implication que B est diagonalisable si et seulement si $\ker(B)=\ker(B^2)$.

   $\Rightarrow$ On suppose que B est diagonalisable. On sait tout d'abord que $\ker(B)\subset\ker(B^2)$ est toujours vrai.

   On cherche à montrer que $rg(B)=rg(B^2)$. Ainsi, par théorème du rang, $\dim\left(\ker(B)\right)=\dim\left(\ker(B^2)\right)$ et on aura bien $\ker(B)=\ker(B^2)$

B est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, et B^2 est semblable à $D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$.

On a donc $rg(B) = rg(D) = rg(D^2) = rg(B^2)$ (c'est le nombre de termes non nuls sur la diagonale).

$\Leftarrow$ On suppose $\ker(B) = \ker(B^2)$. On prouve alors $\ker(B) = \ker(B^3)$.

On a directement $\ker(B) \subset \ker(B^3)$. On montre $\ker(B) \supset \ker(B^3)$. Si $X \in \ker(B^3)$, alors $B^2(BX) = 0$, donc $BX \in \ker(B^2) = \ker(B)$, donc $B^2(X) = 0$ et $X \in \ker(B^2) = \ker(B)$.

On a donc bien $\ker(B) = \ker(B^3)$. Dès lors, $rg(B) = rg(B^3) = rg(A) = 1$, donc $\dim(\ker(B)) = n-1$ et $\gamma_B = X^{n-1}(X - Tr(B))$. Donc $Sp(B) = \{0, Tr(B)\}$

Avec 1), comme $Tr(A) \neq 0$, on a $(Tr(B)) \neq 0$, avec $\dim(E_{Tr(B)}(B)) \geq 1$.

Donc $\dim(E_{Tr(B)}(B)) + \dim(E_0(B)) \geq 1 + n - 1 = n$.

Or $\dim(E_{Tr(B)}(B)) + \dim(E_0(B)) \leq n$, donc $\dim(E_{Tr(B)}(B)) + \dim(E_0(B)) = n$.

Donc B est diagonalisable.

On a bien prouvé que $\boxed{\text{si } Tr(A) \neq 0 \text{, alors } B \text{ est diagonalisable si et seulement si } \ker(B) = \ker(B^2)}$.

Exercice 12 (oral Centrale 24, Andréa,5) : soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $w \in L(E)$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $l \in L(E)$, diagonalisable, tel que $w = l^3$.
2) Soient $u, v \in L(E)$, diagonalisables, telles que $u^3 = v^3$. Montrer que $u = v$.

Ind :

1) Se placer dans une base dans laquelle la matrice de w est diagonale et deviner la matrice de l dans cette base.
2) Ecrire la matrice de u puis de u^3 dans une base $B = (e_{1,1}, ..., e_{d_1,1}, ..., e_{1,p}, .., e_{d_p,p})$ de vecteurs propres de E telle que pour $k \in [\![1, p]\!]$, $B_k = (e_{1,k}, ..., e_{d_1,k})$ base de $E_{\lambda_k}(u)$, avec $Sp(u) = \{\lambda_1, .., \lambda_p\}$. Considérer l'endomorphisme induit $v_{E_{\lambda_k^3}(v^3)}$ pour $k \in [\![1, p]\!]$.

1) Soit $w \in L(E)$ diagonalisable. On considère une base B de E telle que $M_B(w) = D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ soit diagonale. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} d_1^{1/3} & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & d_n^{1/3} \end{pmatrix}$ et on prend l tel que $M_B(l) = \Delta$. On constate alors que $M_B(l^3) = (M_B(l))^3 = D = M_B(w)$, donc $w = l^3$.

$\boxed{\text{On a donc bien montré qu'il existe } l \in L(E) \text{, diagonalisable, tel que } w = l^3}$.

2) Soient $u, v \in L(E)$, diagonalisables, telles que $u^3 = v^3$.

Alors quitte à réordonner les vecteurs de la base, on considère une base $B = (e_{1,1}, ..., e_{d_1,1}, ..., e_{1,p}, .., e_{d_p,p})$ de E telle que $M_B(u) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix}$ soit diagonale par blocs, avec $Sp(u) = \{\lambda_1, .., \lambda_p\}$,

où les λ_i sont deux à deux distincts, et pour $k \in [\![1, p]\!]$, $B_k = (e_{1,k}, ..., e_{d_1,k})$ base de $E_{\lambda_k}(u)$, avec $\dim(E_{\lambda_k}(u)) = d_k$.

On a alors $M_B(u^3)=M_B(v^3)=\begin{pmatrix} \lambda_1{}^3 I_{d_1} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p{}^3 I_{d_p} \end{pmatrix}$. On a donc $\chi_{u^3}=\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k^3)^{d_k}$

Comme $x\mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on a pour $i\neq j$, $\lambda_i^3=\lambda_j^3$.

Donc $Sp(v^3)=\left\{\lambda_1^3,..,\lambda_p^3\right\}$, et pour $k\in[\![1,p]\!]$, $\dim\left(E_{\lambda_k^3}(v^3)\right)=d_k=mult\left(\lambda_k^3,\chi_{u^3}\right)$ et $B_k=\left(e_{1,k},...,e_{d_1,k}\right)$ base de $E_{\lambda_k^3}(v^3)$ (ces vecteurs sont une famille libre de $E_{\lambda_k^3}(v^3)$ qui contient d_k vecteurs).

Or v commute avec v^3 donc les sous-espaces propres de v^3 sont stables par v. Comme v est diagonalisable, pour $k\in[\![1,p]\!]$ alors $v_{E_{\lambda_k^3}(v^3)}$ est diagonalisable. Sa matrice une certaine base C_k est alors $\begin{pmatrix} c_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & c_{d_k} \end{pmatrix}$ et $c_1^3=...=c_{d_k}^3=\lambda_k^3$, donc $v_{E_{\lambda_k^3}(v^3)}=\lambda_k Id_{E_{\lambda_k^3}(v^3)}$ et u et v coïncident sur la base B de E, donc $\boxed{u=v}$.

<u>Séance 3 : Mardi 27 Mai</u>

Cours : revoir tout le chapitre 9

Exercice 13 (Oral CCINP 24, Gabrielle,2) : Soit $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère F, sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que toutes les matrices de E sont nilpotentes.

1) Montrer que $F\cap S_n(\mathbb{R})=\{0\}$.
2) Donner la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et montrer que $\dim(F)\leq\dfrac{n(n-1)}{2}$

Ind :

1) Prendre $M\in F\cap S_n(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.
2) Pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$, compter le nombre d'éléments dans une base. Utiliser ensuite la formule de Grassmann.

1) Soit $M\in F\cap S_n(\mathbb{R})$. Alors comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable par théorème spectral. Il existe donc $P\in GL_n(\mathbb{R})$ et $D=\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ diagonale telles que $M=PDP^{-1}$.

   Alors par récurrence, pour $k\in\mathbb{N}$, $M^k=PD^kP^{-1}$ et $D^k=\begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}=P^{-1}M^kP$.

   Or M est nilpotente (puisque $M\in F$), donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $M^k=0$, et ainsi $D^k=0$, donc $d_1=...=d_n=0$ et $D=0$, donc $M=0$.

   L'autre inclusion étant claire, on a bien $\boxed{F\cap S_n(\mathbb{R})=\{0\}}$

2) Une base de $S_n(\mathbb{R})$ est $C=\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right)_{1\leq i\leq j\leq n}$. On peut en effet montrer qu'elle est libre et génératrice de $S_n(\mathbb{R})$ (si $M\in S_n(\mathbb{R}), M=\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}M_{i,j}\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{M_{i,i}}{2}\left(E_{i,i}+E_{i,i}\right)$).

On compte le nombre d'éléments de la base : pour $j=1$, il y en a 1 ($i=1$) ; pour $j=2$, il y en a deux ($i \in \{1,2\}$), et ainsi de suite : pour $j=n$, il y en a n.

On en déduit que $\boxed{\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right)=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}$.

Dès lors, avec la formule de Grassmann et 1), il vient $\dim(F+S_n(\mathbb{R}))=\dim(F)+\dim(S_n(\mathbb{R}))$.

De plus, $F+S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(F+S_n(\mathbb{R})) \leq n^2$ et $\dim(F) \leq n^2-\frac{n(n+1)}{2}$.

Donc $\boxed{\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}}$

Exercice 14 : (oral CCINP 24, Tristan,2) : Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non proportionnelle à I_n, telle que X^2-5X+4 annule S.

1) Montrer que S est diagonalisable et que $Sp(S) \subset \{1,4\}$.
2) Montrer que $Sp(S)=\{1,4\}$.
3) Soit $A=\frac{1}{3}(S+2I_n)$
   a) Montrer que $A^2=S$.
   b) Soit B une matrice définie positive telle que $B^2=S$. Montrer que A et $A+B$ sont définies positives.
   c) Calculer $(A-B)(A+B)$ et en déduire que $A=B$.
4) On suppose que $n=2$. On note $S=\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. On suppose $A^2=S$.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x,y \in \mathbb{R}, u^p x^2+2v^p xy+w^p y^2 \geq 0$.

   On pourra commencer par calculer v,u,w en fonction de a,b,c.
5) Soit $T=\begin{pmatrix} e^u & e^v \\ e^v & e^w \end{pmatrix}$. Montrer que $T \in S_2^+(\mathbb{R})$.

Ind :

1) Utiliser le polynôme annulateur.
2) Vérifier que S ne peut pas posséder une seule valeur propre.
3) a) Faire le calcul.
   b) Calculer $X^T AX$.
   c) Faire la calcul et vérifier que $A+B$ est inversible.
4) Développer avec le binôme et faire apparaître une somme d'identités remarquables.
5) Calculer $X^T T X$ et utiliser un développement en série entière.

1) S est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

   De plus, 1 et 4 sont les racines de X^2-5X+4, polynome annulateur de S. Donc $\boxed{Sp(S) \subset \{1,4\}}$

2) Supposons par l'absurde que $Sp(S) \neq \{1,4\}$. Comme elle est diagonalisable, elle possède donc une unique valeur propre λ. Donc S est semblable, donc égale à λI_n, ce qui est absurde.

   Donc $\boxed{Sp(S)=\{1,4\}}$

3)

   a) On a $A=\frac{1}{3}(S+2I_n)$. On calcule $A^2=\frac{1}{9}(S^2+4S+4I_n)$ (car $S(2I_n)=(2I_n)S$).

   Mais $S^2=5S-4I_n$, donc on a bien $\boxed{A^2=S}$

   b) $Sp(S)=\{1,4\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc S est définie positive.

Soit alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, non nul. Alors $X^T AX = \frac{1}{3}\left(X^T SX + 2\|X\|^2 \right) > 0$.

$\boxed{\text{Donc } A \text{ est définie positive}}$.

De plus, on calcule $X^T(A+B)X = X^T AX + X^T BX > 0$ car A et B sont définies positives.
$\boxed{\text{Donc } A+B \text{ est définie positive}}$

c) On calcule $(A-B)(A+B) = S + AB - BA - S = AB - BA$

On a donc $(A-B)(A+B) = A = \frac{1}{3}\left((S+2I_n)B - B(S+2I_n)\right)$.

Or $BS = B^3 = SB$, donc $\boxed{(A-B)(A+B) = 0}$

Or $A+B$ est définie positive, donc 0 n'est pas valeur propre de $A+B$ qui est donc inversible.
On conclut que $(A-B) = 0$, donc $\boxed{A = B}$

4) On pose $n = 2$, $S = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Comme $A^2 = S$, $\begin{cases} u = a^2 + b^2 \\ v = ab + bc \\ w = b^2 + c^2 \end{cases}$.

Donc pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$, il vient :

$u^p x^2 + 2v^p xy + w^p y^2 = \left(a^2 + b^2\right)^p x^2 + 2\left(ab + bc\right)^p xy + \left(b^2 + c^2\right)^p y^2$.

Donc $u^p x^2 + 2v^p xy + w^p y^2 = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(a^{2k} b^{2p-2k} x^2 + 2xy a^k c^{p-k} b^p + b^{2k} c^{2p-2k} \right)$.

Donc $u^p x^2 + 2v^p xy + w^p y^2 = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(x a^k b^{p-k} + y b^k c^{p-k} \right)^2 \geq 0$.

$\boxed{\text{On a donc bien } \forall x, y \in \mathbb{R}, u^p x^2 + 2v^p xy + w^p y^2 \geq 0}$.

5) Soit $T = \begin{pmatrix} e^u & e^v \\ e^v & e^w \end{pmatrix}$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On calcule

$X^T T X = \langle X, TX \rangle = x\left(e^u x + e^v y\right) + y\left(e^v x + e^w y\right) = x^2 e^u + 2xy e^v + y^2 e^w$.

Avec un développement en série entière :

$X^T T X = x^2 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u^p}{p!} \right) + 2xy \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{v^p}{p!} \right) + y^2 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{w^p}{p!} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(u^p x^2 + 2v^p xy + w^p y^2 \right) \geq 0$ avec 4).

Donc on a bien $\boxed{T \in S_2^+(\mathbb{R})}$

Exercice 15 (Oral CCINP 24, IMT 24, Charline,Marie,3) : soit E un espace euclidien et a un vecteur unitaire fixé dans E. On suppose $\dim(E) = n \geq 2$.
Soit $f \in L(E)$. On suppose $k \neq -1$ et on considère $f : x \mapsto x + k\langle x, a \rangle a$.

1) Montrer que f est autoadjoint.
2) Montrer que f est un automorphisme.
3) Déterminer les éléments propres de f.

1) Soient $x, y \in E$. On calcule $\langle f(x), y \rangle = \langle x + k\langle x, a \rangle a, y \rangle = \langle x, y \rangle + k\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$.

