ALGEBRE

Séance 1 : Vendredi 15 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 2

Exercice 1 (Oral Mines 24, Léo,2) : On pose $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, D_n désigne le déterminant de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés pour $1 \leq i, j \leq n$ par $A_{i,j} = f_{|i-j|}$. Calculer D_n en fonction de n.

Exercice 2 (oral IMT 24, Tristan,3) : Soit $E = \mathbb{R}^n$.

1) Donner une caractérisation d'un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que $\operatorname{Im}(f) = Ker(f)$.
2) Représenter la matrice d'un tel endomorphisme dans une base choisie pour maximiser le nombre de coefficients nuls, et ne faire apparaitre que des 0 et des 1.

Exercice 3 (oral IMT 24, Diego,3) : déterminer toutes les suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n + 2n^2 + 2n + 1$.

On pourra considérer $s : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ U \mapsto s(U) \end{array}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, \left[s(U)\right]_n = U_{n+1}$ et utiliser $s - 2Id_E$, où $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (Oral CCINP 24, Madeleine,3) :

1) Soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel, stable par produit, déterminer sa dimension.

On suppose dans la suite que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, avec $n \geq 2$.
On suppose aussi que F est stable par produit et que $I_n \notin F$.

2)
   a) Déterminer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.
   b) Montrer que $F \oplus Vect(I_n) = M_n(\mathbb{R})$.
3) Soit p le projecteur sur $Vect(I_n)$ parallèlement à F.
   a) Montrer que si $M, M' \in M_n(\mathbb{R})$, alors $p(MM') = p(M)p(M')$
   b) Montrer que si $M^2 \in F$, alors $M \in F$.
4) Montrer que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $E_{i,j} \in F$. En déduire une contradiction.
5) F est défini comme l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, trouver sa dimension et montrer de 2 manières différentes que F n'est pas stable par produit.

Exercice 5 (Oral Mines 24, Elise,3) . Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note E^* l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in E$. Montrer que $x = y \Leftrightarrow \forall \Phi \in E^*, \Phi(x) = \Phi(y)$.

Exercice 6 (Oral Mines 24, Simon,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt)$. Montrer que n est impair.
2) On suppose que $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence et l'unicité du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin(t)) = \sin(nt)$. On le note P_p.
3) Déterminer P_0, P_1, P_2.
4) Déterminer le degré de P_p et son coefficient dominant.
5) Montrer que P_p est scindé à racines simples.

Séance 2 : Mercredi 21 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 5

Exercice 7 : (oral CCINP 24, Victor,1). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A$, avec (A, I_n) libre.
On considère définie par $f(M) = AM$.

1) Déterminer $f^2 = f \circ f$.
2) f est-elle diagonalisable ? Trouver son spectre.

Exercice 8 (Oral CCINP 24, Sandra,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \geq 3$

1) Déterminer le rang de A.
2) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 (oral CCINP 23, Mathilde,2) : on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1) Soit $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2 et exprimer $M(a,b,c)$ avec J, J^2, I_3.
2)
   a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et en trouver une base et la dimension.
   b) Montrer que le produit de deux matrices de E appartient à E.
3) Montrer que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.
4) Montrer que $M = M(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de celles de J.
5) Montrer que $Sp(M) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow b = c$.

Exercice 10 (Oral IMT 24, Charline,3) : soit $n \geq 2$, $A \in M_n(K)$ et $u : M \mapsto M - Tr(M)A$, avec $M \in M_n(K)$
.

1) Montrer que u est un endomorphisme.
2) Déterminer les éléments propres de u.
3) u est-elle diagonalisable ?

Exercice 11 (Oral Centrale 24, Pauline,4) : soit $n \geq 3$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $B^3 = A$ et $rg(A) = 1$

1) Exprimer $Tr(A)$ en fonction de $Tr(B)$.
2) On suppose $Tr(A) = 0$. Montrer que B n'est pas diagonalisable.
3) On suppose $Tr(A) \neq 0$. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $\ker(B) = \ker(B^2)$.

Exercice 12 (oral Centrale 24, Andréa,5) : soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $w \in L(E)$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $l \in L(E)$, diagonalisable, tel que $w = l^3$.
2) Soient $u, v \in L(E)$, diagonalisables, telles que $u^3 = v^3$. Montrer que $u = v$.

Séance 3 : Mardi 27 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 9

Exercice 13 (Oral CCINP 24, Gabrielle,2) : Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère F, sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que toutes les matrices de E sont nilpotentes.

1) Montrer que $F \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.
2) Donner la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et montrer que $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 14 : (oral CCINP 24, Tristan,2) : Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non proportionnelle à I_n, telle que $X^2 - 5X + 4$ annule S.

1) Montrer que S est diagonalisable et que $Sp(S) \subset \{1, 4\}$.
2) Montrer que $Sp(S) = \{1, 4\}$.
3) Soit $A = \frac{1}{3}(S + 2I_n)$
   a) Montrer que $A^2 = S$.
   b) Soit B une matrice définie positive telle que $B^2 = S$. Montrer que A et $A + B$ sont définies positives.
   c) Calculer $(A - B)(A + B)$ et en déduire que $A = B$.
4) On suppose que $n = 2$. On note $S = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. On suppose $A^2 = S$.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, u^p x^2 + 2v^p xy + w^p y^2 \geq 0$.

   On pourra commencer par calculer v, u, w en fonction de a, b, c.
5) Soit $T = \begin{pmatrix} e^u & e^v \\ e^v & e^w \end{pmatrix}$. Montrer que $T \in S_2^+(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (Oral CCINP 24, IMT 24, Charline,Marie,3) : soit E un espace euclidien et a un vecteur unitaire fixé dans E. On suppose $\dim(E) = n \geq 2$.

Soit $f \in L(E)$. On suppose $k \neq -1$ et on considère $f : x \mapsto x + k\langle x, a\rangle a$.

1) Montrer que f est autoadjoint.
2) Montrer que f est un automorphisme.
3) Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 16 (Oral Mines 24, Antoine,3) : Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur.

1) On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ est orthogonal à $\ker(p)$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2) On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ ne sont pas orthogonaux.

   Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$.
3) Que vient-on de démontrer ?

Exercice 17 (Oral Mines 24, Madeleine,4) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une application $a : [\![1, n]\!] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que les $(a(i))_{1 \leq i \leq n}$ soient deux à deux distincts.

On considère $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], M_{i,j} = \frac{1}{a(i) + a(j)}$.

1) Dans cette question, on suppose $\forall i \in [\![1, n]\!], a(i) = i$. Montrer que M est diagonalisable et à valeurs propres strictement positives.
2) Mêmes questions dans le cas général.

On pourra utiliser un produit scalaire et $\frac{1}{i + j} = \int_0^1 t^{i+j-1} dt$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 18 (oral Mines 24, Nassim,5) : soit E un plan vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \ \rangle$.

1) Soient p, q deux projecteurs orthogonaux, non nuls et distincts de l'identité. Soit $u = p + q$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,2]$ tel que $Sp(u) = \{\alpha, 2-\alpha\}$.
2) Montrer que si u est un endomorphisme autoadjoint qui vérifie $Sp(u) = \{\alpha, 2-\alpha\}$, avec $\alpha \in [0,2]$, alors il existe p, q deux projecteurs orthogonaux tels que $u = p + q$.

Séance 4 : Mercredi 4 Juin

Cours : revoir tout le chapitre 11

Exercice 19 (Oral IMT 23, Bastien N,3) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associée à A. Avec le moins de calculs possibles, déterminer $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$, les valeurs propres et vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 (oral CCINP 24, Nassim,2) :

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire usuel donné par $\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$.

On pose $E(A) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AA^T = MM^T\}$. 0_n est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Déterminer $E(I_n)$.
2) Montrer que si $M \in E(0_n)$, alors $\|M\|^2 = 0$. Que vaut $E(0_n)$?
3) Pour cette question, on suppose $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E(A) = \{AP, P \in O_n(\mathbb{R})\}$.
4) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $AA^T \in S_n(\mathbb{R})$. En déduire que AA^T est semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs.
5) Montrer que $E(A)$ contient toujours un élément de $S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (oral CCINP 23, Samuel,3) : pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.