De plus, $\langle x, f(y) \rangle = \langle f(y), x \rangle = \langle y + k\langle y, a \rangle a, x \rangle = \langle x, y \rangle + k\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle = \langle f(x), y \rangle$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est autoadjoint}}$.

2) Soit $x \in \ker(f)$. Alors $x + k\langle x,a\rangle a = 0$, donc $x = -k\langle x,a\rangle a$, puis $\langle x,a\rangle = -k\langle x,a\rangle$.
Donc $(1+k)\langle x,a\rangle = 0$, et comme $k \neq -1$, $\langle x,a\rangle = 0$, donc $x = -k\langle x,a\rangle a = 0_E$.
Donc $\ker(f) = \{0_E\}$ et comme c'est un endomorphisme en dimension finie, $\boxed{f \text{ est un automorphisme.}}$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche quand l'équation $f(x) = \lambda x$ admet une solution $x \neq 0_E$.
$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow x + k\langle x,a\rangle a = \lambda x$. Ceci équivaut à $(1-\lambda)x = k\langle x,a\rangle a$.
Si $\lambda = 1$, l'équation s'écrit $k\langle x,a\rangle a = 0_E$.

- $\boxed{\text{Si } k = 0,\ f = Id_E. \text{ Donc } Sp(f) = \{1\} \text{ et } E_1(f) = E}$.
- Si $k \neq 0$, $f(x) = x \Leftrightarrow \langle x,a\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (Vect(a))^{\perp}$.

Comme $\dim(E) = n \geq 2$, $\dim\left((Vect(a))^{\perp}\right) = n-1 \geq 1$. Donc $1 \in Sp(f)$ et $E_1(f) = (Vect\{a\})^{\perp}$.
Si $\lambda \neq 1$, $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow x = \dfrac{k\langle x,a\rangle}{1-\lambda}a$. Ceci entraîne $x = \alpha\, a$ avec $\alpha = \dfrac{k\langle x,a\rangle}{1-\lambda} \in \mathbb{R}$.
Donc les seuls vecteurs propres possibles associés à $\lambda \neq 1$ sont les $\alpha\, a$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Or $f(\alpha a) = \alpha f(a) = (1+k)(\alpha\, a)$. Donc $\alpha a \in E_{1+k}(f)$.
$\boxed{\text{Donc si } k \neq 0,\ Sp(f) = \{1, 1+k\},\ E_{1+k}(f) = Vect\{a\} \text{ et } E_1(f) = (Vect\{a\})^{\perp}}$.

Exercice 16 (Oral Mines 24, Antoine,3) : Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur.

1) On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ est orthogonal à $\ker(p)$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2) On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ ne sont pas orthogonaux.
Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$.
3) Que vient-on de démontrer ?

Ind :
1) Décomposer $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$.
2) Montrer qu'il existe $x_0 \in \ker(p)^{\perp}$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Im}(p)$ et vérifier qu'il convient.

1) Soit $x \in E$. On le décompose sous la forme $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$. Alors
$\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \|a\|^2$ et $\|x\|^2 = \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ par Pythagore.
On a donc bien $\boxed{\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|}$

2) On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ ne sont pas orthogonaux. On considère $x \in E$. On le décompose sous la forme $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$. On a alors $p(x) = a$ et $p(x) = x - b$.
Si on prend $x_0 \in \ker(p)^{\perp}$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Im}(p)$, on aura avec Pythagore $\|p(x_0)\|^2 = \|x_0\|^2 + \|b\|^2$. Or $b \neq 0_E$ (sinon $p(x_0) = x_0$ et $x_0 \in \mathrm{Im}(p)$), donc on a bien $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$.
Il reste à vérifier qu'il existe un tel x_0, c'est-à-dire que $\ker(p)^{\perp} \not\subset \mathrm{Im}(p)$.
On suppose par l'absurde que $\ker(p)^{\perp} \subset \mathrm{Im}(p)$.
Comme $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et $\ker(p)^{\perp} \oplus \ker(p) = E$, on sait que $\dim\left(\ker(p)^{\perp}\right) = \dim(\mathrm{Im}(p))$.
On a donc $\ker(p)^{\perp} = \mathrm{Im}(p)$, donc $\mathrm{Im}(p)$ est orthogonal à $\ker(p)$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{En prenant } x_0 \in \ker(p)^{\perp} \text{ tel que } x_0 \notin \mathrm{Im}(p), \text{ on a } \|p(x_0)\| > \|x_0\|}$.

3) On vient de montrer $\boxed{\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\| \Leftrightarrow \ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)}$, c'est-à-dire que
$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\| \Leftrightarrow p$ est un projecteur orthogonal

Exercice 17 (Oral Mines 24, Madeleine,4) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une application $a : [\![1,n]\!] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que les $(a(i))_{1\le i\le n}$ soient deux à deux distincts.

On considère $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j \in [\![1,n]\!], M_{i,j} = \dfrac{1}{a(i)+a(j)}$.

1) Dans cette question, on suppose $\forall i \in [\![1,n]\!], a(i) = i$. Montrer que M est diagonalisable et à valeurs propres strictement positives.
2) Mêmes questions dans le cas général.

On pourra utiliser un produit scalaire et $\dfrac{1}{i+j} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-1}dt$ pour $i,j \in [\![1,n]\!]$.

Ind :

1) Calculer $X^T MX$ pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et faire apparaître l'intégrale d'une fonction positive.
2) Procéder de même. Pour obtenir $X^T MX > 0$ lorsque $X \neq 0$, poser $A = \{i \in [1,n], x_i \neq 0\}$ et considérer $a(j) = \min\{a(i), i \in A\}$.

1) En premier lieu, M est symétrique réelle, donc par théorème spectral, $\boxed{\text{elle est diagonalisable}}$.

De plus, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul. On cherche à calculer $X^T MX$ et à montrer $X^T MX > 0$.

Il vient $X^T MX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-1} \right) dt$.

Donc $X^T MX = \displaystyle\int_0^1 t \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i-1} t^{j-1} \right) dt = \int_0^1 t \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt \ge 0$ (car la fonction sous l'intégrale est positive et que les bornes sont dans le « bon sens ».

De plus, si $X^T MX = 0$, on considère $h : t \mapsto t\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2$. Elle est positive et continue, donc comme l'intégrale est nulle, il vient $\forall t \in [0,1], t\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 = 0$, donc $\forall t \in]0,1], \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} t^i = 0$.

On obtient ainsi un polynôme ayant une infinité de racines, et il vient $X = 0$, ce qui est absurde.

On a donc bien $X^T MX > 0$ pour X non nul.

$\boxed{\text{Donc les valeurs propres de } M \text{ sont strictement positives}}$.

2) On suppose maintenant $\forall i,j \in [\![1,n]\!], M_{i,j} = \dfrac{1}{a(i)+a(j)}$.

M est symétrique réelle, donc par théorème spectral, $\boxed{\text{elle est diagonalisable}}$.

On calcule de même $X^T MX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{a(i)+a(j)-1} dt = \int_0^1 t \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{a(i)-1} \right)^2 dt \ge 0$.

Si $X^T MX = 0$, on a de même $\forall t \in]0,1], \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{a(i)-1} = 0$.

Soit $A = \{i \in [1,n], x_i \neq 0\} \neq \varnothing$.

On prend $a(j) = \min\{a(i), i \in A\}$ (c'est ainsi la plus petite valeur des $a(i)$ pour lesquels $x_i \neq 0$).

Alors $\forall t \in]0,1], \dfrac{1}{t^{a(j)-1}} \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{a(i)-1} = 0$, donc $\forall t \in]0,1], \displaystyle\sum_{i \in J} x_i t^{a(i)-a(j)} = 0$. Comme les $(a(i))_{1\le i\le n}$ sont deux à deux distincts, on a $a(j) < a(i)$ pour $j \in J \setminus \{i\}$

On prend la limite quand x tend vers 0 : $x_j = 0$. C'est absurde.

On a donc bien $X^T MX > 0$ pour X non nul.

$\boxed{\text{Donc les valeurs propres de } M \text{ sont strictement positives}}$

Exercice 18 (oral Mines 24, Nassim,5) : soit E un plan vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ \rangle$.

1) Soient p,q deux projecteurs orthogonaux, non nuls et distincts de l'identité. Soit $u = p+q$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,2]$ tel que $Sp(u) = \{\alpha, 2-\alpha\}$.
2) Montrer que si u est un endomorphisme autoadjoint qui vérifie $Sp(u) = \{\alpha, 2-\alpha\}$, avec $\alpha \in [0,2]$, alors il existe p,q deux projecteurs orthogonaux tels que $u = p+q$.

Ind :

1) Montrer que $u \in S_2^+(\mathbb{R})$, puis déterminer $Tr(u)$ en faisant un lien entre le rang d'un projecteur et sa trace.
2) Chercher à écrire la matrice diagonale de u dans une base orthonormée bien choisie comme somme de deux matrices de projecteurs orthogonaux de rang 1, donc de trace égale à 1. Remarquer que ces matrices de projecteurs orthogonaux doivent être symétriques et traduire les conditions recherchées à l'aide des coefficients.

1) Comme p,q sont deux projecteurs orthogonaux, ils sont autoadjoints. Soient $x,y \in E$. Alors $\langle u(x),y\rangle = \langle p(x),y\rangle + \langle q(x),y\rangle = \langle x,p(y)\rangle + \langle x,q(y)\rangle = \langle x,u(y)\rangle$.
   Donc $u = p+q$ est autoadjoint, donc diagonalisable. De plus, $Sp(p) = Sp(q) = \{0,1\} \subset \mathbb{R}_+$ donc $p,q \in S_2^+(\mathbb{R})$ et pour $x \in E$, $\langle u(x),x\rangle = \langle p(x),x\rangle + \langle q(x),x\rangle \geq 0$.
   Donc $u \in S_2^+(\mathbb{R})$ et $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$.
   Enfin, $Tr(u) = Tr(p) + Tr(q)$.
   Or $\dim(E) = 2$ et comme $p \neq 0_{L(E)}$, $rg(p) \neq 0$. Si de plus $rg(p) = 2$, p est bijective et comme $p \circ p = p$, $p^{-1} \circ p \circ p = p^{-1} \circ p$, donc $p = Id_E$, ce qui est exclu.
   Donc $rg(p) = 1$ et dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$, il vient $M_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $Tr(p) = rg(p) = 1$ et de même, $Tr(q) = 1$. Donc $Tr(u) = 2$. Dès lors, si α, β sont les valeurs propres (positives) de u, on doit avoir $\alpha + \beta = 2$, donc $\beta = 2-\alpha$, avec $\alpha \in [0,2]$.
   $\boxed{\text{Donc il existe } \alpha \in [0,2] \text{ tel que } Sp(u) = \{\alpha, 2-\alpha\}}$.

2) Soit u un endomorphisme autoadjoint qui vérifie $Sp(u) = \{\alpha, 2-\alpha\}$, avec $\alpha \in [0,2]$. Alors par théorème spectral, il existe une base orthonormée B telle que $M_B(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} = A$. On cherche p,q deux projecteurs orthogonaux tels que $u = p+q$. p,q doivent être autoadjoints. Comme B est orthonormée, $M_B(p)$ et $M_B(q)$ doivent être symétriques réelles.
   De plus, au vu de la première question, on choisit de chercher $p,q \notin \{0_{L(E)}, Id_E\}$. On a alors comme au 1) $Tr(p) = rg(p) = 1$ et $Tr(q) = 1$.
   On cherche donc $M_B(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix} = M$ et $M_B(q) = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & 1-c \end{pmatrix} = N$.
   On veut $A = M+N$, $M^2 = M$ et $N^2 = N$.
   On étudie ces conditions. $A = M+N \Leftrightarrow a+c = \alpha$.
   $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b \\ b & (1-a)^2+b^2 \end{pmatrix}$, donc $M^2 = M \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = a \\ (1-a)^2+b^2 = (1-a) \end{cases} \Leftrightarrow a^2+b^2 = a$.
   De même, $N^2 = N \Leftrightarrow c^2+b^2 = c$.
   On constate que c'est la même condition et on choisit $a = c = \dfrac{\alpha}{2}$.
   On doit avoir $a^2+b^2 = a \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{\alpha}{4}(2-\alpha)$. Or $\alpha \in [0,2]$, donc $\dfrac{\alpha}{4}(2-\alpha) \geq 0$.

$\boxed{\text{On prend } b=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\ ,\ a=c=\frac{\alpha}{2}\ ,\ M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix} \text{ et } N=\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & 1-c \end{pmatrix}}$.

On a bien $A=M+N$, $M^2=M$ et $N^2=N$. On note p,q les endomorphismes de E tels que $M_B(p)=M$ et $M_B(q)=N$. Ce sont des projecteurs, et comme B est orthonormée, ce sont des endomorphismes autoadjoints car leurs matrices dans B sont symétriques.

$\boxed{\text{Donc } p,q \text{ sont des projecteurs orthogonaux tels que } u=p+q}$.

Séance 4 : Mercredi 4 Juin

Cours : revoir tout le chapitre 11

Exercice 19 (Oral IMT 23, Bastien N,3) : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associée à A. Avec le moins de calculs possibles, déterminer $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$, les valeurs propres et vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

Ind : déterminer le rang avec les colonnes, puis une base du noyau. Observer les colonnes pour lesquelles tous les coefficients non diagonaux sont nuls. Utiliser la trace pour trouver la dernière valeur propre complexe α et déterminer un vecteur propre associé.

Notons $B=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et (C_1,C_2,C_3,C_4,C_5) les colonnes de A.

Alors (C_1,C_2,C_3) est libre et $C_2=C_4$, $C_1=C_5$, donc $rg(f)=rg(A)=3$.

On a alors $\boxed{\mathrm{Im}(f)=Vect(C_1,C_2,C_3)}$

Par théorème du rang, $\dim(Ker(f))=2$. Or $f(e_1)=f(e_5)$ et $f(e_2)=f(e_4)$.

Donc (e_1-e_5,e_2-e_4) est une famille libre de deux vecteurs de $\ker(f)$.

Donc $\boxed{(e_1-e_5,e_2-e_4) \text{ est une base de } \ker(f)}$

En outre, on remarque que $A.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et que $A.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $1\in Sp(A)$, $e_3,e_2\in Ker(A-I_5)$ et $mult(1,\chi_A)\geq 2$.

Comme $\dim(Ker(A))=2$, on a déjà trouvé 4 valeurs propres de A avec leur multiplicité.

Donc si on note α la dernière valeur propre (à priori complexe) de A, alors $Tr(A)=1+1+\alpha=4$. Donc $\alpha=2$.

Alors $A-2I_5=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, avec en regardant les colonnes $(A-2I_5)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $u=e_1+3e_2+2e_3+e_4+e_5\in\ker(A-2I_5)$.

Dès lors, $\dim(Ker(A))+\dim(Ker(A-I_5))+\dim(Ker(A-2I_5))\geq 2+2+1=5$.

Or $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq 5$, donc $\boxed{Sp(A)=\{0,1,2\}}$

$\dim\left(Ker(A)\right)+\dim\left(Ker(A-I_5)\right)+\dim\left(Ker(A-2I_5)\right)=5$ donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

En outre, $\dim\left(Ker(A-I_5)\right)=2$ et $\boxed{(e_3,e_2) \text{ est une base de } Ker(A-I_5)}$

Enfin, $\boxed{u=e_1+3e_2+2e_3+e_4+e_5 \text{ est une base de } \ker(A-2I_5)}$

Exercice 20 (oral CCINP 24, Nassim,2) :

Pour $A,B \in M_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire usuel donné par $\langle A,B\rangle = tr\left(A^T B\right)$.

On pose $E(A)=\left\{M \in M_n(\mathbb{R}), AA^T = MM^T\right\}$. 0_n est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Déterminer $E(I_n)$.
2) Montrer que si $M \in E(0_n)$, alors $\|M\|^2=0$. Que vaut $E(0_n)$?
3) Pour cette question, on suppose $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E(A)=\left\{AP, P \in O_n(\mathbb{R})\right\}$.
4) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $AA^T \in S_n(\mathbb{R})$. En déduire que AA^T est semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs.
5) Montrer que $E(A)$ contient toujours un élément de $S_n^+(\mathbb{R})$.

Ind :

1) Utiliser la définition de matrice orthogonale.
2) Utiliser $tr(M^T M)=tr(MM^T)$.
3) Faire une double inclusion. Dans le sens $\subset$, poser $P=A^{-1}M$.
4) Montrer que $AA^T \in S_n^+(\mathbb{R})$.
5) Considérer la racine carrée d'une matrice symétrique positive.

1) $\boxed{E(I_n)=\left\{M \in M_n(\mathbb{R}), I_n = MM^T\right\}=O_n(\mathbb{R})}$

2) Soit $M \in E(0_n)$. Alors $MM^T=0$. Donc $\langle M,M\rangle = tr(M^T M)=tr(MM^T)=tr(0_n)=0$ et on a bien $\|M\|^2=0$, donc $M=0$. Donc $\boxed{E(0_n)=\{0_n\}}$

3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On prouve que $E(A)=\left\{AP, P \in O_n(\mathbb{R})\right\}$ par double inclusion.

   Si $P \in O_n(\mathbb{R})$, on calcule $(AP)(AP)^T = APP^T A^T = AA^T$ puisque $PP^T = I_n$.

   On a donc bien $AP \in E(A)$.

   Réciproquement, soit $M \in E(A)$. Montrons que $M=AP$, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$.

   On pose $P=A^{-1}M$. Ainsi, on a bien $M=AP$.

   On calcule $P^T = M^T\left(A^T\right)^{-1}$, donc $PP^T = A^{-1}MM^T\left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}AA^T\left(A^T\right)^{-1}=I_n$.

   Donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ et on a bien $\boxed{E(A)=\left\{AP, P \in O_n(\mathbb{R})\right\}}$

4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $\left(AA^T\right)^T = AA^T$, donc $AA^T \in S_n(\mathbb{R})$ et par théorème spectral, comme elle est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

   De plus, si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AA^T X = \left(A^T X\right)^T A^T X = \left\|A^T X\right\|^2 \geq 0$.

   Donc $AA^T \in S_n^+(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont donc positives.

   Donc $\boxed{AA^T \text{ est semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs}}$.

5) On prend $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on pose $S = AA^T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Avec 4), soient $P \in O_n(\mathbb{R})$, D, matrice diagonale à coefficients positifs telles que $S = PDP^T$. Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$.

Alors soit $M = P\Delta P^T$. On constate que $M^T = M$ et que $Sp(M) = Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}_+$.
Donc $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. De plus, $MM^T = M^2 = S = AA^T$, donc $\boxed{M \in E(A) \cap S_n^+(\mathbb{R})}$

Exercice 21 (oral CCINP 23, Samuel,3) : pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.
Soit $\| \ \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \le \| A \| \| B \|$.

1) Donner une matrice non nulle admettant uniquement 0 comme valeur propre. Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ n'est pas une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
2)
   a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle. Montrer que $XX^T \in M_n(\mathbb{C})$ et calculer ses coefficients diagonaux.
   b) Montrer que $\rho(A) \le \|A\|$. On pourra montrer que pour $\lambda \in Sp(A), \exists X \ne 0, AXX^T = \lambda XX^T$
3) On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\| = \max\limits_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$. On admet que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \le \| A \| \| B \|$.
4) Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall i, j \in [\![1, n]\!], S_{i,j} = \dfrac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$ et $S_{i,j} = 0$ sinon.
   Montrer que si λ est valeur propre complexe de S, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\exists \theta \in [0, \pi], \lambda = \cos\theta$.
5) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix}$. Calculer SX_k et en déduire les valeurs propres de S.

Ind :
1) Prendre une matrice triangulaire.
2) a) Effectuer le produit matriciel.
   b) Utiliser la définition de valeur propre et $\|AXX^T\|$.
3) Majorer la double somme obtenue en échangeant les deux sommes.
4) Utiliser 2b) et le théorème spectral.
5) Déterminer une expression de $\sin(a) + \sin(b)$ et montrer que les valeurs propres obtenues sont bien distinctes.

1) On prend $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}}$ triangulaire, avec tous ses termes diagonaux nuls et les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale non nuls (égaux à 1 par exemple).
Les éléments diagonaux sont alors les valeurs propres et $Sp(M) = \{0\}$.
Si par l'absurde $A \mapsto \rho(A)$ était une norme sur $M_n(\mathbb{C})$, alors on aurait $\rho(M) = 0 \Rightarrow M = (0)$, ce qui n'est pas le cas avec l'exemple précédent. Donc $\boxed{A \mapsto \rho(A) \text{ n'est pas une norme sur } M_n(\mathbb{C})}$

2) a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors $X^T \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ et par produit matriciel, $\boxed{XX^T \in M_n(\mathbb{C})}$

De plus, pour $1 \le i, j \le n$, il vient $\left(XX^T\right)_{i,j} = X_i X_j$ donc $\boxed{\left(XX^T\right)_{i,i} = X_i^2}$

b) Soit $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda|$. Alors $,\exists X \neq 0, AX = \lambda X$. Soit un tel X. Alors $AXX^T = \lambda XX^T$
.
On a donc $\left\|AXX^T\right\| = |\lambda|\left\|XX^T\right\|$, avec $\left\|AXX^T\right\| \le \|A\|\left\|XX^T\right\|$, donc $|\lambda|\left\|XX^T\right\| \le \|A\|\left\|XX^T\right\|$.
De plus, comme $X \neq 0$, $\exists i \in [\![1,n]\!], X_i \neq 0$ et donc $\left(XX^T\right)_{i,i} = X_i^2 \neq 0$ donc $\left\|XX^T\right\| \neq 0$.
On a donc $|\lambda| \le \|A\|$ et $\boxed{\rho(A) \le \|A\|}$

3) Soient $A = \left(a_{i,j}\right) \in M_n(\mathbb{C}), B = \left(b_{i,j}\right) \in M_n(\mathbb{C})$. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$. Alors $\left|(AB)_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right|$

Donc $\left|(AB)_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right|$, donc $\|AB\| = \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right|\right)$.

Or $\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|b_{k,j}\right| \le \|A\|\|B\|$. Donc on a bien $\boxed{\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \le \| A \| \| B \|}$

4) On a ici $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, donc avec $\|S\| = \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|S_{i,j}\right|\right) = 1$

Or avcc 2b), on sait que $\rho(A) \le \|A\| = 1$.
Donc si λ est valeur propre complexe de S, alors $|\lambda| \le 1$. En outre, $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc par théorème spectral, toutes ses valeurs propres sont réelles donc $\boxed{\lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \exists \theta \in [0,\pi], \lambda = \cos\theta .}$

5) On calcule $SX_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(0\theta_k) + \sin(2\theta_k) \\ \sin(\theta_k) + \sin(3\theta_k) \\ \vdots \\ \sin((n-1)\theta_k) + \sin((n+1)\theta_k) \end{pmatrix}$.

Or pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a) + \sin(b) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Donc $SX_k = \cos(\theta_k)\begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix} = \cos(\theta_k) X_k$, donc $\boxed{SX_k = \cos(\theta_k) X_k}$

Or pour $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \neq 0$. On en déduit que les $\left(\cos(\theta_k)\right)_{1 \le k \le n}$ sont des valeurs propres de S.
Elles sont distinctes car $\cos$ est injective sur $[0,\pi]$.
Comme il y en a n et que $S \in M_n(\mathbb{C})$, ce sont les seules. Donc $\boxed{Sp(S) = \left\{\cos(\theta_k), k \in [\![1,n]\!]\right\}}$

Exercice 22 (oral Mines 24, Matthias,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = M_n(\mathbb{R})$ et $F = M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $M \in E$ et $X \in F$, $M = (M_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. On note $\|M\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|M_{i,j}|$ et $N(X) = \sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

1) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.
2) Montrer que $\forall A, B \in E, \|AB\| \le \|A\|\|B\|$. Montrer que $\forall (A, X) \in E \times F, N(AX) \le \|A\| N(X)$
3) Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer que $A - I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
4) Soient $(A, B) \in E \times F, \|A\| < 1$. On note la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $X_0 \in F$ et $\forall p \in \mathbb{N}, X_{p+1} = AX_p + B$.
   Montrer que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $U \in F$ qui sera à préciser.

Ind :
1) Vérifier les différentes propriétés.
2) Faire le calcul en utilisant les formules du produit matriciel et en majorant.
3) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A.
4) Itérer le procédé et expliciter X_p en fonction de X_0, A, B. Calculer $(I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$ et étudier sa limite.

1) Soient $M, N, O \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|M + N\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|M_{i,j} + N_{i,j}| \le \|M\| + \|N\|$
- $\|\lambda M\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\lambda M_{i,j}| = |\lambda|\|M\|$
- $\|M\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|M_{i,j}| \ge 0$ et si $\|M\| = 0$, alors $M = 0$.

Donc $\boxed{\| \ \| \text{ est une norme sur } E}$

2) Soient $A, B \in E$. $\|AB\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|(AB)_{i,j}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|A_{i,k}B_{k,j}|$

   Donc $\|AB\| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|A_{i,k}||B_{l,j}| \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|A_{i,k}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|B_{l,j}|\right)$.

   On a donc bien $\boxed{\forall A, B \in E, \|AB\| \le \|A\|\|B\|}$

   Soient $(A, X) \in E \times F$. Alors $N(AX) = \sum_{i=1}^{n}|(AX)_i| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}X_j\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}||X_j|$

   Donc $\boxed{N(AX) \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|\right)\sum_{k=1}^{n}|X_k| \le \|A\| N(X)}$

3) Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Alors on procède par l'absurde que $A - I_n \notin GL_n(\mathbb{R})$.
   Alors 1 est valeur propre de A et $\exists X \ne 0, AX = X$. Soit un tel X.
   Or avec 2), $N(AX) \le \|A\| N(X)$. Donc $N(X) \le \|A\| N(X)$
   Comme $X \ne 0$, $N(X) > 0$ et $1 \le \|A\|$, ce qui est absurde.
   Donc $\boxed{A - I_n \in GL_n(\mathbb{R})}$.

4) On note la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $X_0 \in F$ et $\forall p \in \mathbb{N}, X_{p+1} = AX_p + B$.
   Alors pour $p \in \mathbb{N}$, $X_p = AX_{p-1} + B$ et on itère le procédé.
   Il vient $X_p = A(AX_{p-1} + B) + B$, donc $X_p = A^2X_{p-1} + AB + B = A^3X_{p-3} + (A^2 + A + I_n)B$.

Donc par récurrence, $X_p = A^p X_0 + \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) B$.

Or pour $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq N\left(A^p X_0\right) \leq \left\|A^p\right\| N\left(X_0\right) \leq \|A\|^p N\left(X_0\right)$ avec 2). On a en effet $\left\|A^2\right\| \leq \|A\|^2$ et par récurrence, $\left\|A^p\right\| \leq \|A\|^p$ en utilisant $\forall A, B \in E, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Mais $0 \leq \|A\| < 1$, donc $\|A\|^p \underset{p \to +\infty}{\to} 0$ et par encadrement, $N\left(A^p X_0\right) \underset{p \to +\infty}{\to} 0$, donc $A^p X_0 \underset{p \to +\infty}{\to} 0$.