Soit $\| \ \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

1) Donner une matrice non nulle admettant uniquement 0 comme valeur propre. Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ n'est pas une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
2)
   a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle. Montrer que $XX^T \in M_n(\mathbb{C})$ et calculer ses coefficients diagonaux.
   b) Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$. On pourra montrer que pour $\lambda \in Sp(A), \exists X \neq 0, AXX^T = \lambda XX^T$
3) On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$. On admet que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.
4) Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall i, j \in [\![1, n]\!], S_{i,j} = \dfrac{1}{2}$ si $|i - j| = 1$ et $S_{i,j} = 0$ sinon.
   Montrer que si λ est valeur propre complexe de S, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\exists \theta \in [0, \pi], \lambda = \cos\theta$.
5) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix}$. Calculer SX_k et en déduire les valeurs propres de S.

Exercice 22 (oral Mines 24, Matthias,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = M_n(\mathbb{R})$ et $F = M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $M \in E$ et $X \in F$, $M = (M_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. On note $\|M\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|M_{i,j}|$ et $N(X) = \sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

1) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.
2) Montrer que $\forall A, B \in E, \|AB\| \le \|A\|\|B\|$. Montrer que $\forall (A, X) \in E \times F, N(AX) \le \|A\| N(X)$
3) Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer que $A - I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
4) Soient $(A, B) \in E \times F, \|A\| < 1$. On note la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $X_0 \in F$ et $\forall p \in \mathbb{N}, X_{p+1} = AX_p + B$.
   Montrer que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $U \in F$ qui sera à préciser.

Exercice 23 (oral Mines 21,Centrale 24, Nassim,5) : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1) Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?
2) Soit $C = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 24 (Oral Centrale 1 23, Bastien N,5) : soit $A \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} Tr(A^n) = 0$. Montrer que le module des valeurs propres de A est strictement inférieur à 1.

Séance 5 : Jeudi 12 Juin

Exercice 25 : (oral IMT 24, Victor,2). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1) M est-elle diagonalisable ?
2) Déterminer ses valeurs propres. A quelle matrice est-elle semblable ?
3) Déterminer les sous-espaces propres de M.

Exercice 26 (Oral CCINP 24, Elise,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $rg(A) + rg(I_n - A) \ge n$
2) Montrer que $A^2 = A \Leftrightarrow rg(A) + rg(I_n - A) = n$

Exercice 27 (Oral CCINP 24, Simon,3) : soit E un ensemble et f une application de E dans E.

1) Montrer que si f est surjective, alors $f^2 = f \circ f$ l'est aussi.
2) On suppose $f^3 = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 28 (oral Centrale 1 2023, Samuel,3) :
Soit $f(x) = \exp(-x^2)$. Pour n entier naturel, x réel, soit $P_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)\exp\left(x^2\right)$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, soit $\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)f(t)\,dt$.

1) Montrer que P_n est polynomiale, de degré n, et que le coefficient dominant de P_n est égal à $2n$
   Etudier la parité de P_n.
2) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\left\langle P_n, X^p\right\rangle$ pour $n \ge p$. Montrer que la famille des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire. Calculer $\langle P_n, P_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 (oral Mines 24,23, Andréa,Chloé,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'ensemble des matrices diagonalisables sur $M_n(\mathbb{R})$.

1) D est-il un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
2) Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $V \subset D$. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Existe-t-il un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{R})$ inclus dans D tel que $\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}$?

Exereice 30 (Oral Mines 24, Cédrine,5) : On considère $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A(AB - BA) = 0$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, (AB)^k = A^k B^k$.
2) Montrer que si $C \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\forall k \in \mathbb{N}^*, tr(C^k) = 0$, alors C est nilpotente.
3) Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

1) Procéder par récurrence.
2) Montrer que toutes les valeurs propres de C sont nulles et procéder par l'absurde. Exprimer $tr(C^k)$ à l'aide des valeurs propres distinctes non nulles de C et de leurs multiplicités respectives.
3) Poser $C = AB - BA$ et calculer ses puissances, puis leur trace.

Séance 6 : Mercredi 18 Juin

Exercice 31 (oral CCINP 24, Grégoire,2) : Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (1) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

1) Calculer J^2.
2) J est-elle diagonalisable ?
3) Déterminer ses valeurs propres et une base de ses sous-espaces propres.

Exercice 32 (Oral Centrale 1 23, Emma,3) :
Soit $\varphi \in L(\mathbb{R}[X])$ telle que $\varphi(1) = 1$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X], (\varphi(P))' = \varphi(P')$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $\varphi(X^n) = X^n + R_n$, avec $\deg(R_n) < n$.
2) En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ. A quelles conditions la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?
3) Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Quel est son spectre ?

Exercice 33 (Oral Mines 23, Liam,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est somme de deux matrices diagonalisables.

Exercice 34 (oral CCINP 24, Sybille,4) : soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $u \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
On pose $f_u : \begin{cases} E \to E \\ x \to \langle x, u \rangle u \end{cases}$.

1) Montrer que f_u est un endomorphisme autoadjoint de E.
2) On suppose $u \in E \setminus \{0_E\}$
   a) Montrer que $\dim(\ker(f_u)) = n - 1$ et en déduire que $\operatorname{Im}(f_u) = Vect(u)$
   b) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λf_u est le projecteur orthogonal sur $Vect(u)$.
3) Soit $g \in L(E)$.

a) On suppose que $u \in E$ est vecteur propre de g. Montrer que $g \circ f_u$ est un endomorphisme autoadjoint de rang inférieur ou égal à 1.

b) On suppose maintenant que $g \circ f_u$ est un endomorphisme autoadjoint de E. En calculant de deux manières différentes $\langle g \circ f_u(x), u \rangle$, montrer que si $u \neq 0_E$, alors u est un vecteur propre de g.

4) On suppose maintenant que g est un endomorphisme autoadjoint de E de rang inférieur ou égal à 1. En choisissant une base appropriée, montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\forall x \in E, g(x) = tr(g)\langle x,u \rangle u$.

5) On note $T(E) = \left\{ f \in S^+(E), rg(f) \leq 1 \right\}$. Montrer que $\Phi : \begin{array}{l} E \to T(E) \\ u \mapsto f_u \end{array}$ est surjectif.

Exercice 35 (Oral Centrale 1 23, Mailys,4) : soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $\Phi : E \to E$ donnée par $\forall x \in [0,1], \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$.

1) Montrer que Φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de E.
2) Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 36 (Oral Mines 23, Mailys,4) : soient $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda A + \mu B$ est diagonalisable. Montrer que $AB = BA$.

Exercices en Plus

Exercice 37 (Oral CCINP 23, Ethan,1) :

1) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Montrer que si M est diagonalisable, alors $M = 0$.
2) Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 38 (oral CCINP 22,23,3, Hugo A,4) : Soient $n \geq 2$, un entier, et $A \in A_n(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

1) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^T AX \in \mathbb{R}$. Calculer $\left(X^T AX\right)^T$ et montrer que $X^T AX = 0$.
2) Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est zéro. En déduire que M et N sont inversibles.
3) Montrer que M et N commutent, et qu'il en est de même pour M^{-1} et N^{-1}. Montrer que $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas -1 comme valeur propre.
4) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in A_n(\mathbb{R})$ telle que $U = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$

Exercice 39 (Oral Mines 23,Eloi,3) : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\Phi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto aM + bM^T \end{array}$.

1) Trouver les éléments propres de Φ, sa trace et son déterminant.
2) Déterminer une condition sur a et b pour que Φ soit bijectif et lorsque c'est le cas, déterminer Φ^{-1}

Exercice 40 (oral Centrale 1 2023, Paul,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.
Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. On définit $P_\sigma \in S_n$ par $\forall i,j \in [\![1,n]\!], (P_\sigma)_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$.

1) Montrer que si $\sigma, s \in S_n$, alors $P_\sigma P_s = P_{s \circ \sigma}$. Montrer que P_σ est orthogonale.
2) Montrer que $\exists l \in \mathbb{N}^*, P_\sigma^l = I_n$.
3) P_σ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 41 (oral ENS 24, Andréa) : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \forall i,j \in [\![1,n]\!], M_{i,j} \in \{0,1\}\}$. Trouver $\max\limits_{M \in E} \left(\sum\limits_{1 \le i,j \le n} M_{i,j} \right)$.