De plus, $(I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) = I_n - A^p$ car la somme est télescopique.

Comme $\|A\|^p \underset{p \to +\infty}{\to} 0$, $A^p \underset{p \to +\infty}{\to} 0$, donc $(I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) \underset{p \to +\infty}{\to} I_n$.

Or $M \mapsto (I_n - A)^{-1} M$ est linéaire en dimension finie, donc continue de E dans E.

Donc $(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) \underset{p \to +\infty}{\to} (I_n - A)^{-1}$. Donc $\sum_{k=0}^{p-1} A^k \underset{p \to +\infty}{\to} (I_n - A)^{-1}$.

Or $M \mapsto MB$ est linéaire de E dans F, donc continue. Donc $\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) B \underset{p \to +\infty}{\to} (I_n - A)^{-1} B$.

Donc $\boxed{X_p = A^p X_0 + \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) B \underset{p \to +\infty}{\to} (I_n - A)^{-1} B = U}$

Exercice 23 (oral Mines 21,Centrale 24, Nassim,5) : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1) Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?
2) Soit $C = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Ind :

1) Supposer B diagonalisable. Montrer que A est alors diagonalisable et que B est semblable à $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec D diagonale et inversible. Si b est canoniquement associé à B, trouver un plan stable par b et obtenir une absurdité.
2) Procéder par double implication. Dans le sens direct, calculer C^2 et conclure. Dans le sens retour, montrer que C et $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables, puis que $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en trouvant une base de vecteurs propres (ou en considérant les restrictions de l'endomorphisme canoniquement associé à des plans stables).

1) Supposons que B est diagonalisable. Soit alors b canoniquement associé à B. On note $C = \left(e_1, \ldots, e_{2n}\right)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. On constate que $V = Vect\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ est stable par b.

   Comme b est diagonalisable, l'endomorphisme induit b_V l'est aussi et donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

   Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.

   On constate alors que $B = \begin{pmatrix} P D P^{-1} & P D P^{-1} \\ 0 & P D P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$.

   Or $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{C})$, et $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, donc B et $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ dont semblables, et comme B est diagonalisable, $N = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ l'est aussi.

Or $A \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $Sp(D) = Sp(A) \subset \mathbb{C}^*$.

On note $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & (0) & d_1 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & d_n & (0) & & d_n \\ 0 & & & d_1 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & (0) & & d_n \end{bmatrix}$.

Notons $C' = (u_1, ..., u_{2n})$ une base de $\mathbb{C}^{2n}$ telle que $M_{C'}(b) = N$.

Alors $W = Vect(u_1, u_{n+1})$ est un plan stable par b et comme b est diagonalisable, l'endomorphisme induit b_W l'est aussi. Donc sa matrice dans (u_1, u_{n+1}) l'est aussi. Or elle est égale à $\begin{pmatrix} d_1 & d_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable puisque $d_1 \neq 0$ (sinon, elle serait égale à $d_1 I_2$, ce qui n'est pas le cas).

$\boxed{\text{C'est donc absurde et } B \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

2) On procède par double implication.

Si C est diagonalisable, $C^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable (si on prend $P \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $C = P\,D\,P^{-1}$, alors $C^2 = P\,D^2\,P^{-1}$ est semblable à D^2, donc diagonalisable).

De même qu'au 1), on conclut que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

Si A est diagonalisable, on prend $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.

Il vient alors $C = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, donc C et $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables. Il reste à montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

On note $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & (0) & d_1 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & (0) & & d_n \\ 1 & & & 0 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & (0) & & 0 \end{bmatrix}$.

On résout $M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \begin{cases} d_k x_{n+k} = \lambda x_k \\ x_k = \lambda x_{n+k} \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \begin{cases} (d_k - \lambda^2) x_{n+k} = 0 \\ x_k = \lambda x_{n+k} \end{cases} \quad (*)$.

Comme $d_k \neq 0$ puisque A est inversible, l'équation $\lambda^2 = d_k$ admet deux racines distinctes λ_k et $-\lambda_k$ dans $\mathbb{C}$. Notons $C = (e_1, ..., e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. Soit m canoniquement associé à M.

Alors on pose pour $i \in [\![1,n]\!]$ $U_i = \lambda_i e_i + e_{n+i}$ et $V_i = -\lambda_i e_i + e_{n+i}$. U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, et V_i à la valeur propre $-\lambda_i$

Montrons que $(U_1, .., U_n, V_1, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{C}^{2n}$.

Si $\alpha_1 U_1 + .. + \alpha_n U_n + \beta_1 V_1 + ... + \beta_1 V_n = 0$, alors pour $i \in [\![1,n]\!]$: $\begin{cases} \alpha_i \lambda_i - \beta_i \lambda_i = 0 \\ \alpha_i + \beta_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta_i \lambda_i = 0 \\ \alpha_i = -\beta_i \end{cases}$.

Donc comme $\lambda_i \neq 0$, $\alpha_i = \beta_i = 0$ et $(U_1,..,U_n,V_1,...,V_n)$ est libre, contient $2n$ vecteurs donc est une base de $\mathbb{C}^{2n}$, constituée de vecteurs propres de m.
Donc m et M sont diagonalisables, et ainsi C l'est aussi.
On a donc bien prouvé que $\boxed{C \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable}}$

Exercice 24 (Oral Centrale 1 23, Bastien N,5) : soit $A \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} Tr(A^n) = 0$. Montrer que le module des valeurs propres de A est strictement inférieur à 1.

Ind : trigonaliser A et calculer $tr\left(A^{n+j}\right)$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Ecrire matriciellement le système obtenu et montrer que la matrice qui intervient est inversible, puis étudier la limite.

On sait que A est trigonalisable que $\mathbb{C}$ et qu'il existe une matrice $T \in M_p(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et une matrice $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Alors par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$
On note $\lambda_1,...,\lambda_k$ les valeurs propres complexes distinctes de A, et $\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.
Si $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$, alors $T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & & & \\ & \ddots & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_k{}^n \end{pmatrix}$, donc deux matrices semblables ayant même trace, on obtient $tr\left(A^n\right) = tr\left(T^n\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i{}^n$. Alors pour $0 \leq j \leq k-1$, $tr\left(A^{n+j}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i{}^n \lambda_i{}^j$.

Donc si on note $V = V_k(\lambda_1,...,\lambda_k) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & & & \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1{}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_k \lambda_k{}^n \end{pmatrix}$ et $Y_n = \begin{pmatrix} tr(A^n) \\ \vdots \\ \vdots \\ tr(A^{n+k-1}) \end{pmatrix}$

alors on a directement $V^T X_n = Y_n$. Mais $\lambda_1,...,\lambda_k$ sont distinctes, donc la matrice de Vandermonde V est inversible et V^T aussi. Ainsi, $X_n = \left(V^T\right)^{-1} Y_n$. Or $Y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (coordonnée par coordonnée).
Donc comme $Y \mapsto \left(V^T\right)^{-1} Y$ est continue (car linéaire en dimension finie), avec la caractérisation séquentielle, on peut affirmer que $X_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Avec la convergence coordonnée par coordonnée, puisque $\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, on conclut que $\forall i \in [\![1,k]\!], \lambda_i{}^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc $\boxed{\text{le module des valeurs propres de } A \text{ est strictement inférieur à 1}}$.

<u>Séance 5 : Jeudi 12 Juin</u>

Exercice 25 : (oral IMT 24, Victor,2). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1) M est-elle diagonalisable ?
2) Déterminer ses valeurs propres. A quelle matrice est-elle semblable ?
3) Déterminer les sous-espaces propres de M .

Ind :
1) A faire en une ligne.
2) Déterminer le rang de M et utiliser la trace.

3) Deviner des vecteurs qui conviennent ou à défaut savoir écrire et résoudre le système $MX = \lambda X$ si $\lambda \in Sp(M)$

1) $\boxed{M \text{ est symétrique réelle, donc par théorème spectral, elle est diagonalisable}}$.

2) Toutes les colonnes de M sont identiques et non nulles, donc $rg(M) = 1$ et par théorème du rang, $\dim(\ker(M)) = n-1$. Donc la multiplicité de 0 comme valeur propre de M est au moins égale à $n-1$ et $\gamma_M = X^{n-1}(X-b) = X^n - bX^{n-1}$, avec $b = Tr(M)$ (on connait le coefficient en X^{n-1} de γ_M).
Donc $\boxed{\gamma_M = X^{n-1}(X-n)}$

On en déduit que $\boxed{Sp(M) = \{0,n\}}$, avec $\dim(E_0(M)) = n-1$ et $\dim(E_n(M)) = mult(n,\gamma_M) = 1$ puisque M est diagonalisable.

On a alors $\boxed{M \text{ semblable à } D = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})}$

3) On a vu que $\dim(E_0(M)) = \dim(\ker(M)) = n-1$. On pose $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (plus précisément, pour $j \in [\![2,n]\!]$, $(X_j)_1 = 1$ et pour $i \in [\![2,n]\!]$ $(X_j)_i = -\delta_{i,j}$).
La famille $(X_2,\ldots,X_n)$ est libre et constituée de $n-1 = \dim(E_0(M))$ vecteurs de $E_0(M)$.
Donc $\boxed{(X_2,\ldots,X_n) \text{ est une base de } E_0(M)}$.

Par ailleurs, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $MX = nX$, donc $\boxed{\text{une base de } E_n(M) \text{ est } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 26 (Oral CCINP 24, Elise,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $rg(A) + rg(I_n - A) \geq n$
2) Montrer que $A^2 = A \Leftrightarrow rg(A) + rg(I_n - A) = n$

Ind :

1) Utiliser le théorème du rang et la formule de Grassmann.
2) Procéder par double implication. Considérer a canoniquement associé à A et exploiter le théorème du rang. Dans le sens $\Leftarrow$, montrer que $\ker(a) \oplus \ker(a - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$.

1) On utilise le théorème du rang : $rg(A) + rg(I_n - A) = (n - \dim(\ker(A))) + (n - \dim(\ker(I_n - A)))$.
Donc $rg(A) + rg(I_n - A) = 2n - (\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(I_n - A)))$.
Or $(\ker(A)) \cap \ker(I_n - A) = \{0\}$ (si $X \in \ker(A) \cap \ker(I_n - A)$, alors $AX = X - AX = 0$).
Donc par formule de Grassmann,
$\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(I_n - A)) = \dim(\ker(A) \oplus \ker(I_n - A)) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$.
On a donc bien $\boxed{rg(A) + rg(I_n - A) \geq n}$

2) On procède par double application.
On suppose $A^2 = A$.

Alors si a est canoniquement associé à A, a est un projecteur. On a donc $\ker(a) \oplus \ker(Id_{\mathbb{R}^n} - a) = \mathbb{R}^n$,
donc $rg(A) + rg(I_n - A) = 2n - \left(\dim\left(\ker(A)\right) + \dim\left(\ker(I_n - A)\right)\right) = n$.
On suppose $rg(A) + rg(I_n - A) = n$.
Alors avec le théorème du rang, $\dim\left(\ker(A)\right) + \dim\left(\ker(I_n - A)\right) = n$.
Soit alors a canoniquement associé à A. Il vient $\dim\left(\ker(a)\right) + \dim\left(\ker(a - Id_{\mathbb{R}^n})\right) = n$, donc
$\ker(a) \oplus \ker(a - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$ (ces deux espaces sont en somme directe, et on a une inclusion et l'égalité des dimensions).
Dans une base B adaptée à cette décomposition, il vient $C = M_B(a) = \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & I_r \end{pmatrix}$, donc $C^2 = C$, et
$a^2 = a$, si bien que $A^2 = A$.
On a donc bien montré que $\boxed{A^2 = A \Leftrightarrow rg(A) + rg(I_n - A) = n}$

Exercice 27 (Oral CCINP 24, Simon,3) : soit E un ensemble et f une application de E dans E.

1) Montrer que si f est surjective, alors $f^2 = f \circ f$ l'est aussi.
2) On suppose $f^3 = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Ind :

1) Ecrire la définition.
2) Procéder par double implication. Dans le sens retour, prendre $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, puis $a, a' \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(a') = x'$.

1) Soit $z \in E$. Comme f est surjective, on peut considérer $y \in E$ tel que $f(y) = z$. De même, on peut considérer $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Il vient alors $f \circ f(x) = z$ et $f^2 = f \circ f$ est surjective.
2) On procède par double implication.
On suppose que f est injective. Soit $y \in E$. Alors $f^3(y) = f(y)$, donc comme f est injective, $f \circ f(y) = y$ et y possède $f(y)$ comme antécédent, donc f est surjective.
Réciproquement, on suppose que f est surjective. On veut montrer que f est injective : soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, soient $a, a' \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(a') = x'$. Alors $f \circ f(a) = f \circ f(a')$, donc $f^3(a) = f^3(a')$.
Comme $f^3 = f$, $f(a) = f(a')$, donc $x = x'$ et f est injective.
On a bien montré que $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est surjective}}$

Exercice 28 (oral Centrale 1 2023, Samuel,3) :
Soit $f(x) = \exp(-x^2)$. Pour n entier naturel, x réel, soit $P_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) \exp\left(x^2\right)$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}\left[X\right]$, soit $\left\langle P, Q \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)f(t)\,dt$.

1) Montrer que P_n est polynomiale, de degré n, et que le coefficient dominant de P_n est égal à $2n$
Etudier la parité de P_n.
2) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}\left[X\right]$. Calculer $\left\langle P_n, X^p \right\rangle$ pour $n \geq p$. Montrer que la famille des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire. Calculer $\left\langle P_n, P_n \right\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Ind :

1) Procéder par récurrence et montrer que P_n est de même parité que n.