Exercice 42 (oral ENS 24, Matthias,4) :
Soit E un espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire usuel $\langle\ \rangle$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1,...,f_k)$ une famille définie telle que pour tout x non nul, $\exists i \in [\![1,k]\!], \langle x, f_i \rangle > 0$

1) Trouver une telle famille.
2) Trouver une famille de taille $n+1$.
3) Montrer que $n+1$ est la taille minimale que peut prendre cette famille.

Indications :

Exercice 1 (Oral Mines 24, Léo,2) : utiliser des opérations élémentaires sur le déterminant et établir une relation de récurrence.

Exercice 2 (oral IMT 24, Tristan,3) :

1) Procéder par analyse et synthèse. Montrer $\mathrm{Im}(f) = Ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} f \circ f = 0_{L(E)} \\ rg(f) = \dfrac{n}{2} \end{cases}$.
2) Prendre une base $(e_1,..,e_p)$ de $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$, et pour $k \in [\![1,p]\!]$, un vecteur e_{k+p} tel que $f(e_{k+p}) = e_k$.

Exercice 3 (oral IMT 24, Diego,3) : chercher une solution particulière de la forme $a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$.

Exercice 4 (Oral CCINP 24, Madeleine,3) :

1) Trouver une base à l'aide des matrices de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
2) a) Montrer $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ en calculant les coefficients.
   b) Travailler sur l'intersection et les dimensions.
3) a) Ecrire $M = \alpha I_n + A$ et $M' = \alpha' I_n + A'$.
   b) Procéder de même pour calculer $(p(M))^2$.
4) Montrer d'abord avec 3b) que si $i \neq j$, alors $E_{i,j} \in F$, puis en déduire que $E_{i,i} \in F$.
5) Utiliser ce qui précède pour une des deux manières, et pour l'autre trouver deux matrices de trace nulle dont le produit ne l'est pas.

Exercice 5 (Oral Mines 24, Elise,3) : pour le sens retour, prendre une base $B = (e_1,...,e_n)$ de E et considérer l'application qui à $a = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in E$ associe a_i.

Exercice 6 (Oral Mines 24, Simon,4) :

1) Calculer $P(\sin(\pi - t))$.
2) Pour l'existence, partir de $\sin((2p+1)t) = \mathrm{Im}\left(\left(e^{it}\right)^{2p+1}\right)$ et développer avec le binôme pour trouver un polynôme qui convient. Pour l'unicité, supposer qu'il existe une autre solution et étudier les racines de la différence entre les deux.
3) Utiliser la formule précédente.
4) Regrouper les termes de plus haut degré et montrer que $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k}$.
5) Calculer $P_p(\sin(\theta_k))$, avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$.

Exercice 7 : (oral CCINP 24, Victor,1).

1) Faire le calcul.
2) Utiliser un polynôme annulateur.

Exercice 8 (Oral CCINP 24, Sandra,3) :

1) Etudier les lignes de A.
2) Ecrire le système $AX = \lambda X$ pour déterminer les valeurs propres de A et la dimension du sous-espace propre associé.

Exercice 9 (oral CCINP 23, Mathilde,2) :

2) a) Montrer $E = Vect\left(I_3, J, J^2\right)$ et en déduire que c'est un espace vectoriel.

   b) Utiliser la première question et calculer J^3.
3) Calculer le polynôme caractéristique.
4) Utiliser 1) et la diagonalisation de J effectuée au 3).
5) Calculer $1 + j + j^2$ et procéder avec soin par double implication.

Exercice 10 (Oral IMT 24, Charline,3) :

1) Sans difficulté.
2) Procéder par analyse et synthèse pour résoudre $u(M) = \lambda M$.
3) Distinguer plusieurs cas. Séparer notamment le cas $Tr(A) = 0$.

Exercice 11 (Oral Centrale 24, Pauline,4) :

1) Trigonaliser B et calculer B^3.
2) Utiliser ce qui précède pour montrer que 0 est la seule valeur propre de B.
3) Dans le sens direct, montrer que $rg(B) = rg(B^2)$ après avoir diagonalisé. Dans le sens retour, montrer $\ker(B) = \ker(B^3)$ par double inclusion, puis déterminer γ_B et utiliser $Tr(B) \neq 0$.