2) Pour calculer $\left\langle P_n, X^p \right\rangle$, utiliser des intégrations par parties. Pour calculer $\langle P_n, P_k \rangle$ avec $k \le n$, écrire P_k dans la base canonique.

1) On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ $H(n)$: « P_n est polynomiale, de degré n, de coefficient dominant égal à $2n$ et de même parité que n ».

- $H(0)$ est vraie avec $P_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $P_n'(x) = (-1)^n \left(f^{(n+1)}(x)\exp\left(x^2\right) + 2xf^{(n)}(x)\exp\left(x^2\right)\right)$.

  Donc $P_n'(x) = -P_{n+1}(x) + 2xP_n(x)$, donc $\boxed{P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_n'(x)}$

  Or $P_n(x) = 2nx^n + S_n(x)$, avec $\deg(S_n) < n$.

  Donc $P_{n+1}(x) = 2(n+1)x^{n+1} + T_n(x)$, avec $\deg(T_n) < n+1$.

  Donc P_{n+1} est polynomiale, de degré $n+1$, et le coefficient dominant de P_{n+1} est égal à $2(n+1)$.

  Si n est pair, P_n est paire, donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = P_n(x)$ et en dérivant $P_n'(-x) = -P_n'(x)$.

  Donc $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n'(-x) = -P_{n+1}(-x)$ et P_{n+1} est impaire.

  De même si n est impair, P_n est impaire et P_{n+1} est paire.

  Donc $H(n+1)$ est vraie.

$\boxed{P_n \text{ est polynomiale, de degré } n \text{, de coefficient dominant égal à } 2n \text{ et de même parité que } n}$

2) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)f(t)\,dt$. Vérifions que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Tout d'abord, soit $R = PQ \in \mathbb{R}[X]$. Alors par croissance comparée, $R(t)e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable en $+\infty$ et de même en $-\infty$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\langle P, Q \rangle$ existe bien.

De plus, soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ et $\langle , \rangle$ est symétrique.

De plus, $\langle P + \lambda R, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P + \lambda R\right)(t) Q(t) e^{-t^2}\,dt = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle R, Q \rangle$ (toutes les intégrales convergent donc on peut séparer en deux), donc par symétrie, $\langle , \rangle$ est bilinéaire.

En outre, $\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t) e^{-t^2}\,dt \ge 0$. Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors la fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle. Donc $\forall t \in \mathbb{R}, P^2(t)e^{-t^2} = 0$ et P a une infinité de racines, donc $P = 0$ et $\langle , \rangle$ est définie positif. $\boxed{\text{Donc } \langle , \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

Soit $n \ge p$. Alors $\left\langle P_n, X^p \right\rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t) t^p\,dt$

On effectue des intégrations par parties.

$f^{(n-1)}(t)t^p = (-1)^{n-1} t^p P_{n-1}(t)\exp(-t^2) \underset{t\to\pm\infty}{\to} 0$ par croissance comparée.

Donc $\left\langle P_n, X^p \right\rangle = (-1)^{n+1} p \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n-1)}(t) t^{p-1}\,dt$ (et cette nouvelle intégrale converge aussi).

Puis $\left\langle P_n, X^p \right\rangle = (-1)^{n+p} p! \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n-p)}(t)\,dt$.

Si $p<n$, $f^{(n-1-p)}(t) = (-1)^{n-1-p} P_{n-p-1}(t)\exp(-t^2) \underset{t\to\pm\infty}{\to} 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n-p)}(t)\,dt = 0$ et $\left\langle P_n, X^p \right\rangle = 0$.

Si $p=n$, $\boxed{\left\langle P_n, X^n \right\rangle = (-1)^{n+n} n! \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = n!I}$, où $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}}$

Dès lors, si $k<n$, on écrit $P_k = \sum_{p=0}^{k} a_p X^p$ et $\left\langle P_n, P_k \right\rangle = \sum_{p=0}^{k} a_p \left\langle P_n, X^p \right\rangle = 0$.

Si $k>n$, $\left\langle P_n, P_k \right\rangle = \left\langle P_k, P_n \right\rangle = 0$

Donc $\boxed{\text{la famille des } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale}}$.

Enfin, $P_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p + 2nX^n$ avec 1), donc $\left\langle P_n, P_n \right\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \left\langle P_n, X^p \right\rangle + 2n\left\langle X^n, P_n \right\rangle$.

Donc $\boxed{\left\langle P_n, P_n \right\rangle = (2n)n!I}$

Exercice 29 (oral Mines 24,23, Andréa,Chloé,4) : soit $n\in\mathbb{N}^*$ et D l'ensemble des matrices diagonalisables sur $M_n(\mathbb{R})$.

1) D est-il un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
2) Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $V\subset D$. Montrer que $\dim(V) \le \frac{n(n+1)}{2}$. Existe-t-il un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{R})$ inclus dans D tel que $\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}$?

Ind :
1) Prendre deux matrices triangulaires supérieures avec n valeurs propres distinctes telles que la somme de ces deux matrices admet 0 comme unique valeur propre.
2) Considérer l'espace vectoriel T des matrices triangulaires supérieures avec des termes diagonaux nuls. Etudier $T\cap V$. Etudier le cas $V = S_n(\mathbb{R})$: déterminer sa dimension.

1) On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & 2 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & & (1) \\ & -2 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & -n \end{pmatrix}$. A et B sont triangulaires supérieures et possèdent n valeurs propres distinctes, donc elles sont diagonalisables.

Pourtant $A+B = \begin{pmatrix} 0 & & (2) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas : elle possède une seule valeur propre qui est 0, donc si elle était diagonalisable, elle serait semblable, donc égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas.

Donc $A,B\in D$ mais $A+B\notin D$.

$\boxed{D \text{ n'est pas un sous espace vectoriel de } M_n(\mathbb{R})}$.

2) Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $V\subset D$. On considère l'espace vectoriel T des matrices triangulaires supérieures avec des termes diagonaux nuls.

Si $M \in T \cap V$, alors M est diagonalisable et 0 est sa seule valeur propre. Elle est donc semblable à la matrice nulle, donc $M = 0$.
Dès lors, avec la formule de Grassmann, il vient $\dim(T+V) = \dim(T) + \dim(V)$.

Or $\dim(T) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (une base est $\left(E_{i,j}\right)_{1\le i < j\le n}$).

De plus, $T+V \subset M_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(T+V) \le n^2$ et $\dim(V) \le n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\boxed{\dim(V) \le \dfrac{n(n+1)}{2}}$

Enfin, on choisit $V = S_n(\mathbb{R})$. Alors par théorème spectral, toutes les matrices de E sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
De plus, une base de $S_n(\mathbb{R})$ est $C = \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1\le i \le j\le n}$. On peut en effet montrer qu'elle est libre et génératrice de $S_n(\mathbb{R})$ (si $M \in S_n(\mathbb{R}), M = \sum\limits_{1\le i<j\le n} M_{i,j}\left(E_{i,j} + E_{j,i}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{M_{i,i}}{2}\left(E_{i,i} + E_{i,i}\right)$).
On compte le nombre d'éléments de la base : pour $j=1$, il y en a 1 ($i=1$) ; pour $j=2$, il y en a deux ($i \in \{1,2\}$), et ainsi de suite : pour $j=n$, il y en a n.

On en déduit que $\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right) = 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\boxed{\text{Donc on peut avoir } \dim(V) = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ en prenant } V = S_n(\mathbb{R})}$.

Exereice 30 (Oral Mines 24, Cédrine,5) : On considère $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A(AB-BA) = 0$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, (AB)^k = A^k B^k$.
2) Montrer que si $C \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\forall k \in \mathbb{N}^*, tr\left(C^k\right) = 0$, alors C est nilpotente.
3) Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

1) Procéder par récurrence.
2) Montrer que toutes les valeurs propres de C sont nulles et procéder par l'absurde. Exprimer $tr\left(C^k\right)$ à l'aide des valeurs propres distinctes non nulles de C et de leurs multiplicités respectives.
3) Poser $C = AB - BA$ et calculer ses puissances, puis leur trace.

1) On sait que $A(AB-BA) = 0$, donc que $A^2B = ABA$
   On prouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ $H(k)$: "$(AB)^k = A^k B^k$"
   - $H(1)$ est vraie.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $H(k)$ est vraie. On montre $H(k+1)$.
     On calcule $(AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k = ABA^kB^k$.
     Or $ABA^k = ABAA^{k-1} = A^2BA^{k-1}$ et à l'aide d'une nouvelle récurrence, $ABA^k = A^kBA = A^{k+1}B$.
     On a donc bien $(AB)^{k+1} = A^{k+1}B^{k+1}$ et $H(k+1)$ est vraie.

   Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, (AB)^k = A^k B^k}$

2) Puisque $C \in M_n(\mathbb{C})$, on sait qu'elle est trigonalisable. On veut montrer que toutes les valeurs propres de C sont nulles et on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas.
   On note $\lambda_1, ..\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de C, $a_1, ..a_p$ leurs multiplicités respectives.

   On considère $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ (0) & & \lambda_p \end{pmatrix}$, triangulaire supérieure telles que $C = PTP^{-1}$.

Alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, $C^k = P T^k P^{-1}$, avec $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (*) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p^k \end{pmatrix}$.

Deux matrices semblables ayant même trace, il vient $tr\left(C^k\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_i^k = 0$.

On a donc pour $k \in \mathbb{N}^*$: $a_1\lambda_1^k + a_2\lambda_2^k + .. + a_p\lambda_p^k = 0$

Si une des valeurs propres est nulle, elle donne un terme nul dans la somme que l'on peut retirer.

On peut donc considérer que $a_1\lambda_1^k + a_2\lambda_2^k + .. + a_p\lambda_p^k = 0$, où $\lambda_1, ..\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes non nulles de C.

Si on note $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$, et $V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix}$, on obtient $V X = 0$.

Or $\det(V) = \lambda_1 ... \lambda_p \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} \neq 0$ car $\lambda_1, ..\lambda_p$ sont distinctes et non nulles (avec le déterminant de **Vandermonde**). Donc V est inversible et $X = 0$, ce qui est absurde (les multiplicités des valeurs propres ne peuvent pas être nulles).

Donc toutes les valeurs propres de C sont nulles.

Dès lors, $\chi_C = X^n$ et avec le théorème de Cayley-Hamilton, $C^n = 0$, $\boxed{\text{donc } C \text{ est nilpotente.}}$

3) On pose $C = AB - BA$. Alors $C^2 = AB(AB - BA) - BA(AB - BA) = ABC$

Donc $C^3 = C^2 C = (AB)C^2 = (AB)^2 C$ et par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $C^k = C^{k-1}C = (AB)^{k-1} C$.

Donc $C^k = (AB)^k - (AB)^{k-1}(BA) = A^k B^k - A^{k-1} B^k A$.

Or $tr\left(\left(A^{k-1}B^k\right)A\right) = tr\left(A\left(A^{k-1}B^k\right)\right)$

Donc $tr\left(C^k\right) = tr\left(A^k B^k\right) - tr\left(A^k B^k\right) = 0$.

$\boxed{\text{Avec 2), on conclut que } AB - BA \text{ est nilpotente}}$.

Séance 6 : Mercredi 18 Juin

Exercice 31 (oral CCINP 24, Grégoire,2) : Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (1) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

1) Calculer J^2.
2) J est-elle diagonalisable ?
3) Déterminer ses valeurs propres et une base de ses sous-espaces propres.

Ind :

1) Poser le calcul.
2) Utiliser le théorème spectral ou un polynôme.
3) Trouver d'abord les valeurs propres.

1) On trouve $J^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \cdots & (n-2) \\ n-2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n-2 \\ (n-2) & & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{J^2 = (n-2)J + (n-1)I_n}$

2) $\boxed{J \text{ est symétrique réelle, donc elle diagonalisable sur } \mathbb{R} \text{ donc sur } \mathbb{C}}$.

3) Le polynôme $Q = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de J.
De plus, $Q = (X+1)(X-(n-1))$, donc $Sp(J) \subset \{-1, n-1\}$.
En outre, $J + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & (1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (1) & & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $rg(J+I_n) = 1$ et $\boxed{\dim\left(E_{-1}(J+I_n)\right) = n-1}$.
On pose $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (plus précisément, pour $j \in [\![2,n]\!]$, $(X_j)_1 = 1$ et pour $i \in [\![2,n]\!]$
$(X_j)_i = -\delta_{i,j}$).
La famille $(X_2,\dots,X_n)$ est libre et constituée de $n-1 = \dim\left(E_{-1}(J)\right)$ vecteurs de $E_{-1}(J)$.
Donc $\boxed{(X_2,\dots,X_n) \text{ est une base de } E_{-1}(J)}$.

Comme J est diagonalisable, $\dim\left(E_{n-1}(J)\right) = n-(n-1) = 1$

Par ailleurs, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $JX = (n-1)X$, donc $\boxed{\text{une base de } E_{n-1}(J) \text{ est } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 32 (Oral Centrale 1 23, Emma,3) :
Soit $\varphi \in L\left(\mathbb{R}[X]\right)$ telle que $\varphi(1) = 1$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X], (\varphi(P))' = \varphi(P')$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $\varphi\left(X^n\right) = X^n + R_n$, avec $\deg\left(R_n\right) < n$.
2) En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ. A quelles conditions la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?
3) Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Quel est son spectre ?

Ind :
1) Procéder par récurrence.
2) Ecrire la matrice de la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Montrer d'abord l'injectivité en prenant $P \in \ker(\varphi)$ et en considérant $n \geq \deg(P)$.
Montrer ensuite la surjectivité en prenant $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $n \geq \deg(Q)$.

1) On procède **par récurrence** sur $n \in \mathbb{N}$ et on prouve $H(n)$: « il existe un polynôme R_n tel que $\deg\left(R_n\right) < n$ et $\varphi\left(X^n\right) = X^n + R_n$ ».

- $H(0)$ est vraie avec $R_0 = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $\left(\varphi(X^{n+1})\right)' = (n+1)\varphi(X^n) = (n+1)X^n + R_n$

  Si on note $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, il existe une constante a telle que $\varphi(X^{n+1}) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + a$.

  On pose alors $R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + a = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{k} X^k + a$ et on a bien $\deg(R_{n+1}) < n+1$.

  Donc $H(n+1)$ est vraie.

2) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors par linéarité, $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi\left(X^k\right) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

On écrit la matrice de la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique B_n de $\mathbb{R}_n[X]$:

$M_B(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \ddots & (*) & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle ne possède qu'une seule valeur propre, donc est diagonalisable si et seulement si elle semblable à I_{n+1}, donc égale à I_{n+1}.

Donc $\boxed{\text{la restriction } \varphi_n \text{ de } \varphi \text{ à } \mathbb{R}_n[X] \text{ est diagonalisable si et seulement si } \varphi_n = Id_{\mathbb{R}_n[X]}}$

3) On prouve d'abord que φ est injective. Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors si on prend $n \geq \deg(P)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\varphi(P) = \varphi_n(P) = 0$. Mais $M_B(\varphi_n)$ est inversible, donc φ_n est bijective et $P = 0$.

Donc $\boxed{\ker(\varphi) = \{0\} \text{ et } \varphi \text{ est injective}}$.

On prouve ensuite que φ est surjective. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors si on prend $n \geq \deg(Q)$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Comme φ_n est bijective, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = \varphi_n(P) = Q$.

Q possède un antécédent par φ, $\boxed{\text{donc } \varphi \text{ est surjective}}$.

Ainsi, φ est linéaire et bijective, donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$

De plus, on a $\varphi(1) = 1$, donc $1 \in Sp(\varphi)$.

Réciproquement, si $\lambda \in Sp(\varphi)$, on prend $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

Alors si on prend $n \geq \deg(P)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\lambda \in Sp(\varphi_n)$.

Or avec $M_B(\varphi_n)$, $Sp(M_B(\varphi_n)) = \{1\}$, donc $\lambda = 1$ et $\boxed{Sp(\varphi) = \{1\}}$

Exercice 33 (Oral Mines 23, Liam,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est somme de deux matrices diagonalisables.

Ind : écrire A comme somme de deux matrices triangulaires, avec des coefficients tous distincts sur la diagonale.

On note $A = \left(A_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, il vient $A = M + N$, avec $M = \begin{pmatrix} 1/p & & * & \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & n/p \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A_{1,1} - 1/p & & (0) & \\ * & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ * & \cdots & * & A_{n,n} - n/p \end{pmatrix}$.

(plus précisément : pour $i>j$, $M_{i,j}=0$ et $N_{i,j}=A_{i,j}$, pour $i<j$, $N_{i,j}=0$ et $M_{i,j}=A_{i,j}$ et pour $i\in[\![1,n]\!]$, $N_{i,i}=A_{i,i}-\frac{i}{p}$).

Alors N est diagonalisable car elle possède n valeurs propres distinctes (elle est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale).

De plus, pour $i,j\in[\![1,n]\!]$, avec $i\neq j$, il vient $N_{i,i}=N_{j,j}\Leftrightarrow A_{i,i}-\frac{i}{p}=A_{j,j}-\frac{j}{p}\Leftrightarrow A_{i,i}-A_{j,j}=\frac{j-i}{p}$.

Si $A_{i,i}=A_{j,j}$, on a donc toujours $N_{i,i}\neq N_{j,j}$ et sinon, on a $N_{i,i}\neq N_{j,j}$ lorsque $p>\left|\frac{j-i}{A_{i,i}-A_{j,j}}\right|$.

Donc pour p assez grand ($p>\max\limits_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ A_{i,i}\neq A_{j,j}}}\left\{\left|\frac{j-i}{A_{i,i}-A_{j,j}}\right|\right\}$), tous les coefficients diagonaux de n sont distincts et N est diagonalisable.

$\boxed{\text{Ainsi, } A \text{ est bien somme de deux matrices diagonalisables}}$.

Exercice 34 (oral CCINP 24, Sybille,4) : soit E un espace euclidien de dimension $n\geq 2$ et $u\in E$. Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

On pose $f_u:\begin{cases}E\to E\\ x\to\langle x,u\rangle u\end{cases}$.

1) Montrer que f_u est un endomorphisme autoadjoint de E.
2) On suppose $u\in E\setminus\{0_E\}$
   a) Montrer que $\dim(\ker(f_u))=n-1$ et en déduire que $\operatorname{Im}(f_u)=Vect(u)$
   b) Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que λf_u est le projecteur orthogonal sur $Vect(u)$.
3) Soit $g\in L(E)$.
   a) On suppose que $u\in E$ est vecteur propre de g. Montrer que $g\circ f_u$ est un endomorphisme autoadjoint de rang inférieur ou égal à 1.
   b) On suppose maintenant que $g\circ f_u$ est un endomorphisme autoadjoint de E. En calculant de deux manières différentes $\langle g\circ f_u(x),u\rangle$, montrer que si $u\neq 0_E$, alors u est un vecteur propre de g.
4) On suppose maintenant que g est un endomorphisme autoadjoint de E de rang inférieur ou égal à 1. En choisissant une base appropriée, montrer qu'il existe $u\in E$ tel que $\forall x\in E, g(x)=tr(g)\langle x,u\rangle u$.
5) On note $T(E)=\{f\in S^+(E), rg(f)\leq 1\}$. Montrer que $\Phi:\begin{matrix}E\to T(E)\\ u\mapsto f_u\end{matrix}$ est surjectif.

Ind :

1) Bien montrer que f_u est un endomorphisme. Comparer $\langle f_u(x),y\rangle$ et $\langle f_u(y),x\rangle$ pour $x,y\in E$.
2) a) Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.
   b) Chercher λ tel que $(\lambda f_u)\circ(\lambda f_u)=\lambda f_u$ et vérifier qu'il convient en reconnaissant l'expression d'une projection orthogonale.
3) a) Comparer $\langle g\circ f_u(x),y\rangle$ et $\langle g\circ f_u(y),x\rangle$ pour $x,y\in E$.
   b) Montrer que si $D=Vect(u)$, alors $g(u)\in(D^\perp)^\perp=D$.
4) Lorsque g n'est pas l'application nulle, considérer une valeur propre non nulle λ et choisir un vecteur propre unitaire u associé. Prendre une base orthonormée de vecteurs propres de g.
5) Bien vérifier que Φ est à valeurs dans $T(E)$. Utiliser 4) et remarquer que $tr(g)\geq 0$ pour pouvoir considérer $\sqrt{tr(g)}$.

1) f_u est définie sur E et à valeurs dans E. Soient de plus $x,y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors $f_u(x+\lambda y) = x+\lambda y + \langle x+\lambda y, u\rangle u = f_u(x)+\lambda f_u(y)$, donc f_u est linéaire.

Donc $\boxed{f_u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

De plus, si $x, y \in E$, $\langle f_u(x), y\rangle = \langle \langle x,u\rangle u, y\rangle = \langle x,u\rangle\langle y,u\rangle = \langle f_u(y), x\rangle$. $\boxed{\text{Donc } f_u \text{ est autoadjoint}}$.

2) a) Soit $x \in E$. On résout $f_u(x) = 0_E \Leftrightarrow \langle x,u\rangle u = 0_E \Leftrightarrow x \in (Vect(u))^{\perp}$.

Or $\dim\left((Vect(u))^{\perp}\right) + \dim\left((Vect(u))\right) = n$.

Donc $\boxed{\dim(\ker(f_u)) = \dim\left((Vect(u))^{\perp}\right) = n-1}$.

De plus, par théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im}(f_u)) = \dim(Vect(u)) = 1$ puisque $u \in E \setminus \{0_E\}$.

Comme $\operatorname{Im}(f_u) \subset Vect(u)$, on déduit que $\boxed{\operatorname{Im}(f_u) = Vect(u)}$

b) On procède par analyse et synthèse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λf_u est le projecteur orthogonal sur $Vect(u)$.

Alors c'est un projecteur, donc $(\lambda f_u) \circ (\lambda f_u) = \lambda f_u$.

Or si $x \in E$, alors $(\lambda f_u) \circ (\lambda f_u)(x) = \lambda^2 \langle f_u(x), u\rangle u = \lambda^2 \langle x,u\rangle \|u\|^2 u$.

En particulier, $(\lambda f_u) \circ (\lambda f_u)(u) = \lambda^2 \|u\|^4 u$ et $(\lambda f_u)(u) = \lambda \|u\|^2 u$. Comme $u \neq 0_E$, il vient $\lambda^2 \|u\|^4 = \lambda \|u\|^2$, donc $\lambda = \|u\|^{-2} = \dfrac{1}{\|u\|^2}$. Il y a unicité si existence.

Réciproquement, on suppose $\lambda = \|u\|^{-2}$. Alors $\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $D = Vect(u)$.

Si on note p_u le projecteur orthogonal sur $D = Vect(u)$, il vient pour $x \in E$: $p_u(x) = \dfrac{1}{\|u\|^2} f_u(x)$, donc on a bien $\lambda f_u = p_u$.

Donc $\boxed{\lambda = \|u\|^{-2} = \dfrac{1}{\|u\|^2} \text{ est l'unique valeur telle que } \lambda f_u \text{ est le projecteur orthogonal sur } Vect(u)}$.

3) a) On suppose que $u \neq 0_E$ est un vecteur propre de f_u , associé à la valeur propre λ . $g \circ f_u \in L(E)$ par composée. De plus, si $x, y \in E$, $\langle g \circ f_u(x), y\rangle = \langle \lambda \langle x,u\rangle u, y\rangle = \lambda \langle x,u\rangle\langle y,u\rangle = \langle g \circ f_u(y), x\rangle$.

Donc $g \circ f_u$ est autoadjoint.

Enfin, $\operatorname{Im}(g \circ f_u) \subset Vect(u)$, donc $rg(g \circ f_u) \leq 1$.

Ainsi, $\boxed{g \circ f_u \text{ est un endomorphisme autoadjoint de rang inférieur ou égal à } 1}$.

b) On suppose maintenant que $g \circ f_u$ est un endomorphisme autoadjoint de E . Soit $x \in E$. On calcule $\langle g \circ f_u(x), u\rangle = \langle x,u\rangle\langle g(u),u\rangle$.

De plus, $\langle g \circ f_u(x), u\rangle = \langle x, g \circ f_u(u)\rangle = \langle x, \langle u,u\rangle g(u)\rangle = \|u\|^2 \langle x, g(u)\rangle$.

Donc $\langle x,u\rangle\langle g(u),u\rangle = \|u\|^2 \langle x, g(u)\rangle$. Si on note $D = Vect(u)$ et qu'on prend $x \in D^{\perp}$, alors $\|u\|^2 \langle x, g(u)\rangle = 0$, donc comme $u \neq 0_E$, $\langle x, g(u)\rangle = 0$. Donc $g(u) \in (D^{\perp})^{\perp} = D$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}, g(u) = \lambda u$.

Donc comme $u \neq 0_E$, $\boxed{u \text{ est un vecteur propre de } g.}$

4) On suppose maintenant que g est un endomorphisme autoadjoint de E de rang inférieur ou égal à 1.

Alors $\dim(E_0(g)) \geq n-1$.

Si $\dim(E_0(g)) = n$, alors $tr(g) = 0$ et on a bien $\forall x \in E, g(x) = tr(g)\langle x,u\rangle u$.

Sinon, $\dim(E_0(g)) = n-1$

Alors comme E est euclidien, g est diagonalisable et il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\dim(E_\lambda(g)) = 1$ et $E_0(g) \oplus E_\lambda(g) = E$. De plus, les sous-espaces propres de g sont orthogonaux donc en réunissant une base orthonormée (u) de $E_\lambda(g)$ et $(e_2,...,e_n)$ base orthonormée de $E_0(g) = \ker(g)$, on obtient $B = (u,e_2,...,e_n)$ base orthonormée de E. On a alors $tr(g) = \lambda + 0 = \lambda$.

Si $x = \langle x,u\rangle u + \sum_{k=2}^{n} \langle x,e_k\rangle e_k \in E$, il vient $g(x) = \lambda\langle x,u\rangle u = tr(g)\langle x,u\rangle u$.

On a donc bien $\boxed{\forall x \in E, g(x) = tr(g)\langle x,u\rangle u}$.

5) Soit $T(E) = \left\{ f \in S^+(E), rg(f) \leq 1 \right\}$. Montrons que $\Phi : \begin{array}{l} E \to T(E) \\ u \mapsto f_u \end{array}$ est surjectif.

- Tout d'abord, si $u \in E$, alors $\mathrm{Im}(f_u) \subset Vect(u)$, donc on a bien $rg(u) \leq 1$. De plus, avec 1), f_u est un endomorphisme autoadjoint de E. Enfin, $f_u(u) = \|u\|^2 u$.

  Si $u = 0_E$, alors $f_u = 0_{L(E)} \in S^+(E)$.

  Si $u \neq 0_E$, $\|u\|^2 \in Sp(f_u)$ et comme $\dim(E_0(f_u)) = n-1$, $Sp(f_u) = \left\{0, \|u\|^2\right\} \subset \mathbb{R}_+$.