Exercice 12 (oral Centrale 24, Andréa,5) :

1) Prendre une base dans laquelle la matrice de w est diagonale et deviner la matrice de l dans cette base.
2) Ecrire la matrice de u puis de u^3 dans une base $B = (e_{1,1}, ..., e_{d_1,1}, ..., e_{1,p}, .., e_{d_p,p})$ de vecteurs propres de E telle que pour $k \in [\![1, p]\!]$, $B_k = \left(e_{1,k}, ..., e_{d_1,k}\right)$ base de $E_{\lambda_k}(u)$, avec $Sp(u) = \left\{\lambda_1, .., \lambda_p\right\}$. Considérer l'endomorphisme induit $v_{E_{\lambda_k^3}(v^3)}$ pour $k \in [\![1, p]\!]$.

Exercice 13 (Oral CCINP 24, Gabrielle,2) :

1) Prendre $M \in F \cap S_n(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.
2) Pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$, trouver le cardinal d'une base. Utiliser ensuite la formule de Grassmann.

Exercice 14 : (oral CCINP 24, Tristan,2) :

1) Utiliser le polynôme annulateur.
2) Vérifier que S ne peut pas posséder une seule valeur propre.
3) a) Faire le calcul.
   b) Calculer $X^T AX$.
   c) Faire le calcul et vérifier que $A + B$ est inversible.
4) Développer avec le binôme et faire apparaître une somme d'identités remarquables.
5) Calculer $X^T T X$ et utiliser un développement en série entière.

Exercice 15 (Oral CCINP 24, IMT 24, Charline,Marie,3) :

1) Comparer $\langle f(x), y\rangle$ et $\langle x, f(y)\rangle$.
2) Montrer que f est injective en étudiant son noyau.
3) Ecrire l'équation $f(x) = \lambda x$ et regarder quand elle admet une solution $x \neq 0_E$. Séparer plusieurs cas ($\lambda = 1,\ k = 0$)

Exercice 16 (Oral Mines 24, Antoine,3) :

1) Décomposer $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$.
2) Montrer qu'il existe $x_0 \in \ker(p)^{\perp}$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Im}(p)$ et vérifier qu'il convient.

Exercice 17 (Oral Mines 24, Madeleine,4) :

1) Calculer $X^T MX$ pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et faire apparaître l'intégrale d'une fonction positive.
2) Procéder de même. Pour obtenir $X^T MX > 0$ lorsque $X \neq 0$, poser $A = \{i \in [1,n], x_i \neq 0\}$ et considérer $a(j) = \min\{a(i), i \in A\}$.

Exercice 18 (oral Mines 24, Nassim,5) :

1) Montrer que $u \in S_2^+(\mathbb{R})$, puis déterminer $Tr(u)$ en faisant un lien avec le rang pour un projecteur.
2) Chercher à écrire la matrice diagonale de u dans une base orthonormée bien choisie comme somme de deux matrices symétriques de projecteurs orthogonaux de rang 1, donc de trace égale à 1. Traduire les conditions recherchées à l'aide des coefficients.

Exercice 19 (Oral IMT 23, Bastien N,3) : déterminer le rang avec les colonnes, puis une base du noyau. Observer les colonnes pour lesquelles tous les coefficients non diagonaux sont nuls. Utiliser la trace pour trouver la dernière valeur propre complexe α et déterminer un vecteur propre associé.

Exercice 20 (oral CCINP 24, Nassim,2) :

1) Utiliser la définition de matrice orthogonale.
2) Utiliser $tr(M^T M) = tr(MM^T)$.
3) Faire une double inclusion. Dans le sens $\subset$, poser $P = A^{-1}M$.
4) Montrer que $AA^T \in S_n^+(\mathbb{R})$.
5) Considérer la racine carrée d'une matrice symétrique positive.