  Donc $f_u \in S^+(E)$ et $\Phi(u) \in T(E)$.
- Soit $g \in T(E)$. Alors d'après 4), on peut considérer $u \in E$ tel que $\forall x \in E, g(x) = tr(g)\langle x,u\rangle u$.

  Comme $g \in S^+(E)$, ses valeurs propres sont positives et leur somme $tr(g)$ l'est aussi.

  On pose donc $\boxed{v = \sqrt{tr(g)}\, u}$. Alors $\forall x \in E, g(x) = \langle x,v\rangle v$, donc $g = f_v = \Phi(v)$ et $\boxed{\Phi \text{ est surjective}}$.

Exercice 35 (Oral Centrale 1 23, Mailys,4) : soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $\Phi : E \to E$ donnée par $\forall x \in [0,1], \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt$.

1) Montrer que Φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de E.
2) Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Ind :

1) Bien penser à montrer que Φ est linéaire et que si $f \in E$, alors $\Phi(f)$ est continue (par exemple avec Chasles).
2) Montrer que si $f \in E$, alors $\Phi(f)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$ et calculer $\Phi(f)''$. Utiliser une analyse-synthèse pour trouver $\mathrm{Im}(\Phi)$.

1) Soit $f \in E = C([0,1],\mathbb{R})$. Alors si $x \in [0,1]$ est fixé et $t \in [0,1]$, on note $g(x,t) = \min(x,t) f(t)$.

   Alors pour $t \leq x$, $g(x,t) = t\,f(t)$ et pour $t \geq x$, $g(x,t) = xf(t)$.

   Donc pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\Phi(f)$ est bien défini.

   Donc $\boxed{\Phi \text{ est bien définie.}}$

   De plus, si $f,g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$, $\Phi(f+\lambda g)(x) = \int_0^1 \min(x,t)(f+\lambda g)(t)\,dt$.

   Donc $\Phi(f+\lambda g)(x) = \Phi(f)(x) + \lambda\Phi(g)(x)$ et Φ est linéaire.

   On veut montrer que si $f \in E$, alors $\Phi(f)$ est continue sur $[0,1]$.

On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ (elle est constante sur $[0,x]$, puis linéaire sur $[x,1]$, et continue en x).
- Pour $x,t \in [0,1]$, $|g(x,t)| = |\min(x,t) f(t)| \le \|f\|_\infty$ ($|f|$ est continue sur $[0,1]$, donc majorée par théorème des bornes atteintes. De plus, $t \mapsto \|f\|_\infty$ est constante donc intégrable sur $[0,1]$.

Donc $\Phi(f) \in E$ et $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

2) On cherche $\ker(\Phi)$. Soit $f \in \ker(\Phi)$.

On a $\Phi(f)(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt + x\int_x^1 f(t)\, dt$, donc $\Phi(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ (les fonctions sous les deux intégrales sont continues et on utilise le théorème fondamental).

De plus, $\Phi(f)(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt - x\int_1^x f(t)\, dt$ donc $\Phi(f)'(x) = xf(x) - xf(x) - \int_1^x f(t)\, dt = -\int_1^x f(t)\, dt$

De nouveau, $\Phi(f)'$ est dérivable sur $[0,1]$ et $\Phi(f)''(x) = -f(x)$

Comme $f \in \ker(\Phi)$, $\Phi(f) = 0$, donc $\Phi(f)''(x) = 0 = -f(x)$. Donc f est nulle. Donc $\boxed{\ker(\Phi) = \{0\}}$

On cherche $\operatorname{Im}(\Phi)$. Soit $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$. Alors il existe $f \in E$ telle que pour tout $x \in [0,1]$:

$g(x) = \Phi(f)(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt - x\int_1^x f(t)\, dt$. En particulier, $g(0) = 0$ et par théorème fondamental de l'analyse, g est C^1 sur $[0,1]$, avec $g'(x) = -\int_1^x f(t)\, dt$. En particulier, $g'(1) = 0$ et g est de classe C^2 sur $[0,1]$ et vérifie $\forall x \in [0,1], f(x) = -g''(x)$.

Donc si $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$, alors $g \in A = \left\{h \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h(0) = h'(1) = 0\right\}$. De plus, on a prouvé que $g = \Phi(-g'')$.

Réciproquement, on suppose $g \in A$. Montrons que $g = \Phi(-g'')$. Ainsi, $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$.

Tout d'abord, $-g'' \in E$.

De plus, $\Phi(-g'')(x) = -\int_0^x t\, g''(t)\, dt - x\int_x^1 g''(t)\, dt$.

En intégrant par parties, $\Phi(-g'')(x) = -\left(\left[t\, g'(t)\right]_0^x - \int_0^x g'(t)\, dt\right) - x\left(g'(1) - g'(x)\right)$.

Donc $\Phi(-g'')(x) = -\left(xg'(x) - g(x) + g(0)\right) - x\left(g'(1) - g'(x)\right) = g(x)$

Donc on a bien $g = \Phi(-g'')$ et $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$.

Par double inclusion, $\boxed{\operatorname{Im}(\Phi) = A = \left\{h \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h(0) = h'(1) = 0\right\}}$

Exercice 36 (Oral Mines 23, Mailys,4) : soient $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda A + \mu B$ est diagonalisable. Montrer que $AB = BA$.

Ind : commencer par trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ soit diagonalisable. Si f et g sont canoniquement associés à A et à B, prendre une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et traduire que la matrice de $\lambda f + g$ doit toujours être diagonalisable.

Si $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$.

Donc $\chi_A = X^2-(a+d)X+ad-bc$. Soit $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc$

Si $\Delta \neq 0$, A possède deux valeurs propres complexes distinctes et est diagonalisable.

Si $\Delta = 0$, A possède une seule valeur propre et diagonalisable si et seulement si elle est diagonale.

Donc $\boxed{A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable si et seulement si } b=c=0 \text{ ou } (a-d)^2+4bc\neq 0}$.

Dès lors, on considère f canoniquement associée à A et g canoniquement associée à B. Alors pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\lambda f+\mu g$ est diagonalisable. On prend une base C de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice $M=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ de f est diagonale. On pose $N=M_C(g)=\begin{pmatrix} u & w \\ v & x \end{pmatrix}$. Si $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $M_C(\lambda f+g)=\begin{pmatrix} \lambda\alpha+u & w \\ v & \lambda\beta+x \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Donc $v=w=0$ ou $\Delta=(\lambda(\alpha-\beta)+u-x)^2+4vw\neq 0$.

- Si $\alpha=\beta$, alors $M=\alpha I_2$ donc $f=\alpha Id_{\mathbb{C}^2}$ donc $f\circ g=g\circ f$ et on a bien $AB=BA$.
- Si $\alpha\neq\beta$, $\Delta=(\lambda(\alpha-\beta)+u-x)^2+4vw$ est un polynôme du second degré en λ. Il existe donc une valeur de λ telle que $\Delta=0$. Pour cette valeur de λ, on a forcément $v=w=0$ puisque $M_C(\lambda f+g)$ est diagonalisable. Donc $N=M_C(g)=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ et $MN=NM=\begin{pmatrix} \alpha u & 0 \\ 0 & \beta x \end{pmatrix}$, donc $f\circ g=g\circ f$ et on a bien $AB=BA$.

Dans tous les cas, on conclut bien que $\boxed{AB=BA}$

Exercices en Plus

Exercice 37 (Oral CCINP 23, Ethan,1) :

1) Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $M^p=0$. Montrer que si M est diagonalisable, alors $M=0$.
2) Soit $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $M=\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable ?

Ind :

1) Utiliser un polynôme annulateur.
2) Calculer j^3, $1+j+j^2$ et M^2.

1) Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $M^p=0$. Alors X^p est un polynôme annulateur de M donc les valeurs propres de M sont parmi les racines de X^p et $Sp(M)\subset\{0\}$.
   Dès lors, si M est diagonalisable, alors elle est semblable à la matrice nulle, donc $\boxed{M=0}$
2) On remarque que $j^3=1$, donc que $j^4=j$. De plus, $1+j+j^2=\dfrac{1-j^3}{1-j}=0$ (c'est aussi la somme des racines troisièmes de 1).

Donc on calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} = (0)$ et avec $p = 2$, par contraposée de la question 1), on conclut que comme M n'est pas nulle, $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Exercice 38 (oral CCINP 22,23,3, Hugo A,4) : Soient $n \geq 2$, un entier, et $A \in A_n(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

1) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^T AX \in \mathbb{R}$. Calculer $\left(X^T AX\right)^T$ et montrer que $X^T AX = 0$.
2) Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est zéro. En déduire que M et N sont inversibles.
3) Montrer que M et N commutent, et qu'il en est de même pour M^{-1} et N^{-1}. Montrer que $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas -1 comme valeur propre.
4) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in A_n(\mathbb{R})$ telle que $U = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$

Ind :

1) Regarder la taille de la matrice $X^T AX$ et calculer sa transposée de deux manières.
2) Prendre une valeur propre et un vecteur propre non nul associé.
3) Relier M^T avec N, puis exprimer $\Omega^T \Omega$ en fonction de M. Pour montrer que -1 n'est pas valeur propre de Ω, exprimer M en fonction de N et I_n.
4) Procéder par analyse et synthèse. Une fois B trouvée, montrer que $(I_n + U)B = -(I_n + U)B^T$.

1) On sait que $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $X^T \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. Donc par produit matriciel, $X^T AX \in M_1(\mathbb{R})$ et on confond cette matrice avec son unique coefficient, donc $X^T AX \in \mathbb{R}$.
   Dès lors, $\left(X^T AX\right)^T = \left(X^T AX\right)$ d'une part, et d'autre part, $\left(X^T AX\right)^T = \left(X^T A^T X\right) = -\left(X^T AX\right)$ car $A \in A_n(\mathbb{R})$. On a donc bien $\boxed{X^T AX = 0}$

2) On prend $\lambda \in Sp(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors $X^T AX = \lambda \|X\|^2$. Mais d'après 1), on a donc $\lambda \|X\|^2 = 0$, et comme $X \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc $\boxed{Sp(A) \subset \{0\}}$
   Dès lors, 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de A, donc $\boxed{M = I_n + A \text{ et } N = I_n - A \text{ sont inversibles}}$.

3) On calcule $MN = (I_n + A)(I_n - A) = NM$ et $(NM)^{-1} = (MN)^{-1}$. Donc $N^{-1}M^{-1} = M^{-1}N^{-1}$
   Donc $\boxed{M \text{ et } N \text{ commutent, et il en est de même pour } M^{-1} \text{ et } N^{-1}}$

   Comme $A \in A_n(\mathbb{R})$, on a directement $M^T = N$, donc M et $M^T = N$ commutent.
   On calcule alors $\Omega = M\left(M^T\right)^{-1}$, donc $\Omega^T = M^{-1}M^T$.
   Puis $\Omega^T \Omega = M^{-1}M^T M\left(M^T\right)^{-1} = M^{-1}MM^T\left(M^T\right)^{-1} = I_n$.
   Donc $\boxed{\Omega \in O_n(\mathbb{R})}$
   Par l'absurde, on suppose que -1 est valeur propre de Ω.
   Soit alors $X \neq 0$ tel que $MN^{-1}X = -X$. On remarque que $M = 2I_n - N$. Il vient donc $2N^{-1}X - X = -X$
   Et $X = 0$, ce qui est absurde. $\boxed{\text{Donc } -1 \text{ n'est pas valeur propre de } \Omega.}$

4) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Alors $I_n + U$ est inversible.

On procède par analyse et synthèse et on suppose que B existe. Alors $\left(I_n + B\right)U = \left(I_n - B\right)$, donc $B\left(I_n + U\right) = \left(I_n - U\right)$, donc $B = \left(I_n - U\right)\left(I_n + U\right)^{-1}$. Il y a unicité si existence.

Réciproquement, on pose $B = \left(I_n - U\right)\left(I_n + U\right)^{-1} \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$. Alors $B\left(I_n + U\right) = \left(I_n - U\right)$, donc $\left(I_n + U\right)^T B^T = \left(I_n - U\right)^T$ et $\left(I_n + U^T\right)B^T = \left(I_n - U^T\right)$, donc $U\left(I_n + U^T\right)B^T = U\left(I_n - U^T\right)$.

Comme $U \in O_n\left(\mathbb{R}\right)$, $U^T U = UU^T = I_n$.

Donc $\left(I_n + U\right)B^T = -\left(I_n - U\right) = -B\left(I_n + U\right)$.

De plus, $B\left(I_n + U\right) = \left(I_n - U\right)$ et $\left(I_n + U\right)B = \left(I_n + U\right)\left(I_n - U\right)\left(I_n + U\right)^{-1}$.

Or $\left(I_n + U\right)\left(I_n - U\right) = I_n - U^2 = \left(I_n - U\right)\left(I_n + U\right)$, donc $\left(I_n + U\right)B = \left(I_n - U\right) = -\left(I_n + U\right)B^T$

Donc comme $I_n + U$ est inversible, $B^T = -B$ et $B \in A_n\left(\mathbb{R}\right)$.

Donc avec 2), -1 n'est pas valeur propre de B et $B\left(I_n + U\right) = \left(I_n - U\right)$, donc on a bien

$U = \left(I_n + B\right)^{-1}\left(I_n - B\right)$

$\boxed{B = \left(I_n - U\right)\left(I_n + U\right)^{-1} \text{ est l'unique matrice de } A_n\left(\mathbb{R}\right) \text{ telle que } U = \left(I_n + B\right)^{-1}\left(I_n - B\right)}$.

Exercice 39 (Oral Mines 23,Eloi,3) : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\Phi : \begin{matrix} M_n\left(\mathbb{R}\right) \to M_n\left(\mathbb{R}\right) \\ M \mapsto aM + bM^T \end{matrix}$.