Exercice 21 (oral CCINP 23, Samuel,3) :

1) Prendre une matrice triangulaire.
2) a) Effectuer le produit matriciel.
   b) Utiliser la définition de valeur propre et $\|AXX^T\|$.
3) Majorer la double somme obtenue en échangeant les deux sommes.
4) Utiliser 2b) et le théorème spectral.
5) Déterminer une expression de $\sin(a) + \sin(b)$ et montrer que les valeurs propres obtenues sont bien distinctes.

Exercice 22 (oral Mines 24, Matthias,4)

1) Vérifier les différentes propriétés.
2) Faire le calcul en utilisant les formules du produit matriciel et en majorant.
3) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A.
4) Itérer le procédé et expliciter X_p en fonction de X_0, A, B. Calculer $(I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$ et étudier sa limite.

Exercice 23 (oral Mines 21,Centrale 24, Nassim,5) :

1) Supposer B diagonalisable. Montrer que A est alors diagonalisable et que B est semblable à $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec D diagonale et inversible. Si b est canoniquement associé à B, trouver un plan stable par b et obtenir une absurdité.
2) Procéder par double implication. Dans le sens direct, calculer C^2 et conclure. Dans le sens retour, montrer que C et $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables, puis que $M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable en trouvant une base de vecteurs propres (ou en considérant les restrictions de l'endomorphisme canoniquement associé à des plans stables).

Exercice 24 (Oral Centrale 1 23, Bastien N,5) : trigonaliser A et calculer $tr\left(A^{n+j}\right)$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Ecrire matriciellement le système obtenu et montrer que la matrice qui intervient est inversible, puis étudier la limite.

Exercice 25 : (oral IMT 24, Victor,2).
1) A faire en une ligne.
2) Déterminer le rang de M et utiliser la trace.
3) Deviner des vecteurs qui conviennent ou à défaut savoir écrire et résoudre le système $MX = \lambda X$ si $\lambda \in Sp(M)$

Exercice 26 (Oral CCINP 24, Elise,3) :
1) Utiliser le théorème du rang et la formule de Grassmann.
2) Procéder par double implication. Considérer a canoniquement associé à A et exploiter le théorème du rang. Dans le sens $\Leftarrow$, montrer que $\ker(a) \oplus \ker(a - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 27 (Oral CCINP 24, Simon,3) :
1) Ecrire la définition.
2) Procéder par double implication. Dans le sens retour, prendre $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, puis $a, a' \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(a') = x'$.

Exercice 28 (oral Centrale 1 2023, Samuel,3) :
1) Procéder par récurrence et montrer que P_n est de même parité que n.
2) Pour calculer $\left\langle P_n, X^p \right\rangle$, utiliser des intégrations par parties. Pour calculer $\left\langle P_n, P_k \right\rangle$ avec $k \leq n$, écrire P_k dans la base canonique.

Exercice 29 (oral Mines 24,23, Andréa,Chloé,4) :
1) Prendre deux matrices triangulaires supérieures avec n valeurs propres distinctes telles que la somme de ces deux matrices admet 0 comme unique valeur propre.
2) Considérer l'espace vectoriel T des matrices triangulaires supérieures avec des termes diagonaux nuls. Etudier $T \cap V$. Etudier le cas $V = S_n(\mathbb{R})$: déterminer sa dimension.

Exereice 30 (Oral Mines 24, Cédrine,5) :
1) Procéder par récurrence.
2) Montrer que toutes les valeurs propres de C sont nulles et procéder par l'absurde. Exprimer $tr\left(C^k\right)$ à l'aide des valeurs propres distinctes non nulles de C et de leurs multiplicités respectives.
3) Poser $C = AB - BA$ et calculer ses puissances, puis leur trace.

Exercice 31 (oral CCINP 24, Grégoire,2) :
1) Poser le calcul.
2) Utiliser le théorème spectral ou un polynôme.
3) Trouver d'abord les valeurs propres.

Exercice 32 (Oral Centrale 1 23, Emma,3) :
1) Procéder par récurrence.
2) Ecrire la matrice de la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Montrer d'abord l'injectivité en prenant $P \in \ker(\varphi)$ et en considérant $n \geq \deg(P)$.
   Montrer ensuite la surjectivité en prenant $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $n \geq \deg(Q)$.

Exercice 33 (Oral Mines 23, Liam,3) : Ecrire A comme somme de deux matrices triangulaires, avec des coefficients tous distincts sur la diagonale.

Exercice 34 (oral CCINP 24, Sybille,4) :
1) Bien montrer que f_u est un endomorphisme. Comparer $\left\langle f_u(x), y \right\rangle$ et $\left\langle f_u(y), x \right\rangle$ pour $x, y \in E$.

2) a) Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

b) Chercher λ tel que $(\lambda f_u)\circ(\lambda f_u)=\lambda f_u$ et vérifier qu'il convient en reconnaissant l'expression d'une projection orthogonale.

3) a) Comparer $\langle g\circ f_u(x),y\rangle$ et $\langle g\circ f_u(y),x\rangle$ pour $x,y\in E$.

b) Montrer que si $D=Vect(u)$, alors $g(u)\in\left(D^{\perp}\right)^{\perp}=D$.

4) Lorsque g n'est pas l'application nulle, considérer une valeur propre non nulle λ et choisir un vecteur propre unitaire u associé. Prendre une base orthonormée de vecteurs propres de g.

5) Vérifier que Φ est à valeurs dans $T(E)$. Utiliser 4) et remarquer que $tr(g)\geq 0$. Considérer $\sqrt{tr(g)}$.

Exercice 35 (Oral Centrale 1 23, Mailys,4) :

1) Montrer que Φ est linéaire et que si $f\in E$, alors $\Phi(f)$ est continue (par exemple avec Chasles).
2) Montrer que si $f\in E$, alors $\Phi(f)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$ et calculer $\Phi(f)''$. Utiliser une analyse-synthèse pour trouver $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 36 (Oral Mines 23, Mailys,4) : commencer par trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ soit diagonalisable. Si f et g sont canoniquement associés à A et à B, prendre une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et traduire que la matrice de $\lambda f+g$ doit toujours être diagonalisable.

Exercice 37 (Oral CCINP 23, Ethan,1) :

1) Utiliser un polynôme annulateur.
2) Calculer j^3, $1+j+j^2$ et M^2.

Exercice 38 (oral CCINP 22,23,3, Hugo A,4) :

1) Regarder la taille de la matrice X^TAX et calculer sa transposée de deux manières.
2) Prendre une valeur propre et un vecteur propre non nul associé.
3) Relier M^T avec N, puis exprimer $\Omega^T\Omega$ en fonction de M. Pour montrer que -1 n'est pas valeur propre de Ω, exprimer M en fonction de N et I_n.
4) Procéder par analyse et synthèse. Une fois B trouvée, montrer que $(I_n+U)B=-(I_n+U)B^T$.

Exercice 39 (Oral Mines 23,Eloi,3) :

1) Ecrire la matrice de Φ dans une base adaptée à la décomposition $S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$.
2) Utiliser la matrice précédente et exprimer Φ^{-1} sur $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ ou résoudre l'équation $\Phi(M)=N$.

Exercice 40 (oral Centrale 1 2023, Paul,4) :

1) Faire le calcul puis montrer $P_{\sigma^{-1}}=(P_\sigma)^T$ en revenant aux coefficients.
2) Justifier que $\{\sigma^k, k\in\mathbb{N}\}$ est un ensemble fini.
3) Utiliser un polynôme sur $\mathbb{C}$ et remarquer que si P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors $(P_\sigma)^2=I_n$

Exercice 41 (oral ENS 24, Andréa) : considérer une matrice avec une colonne de 1 et dans les autres colonnes un seul terme nul et tous les autres égaux à 1. Placer le terme nul de manière à ce que les colonnes ne soient pas liées. Montrer qu'une matrice ayant davantage de 1 ne peut pas être inversible.

Exercice 42 (oral ENS 24, Matthias,4) :

1) Prendre $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et considérer $F=(e_1,\dots,e_n,-e_1,\dots,-e_n)$.
2) Prendre $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et considérer $F=\left(e_1,\dots,e_n,-\sum_{k=1}^{n}e_k\right)$.
3) Procéder par l'absurde et prendre $x\in Vect(f_1,\dots,f_{k-1})^{\perp}$.