1) Trouver les éléments propres de Φ, sa trace et son déterminant.
2) Déterminer une condition sur a et b pour que Φ soit bijectif et lorsque c'est le cas, déterminer Φ^{-1}

Ind :

1) Ecrire la matrice de Φ dans une base adaptée à la décomposition $S_n\left(\mathbb{R}\right) \oplus A_n\left(\mathbb{R}\right) = M_n\left(\mathbb{R}\right)$.
2) Utiliser la matrice précédente et exprimer Φ^{-1} sur $S_n\left(\mathbb{R}\right)$ et $A_n\left(\mathbb{R}\right)$ ou résoudre l'équation $\Phi(M) = N$.

1) On sait que $S_n\left(\mathbb{R}\right) \oplus A_n\left(\mathbb{R}\right) = M_n\left(\mathbb{R}\right)$.

De plus, une base de $S_n\left(\mathbb{R}\right)$ est $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \le i \le j \le n}$ et $\dim\left(S_n\left(\mathbb{R}\right)\right) = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Donc $\dim\left(A_n\left(\mathbb{R}\right)\right) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Si $M \in S_n\left(\mathbb{R}\right)$, alors $\Phi(M) = (a+b)M$ et si $M \in A_n\left(\mathbb{R}\right)$, $\Phi(M) = (a-b)M$.

Dans une base C adaptée à la décomposition $S_n\left(\mathbb{R}\right) \oplus A_n\left(\mathbb{R}\right) = M_n\left(\mathbb{R}\right)$, il vient

$$M_C\left(\Phi\right) = \begin{pmatrix} (a+b)I_{\frac{n(n+1)}{2}} & (0) \\ (0) & (a-b)I_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{Sp\left(\Phi\right) = \{a-b, a+b\}}$. Alors $S_n\left(\mathbb{R}\right) \subset E_{a+b}\left(\Phi\right)$ et $A_n\left(\mathbb{R}\right) \subset E_{a-b}\left(\Phi\right)$, donc $\dim\left(E_{a+b}\left(\Phi\right)\right) \ge \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(E_{a-b}\left(\Phi\right)\right) \ge \frac{n(n-1)}{2}$. Or $\dim\left(E_{a+b}\left(\Phi\right)\right) + \dim\left(E_{a-b}\left(\Phi\right)\right) = n^2$

donc nécessairement $\boxed{\dim\left(E_{a+b}\left(\Phi\right)\right) = \frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{\dim\left(E_{a-b}\left(\Phi\right)\right) = \frac{n(n-1)}{2}}$

On a directement $\boxed{Tr\left(\Phi\right) = Tr\left(M_B\left(\Phi\right)\right) = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = n^2 a + nb}$

$\boxed{\det(\Phi) = (a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

2) Φ est bijective si et seulement si $M_C(\Phi)$ est inversible.

Donc $\boxed{\Phi \text{ est bijective si et seulement si } a\neq b \text{ et } a\neq -b}$

On a alors $M_C\left(\Phi^{-1}\right)=\begin{pmatrix}(a+b)^{-1}I_{\frac{n(n+1)}{2}} & (0)\\ (0) & (a-b)^{-1}I_{\frac{n(n-1)}{2}}\end{pmatrix}$.

Donc $M\in S_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi^{-1}(M)=(a+b)^{-1}M$ et si $M\in A_n(\mathbb{R})$, $\Phi^{-1}(M)=(a-b)^{-1}M$.

Dès lors, si $M\in M_n(\mathbb{R})$, $M=\dfrac{M+M^T}{2}+\dfrac{M-M^T}{2}$, avec $\dfrac{M+M^T}{2}\in S_n(\mathbb{R})$ $\dfrac{M-M^T}{2}\in A_n(\mathbb{R})$.

Donc $\Phi^{-1}(M)=\dfrac{1}{a+b}\dfrac{M+M^T}{2}+\dfrac{1}{a-b}\dfrac{M-M^T}{2}=\dfrac{1}{2(a^2-b^2)}\left((a-b+a+b)M+(a-b-a-b)M\right)$

Donc $\boxed{\Phi^{-1}(M)=\dfrac{a}{(a^2-b^2)}M-\dfrac{b}{(a^2-b^2)}M^T}$

Exercice 40 (oral Centrale 1 2023, Paul,4) : soit $n\in\mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.
Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. On définit $P_\sigma\in S_n$ par $\forall i,j\in[\![1,n]\!],(P_\sigma)_{i,j}=\delta_{\sigma(i),j}$.

1) Montrer que si $\sigma,s\in S_n$, alors $P_\sigma P_s=P_{s\circ\sigma}$. Montrer que P_σ est orthogonale.
2) Montrer que $\exists l\in\mathbb{N}^*,P_\sigma^l=I_n$.
3) P_σ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?

Ind :

1) Faire le calcul puis montrer $P_{\sigma^{-1}}=(P_\sigma)^T$ en revenant aux coefficients.
2) Justifier que $\left\{\sigma^k,k\in\mathbb{N}\right\}$ est un ensemble fini.
3) Utiliser un polynôme sur $\mathbb{C}$ et remarquer que si P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors $(P_\sigma)^2=I_n$

1) Soient $\sigma,s\in S_n$. Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$. $(P_\sigma P_s)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}(P_\sigma)_{i,k}(P_s)_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{\sigma(i),k}\delta_{s(k),j}=\delta_{s\circ\sigma(k),j}$.

On a donc bien $\boxed{P_\sigma P_s=P_{s\circ\sigma}}$

On a donc $P_\sigma P_{\sigma^{-1}}=I_n$. Or $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\left(P_{\sigma^{-1}}\right)_{i,j}=\delta_{\sigma^{-1}(i),j}=\delta_{i,\sigma(j)}$ car $\sigma^{-1}(j)=i\Leftrightarrow\sigma(i)=j$

Donc $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\left(P_{\sigma^{-1}}\right)_{i,j}=(P_\sigma)_{j,i}$ et $P_{\sigma^{-1}}=(P_\sigma)^T$, donc $P_\sigma(P_\sigma)^T=I_n$.

Donc $\boxed{P_\sigma \text{ est orthogonale}}$.

2) Avec 1), on sait que $(P_\sigma)^2=P_{\sigma\circ\sigma}$, donc si on note σ^k l'application σ composée k fois, alors pour $k\in\mathbb{N}$, $(P_\sigma)^k=P_{\sigma^k}$.

Or $\left\{\sigma^k,k\in\mathbb{N}\right\}\subset S_n$ est un ensemble fini et donc il existe $p,k\in\mathbb{N}$ tels que $p<k$ et $\sigma^p=\sigma^k$.

Alors $\sigma^p=\sigma^{k-p}\sigma^p$ et comme σ^p est bijective, $\sigma^{k-p}=Id_{[\![1,n]\!]}$.

On pose $l=k-p\in\mathbb{N}^*$, donc $\boxed{\exists l\in\mathbb{N}^*,P_\sigma^l=I_n}$

3) $X^l-1=\prod_{k=0}^{l-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ est un polynôme annulateur de P_σ, scindé à racines simples.

Donc $\boxed{P_\sigma \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

De plus, si P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors ses valeurs propres sont parmi les racines réelles de X^l-1, donc $Sp(P_\sigma)\subset\{-1,1\}$. Dès lors, P_σ est semblable à D diagonale dont tous les coefficients sont dans $\{-1,1\}$. Il existe Q inversible telle que $P_\sigma=QDQ^{-1}$ et $(P_\sigma)^2=QD^2Q^{-1}=I_n$, donc $P_{\sigma\circ\sigma}=I_n$ et $\forall i\in[\![1,n]\!],(P_{\sigma\circ\sigma})_{i,i}=1=\delta_{\sigma\circ\sigma(i),i}$ donc $\forall i\in[\![1,n]\!],\sigma\circ\sigma(i)=i$ et $\sigma\circ\sigma=Id_{[\![1,n]\!]}$.

Réciproquement, si $\sigma\circ\sigma=Id_{[\![1,n]\!]}$, alors $(P_\sigma)^2=P_{\sigma\circ\sigma}=I_n$.

Donc comme P_σ est orthogonale., il vient $P_\sigma=(P_\sigma)^T$, donc $P_\sigma\in S_n(\mathbb{R})$ et P_σ est diagonalisable.

Donc $\boxed{P_\sigma \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \sigma\circ\sigma=Id_{[\![1,n]\!]}}$

Exercice 41 (oral ENS 24, Andréa) : soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $E=\{M\in GL_n(\mathbb{R}),\forall i,j\in[\![1,n]\!],M_{i,j}\in\{0,1\}\}$. Trouver $\max_{M\in E}\left(\sum_{1\le i,j\le n}M_{i,j}\right)$.

Il s'agit ici de trouver une matrice $M\in M_n(\mathbb{R})$, inversible qui comprend le plus de 1 possibles.
Soit une telle matrice. Elle ne peut pas posséder deux colonnes composées uniquement de 1, sinon on n'aurait pas $rg(M)=n$. Il y a donc au minimum un 0 dans toutes les colonnes, sauf une.

On a donc nécessairement $\sum_{1\le i,j\le n}M_{i,j}\le n^2-(n-1)$

De plus, si on prend $M=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1&1\\1&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&0&1\\1&\cdots&\cdots&1&0\end{pmatrix}$, , on constate que $\sum_{1\le i,j\le n}M_{i,j}=n^2-(n-1)$.

On prouve que M est inversible.

On calcule $\det(M)=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&1\\1&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&0&1\\1&\cdots&\cdots&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&\dots&0&0\\1&-1&\ddots&&\vdots\\\vdots&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&-1&0\\1&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}C_j\leftarrow C_j-C_1\\j\ge2\end{matrix}$.

On a donc $\det(M)\neq0$ et $M\in GL_n(\mathbb{R})$

On conclut que $\boxed{\max_{M\in E}\left(\sum_{1\le i,j\le n}M_{i,j}\right)=n^2-n+1}$

Exercice 42 (oral ENS 24, Matthias,4) :
Soit E un espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire usuel $\langle\ \rangle$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $(f_1,...,f_k)$ une famille définie telle que pour tout x non nul, $\exists i\in[\![1,k]\!],\langle x,f_i\rangle>0$

1) Trouver une telle famille.
2) Trouver une famille de taille $n+1$.
3) Montrer que $n+1$ est la taille minimale que peut prendre cette famille.

1) Prendre $(e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de E et considérer $F=(e_1,...,e_n,-e_1,...,-e_n)$.

2) Prendre $(e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de E et considérer $F=\left(e_1,...,e_n,-\sum_{k=1}^{n} e_k\right)$.

3) Procéder par l'absurde et prendre $x\in Vect(f_1,...,f_{k-1})^{\perp}$.

1) On note $(e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de E. On considère $F=(e_1,...,e_n,-e_1,...,-e_n)$.

Si $x\in E\setminus\{0_E\}$, $x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$. On suppose par l'absurde que $\forall i\in[\![1,n]\!],\langle x,e_i\rangle\le 0$ et que $\forall i\in[\![1,n]\!],\langle x,-e_i\rangle\le 0$. On a alors $\forall i\in[\![1,n]\!],\langle x,e_i\rangle=0$, donc $x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k=0_E$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{F=(e_1,...,e_n,-e_1,...,-e_n)\text{ convient, avec }(e_1,...,e_n)\text{ une base orthonormée de }E}$.

2) On prend toujours $(e_1,...,e_n)$, base orthonormée de E. On considère $F=\left(e_1,...,e_n,-\sum_{k=1}^{n} e_k\right)$.

Si $x\in E\setminus\{0_E\}$, $x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$. On suppose par l'absurde que $\forall i\in[\![1,n]\!],\langle x,e_i\rangle\le 0$, et que $\left\langle x,-\sum_{k=1}^{n} e_k\right\rangle\le 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\ge 0$, avec $\forall i\in[\![1,n]\!],\langle x,e_i\rangle\le 0$.

La seule possibilité est d'avoir $\forall i\in[\![1,n]\!],\langle x,e_i\rangle=0$, donc $x=0_E$, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{F=\left(e_1,...,e_n,-\sum_{k=1}^{n} e_k\right)\text{ convient et contient } n+1 \text{ éléments}}$.

3) On procède par l'absurde et on considère $k\in[\![1,n]\!]$ et $F=(f_1,...,f_k)$ une famille telle que pour tout x non nul, $\exists i\in[\![1,k]\!],\langle x,f_i\rangle>0$. On note $V=Vect(f_1,...,f_k)$.
Si $\dim(V)<n$, alors $\dim(V^{\perp})\ge 1$. On prend $x\in V^{\perp}\setminus\{0_E\}$ et $\forall i\in[\![1,k]\!],\langle x,f_i\rangle=0$, ce qui est absurde.
On a donc nécessairement $\dim(V)=n=\dim(E)$ et comme $V\subset E$, il vient $V=E$.
De plus, $(f_1,...,f_k)$ est une famille génératrice de E. On a donc $k\ge n=\dim(E)$, donc $k=n$ et $(f_1,...,f_n)$ est une base de E (famille génératrice de n vecteurs, avec $\dim(E)=n$).
On pose alors $H=Vect(f_1,...,f_{n-1})$, avec $\dim(H)=n-1$. On prend $x\in H^{\perp}\setminus\{0_E\}$. Alors $\forall i\in[\![1,k-1]\!],\langle x,f_i\rangle=0$, donc nécessairement $\langle x,f_n\rangle>0$. Mais alors $\forall i\in[\![1,k]\!],\langle -x,f_i\rangle\le 0$, avec $-x\ne 0_E$. On obtient donc une absurdité.
$\boxed{\text{Donc } n+1 \text{ est la taille minimale que peut prendre une telle famille}}$.