

Analyse

Séance 1 : Jeudi 15 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 1 (avec les DL, les primitives, la trigo)

Exercice 1 (oral CCINP 23, Samuel, CCINP24, Sybille, 2) : soit $f : [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$f(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0.$$

- 1) f est-elle dérivable en 0 ?
- 2) Si f n'était pas dérivable en 0, comment cela se verrait-il graphiquement ?
- 3) Déterminer une équation de la tangente à C_f en 0. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Ind :

- 1) Etudier le taux d'accroissement.
- 2) Revenir à la définition de dérivée et à son interprétation graphique.
- 3) Déterminer un équivalent de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente pour en obtenir le signe.

1) On calcule $\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t^2 \sin(t)}$, avec $\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$.

Donc $\frac{f(t) - f(0)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{6t^3}$. Donc $\frac{f(t) - f(0)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{6}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$

- 2) On note $A(0, 0)$ et $M(t) (t, f(t))$. Le taux d'accroissement représente la pente de la droite $(AM(t))$. Si f n'était pas dérivable en 0, cette pente ne convergerait pas une limite finie quand t tend vers 0. Elle pourrait tendre vers une limite infinie ou ne pas avoir de limite.

3) Une équation de la tangente à C_f en 0 est $y = f(0) + tf'(0) = \frac{1}{6}t$

Puis $f(t) - \frac{1}{6}t = \frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)} - \frac{1}{6}t = \frac{t - \sin(t) - \frac{1}{6}t^2 \sin(t)}{t \sin(t)}$

Or $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^5)$ et $t^2 \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^3 - \frac{1}{6}t^5 + o(t^5)$.

Donc $f(t) - \frac{1}{6}t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right)t^3$, avec $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} > 0$

Donc C_f est au dessus de sa tangente en 0 pour $t > 0$

Exercice 2 (oral CCINP 24, Diego, 3) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = -4 + \sum_{k=1}^n x^k$

- 1) Démontrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la notera x_n dans la suite.
- 2)
 - a) Calculer x_1, x_2 . Montrer que $x_5 < 1$.
 - b) Etudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite (x_n) est monotone et convergente. On notera l sa limite.
- 3)
 - a) Montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.

- b) Montrer que $x_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- 4) On pose $\delta_n = x_n - l$. Montrer que $\delta_n = \frac{x_n^{n+1}}{5}$. En déduire que $n \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- 5) Etablir que $\delta_n \sim K l^{n+1}$. Préciser la valeur de K .

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de la bijection.
- 2) a) Faire le calcul ; remarquer que $P_5(1) = 1 > 0$.
b) Montrer $P_{n+1}(x_n) > P_{n+1}(x_{n+1})$.
- 3) a) Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique et séparer le cas $x_n = 1$.
b) Utiliser $x_5 < 1$ et la monotonie de (x_n) .
- 4) Déterminer la valeur de l et procéder par encadrement.
- 5) Ecrire $\frac{\delta_n}{l^{n+1}}$ sous forme exponentielle et déterminer sa limite en utilisant 4).

- 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = -4 + \sum_{k=1}^n x^k$. P_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0} P_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) \right[=]-4, +\infty[$. Or $0 \in]-4, +\infty[$.
Donc par théorème de la bijection, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

- 2) a) On a directement $x_1 = 4$ et $-4 + x + x^2 = 0$, donc $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

De plus, $P_5(1) = 1 > P_5(x_5)$, donc comme P_5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x_5 < 1$.

b) $P_{n+1}(x_n) = -4 + \sum_{k=1}^{n+1} x_n^k = 0 + x_n^{n+1} > 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$.

Donc comme P_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $x_{n+1} < x_n$.

Donc (x_n) est décroissante, minorée par 0, et converge vers un réel $l \in \mathbb{R}_+$.

- 3) a) On sait que $0 = -4 + \sum_{k=1}^n x_n^k$.
- Si $x_n = 1$, on a bien $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.
 - Si $x_n \neq 1$, $\sum_{k=1}^n x_n^k = x_n \left(\frac{1 - x_n^n}{1 - x_n} \right)$, donc $x_n \left(\frac{1 - x_n^n}{1 - x_n} \right) = 4$ et $x_n (1 - x_n^n) = 4(1 - x_n)$. On obtient bien dans tous les cas $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.

b) On sait que $x_5 < 1$ et que (x_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc pour $n \geq 5$, $0 \leq x_n^{n+1} \leq x_5^{n+1}$ et par encadrement, $x_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- 4) On déduit de ce qui précède que $-5x_n + 4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{5} = l$

On a donc $\delta_n = x_n - \frac{4}{5}$. Or $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$, donc $\delta_n = \frac{x_n^{n+1}}{5}$.

On a donc en reprenant l'encadrement du 3b) : $0 \leq \frac{nx_n^{n+1}}{5} \leq n \frac{x_5^{n+1}}{5}$, avec $0 < x_5 < 1$.

Donc par encadrement, $\boxed{n \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

5) Pour la dernière question, on étudie $\frac{\delta_n}{l^{n+1}} = \frac{1}{5} \exp\left((n+1) \ln\left(\frac{x_n}{l}\right)\right) = \frac{1}{5} \exp\left((n+1) \ln\left(1 + \frac{\delta_n}{l}\right)\right)$.

Comme $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $(n+1) \ln\left(1 + \frac{\delta_n}{l}\right) \sim \frac{n\delta_n}{l}$. Avec la question précédente, $(n+1) \ln\left(1 + \frac{\delta_n}{l}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

donc $\frac{\delta_n}{l^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}$ et $\delta_n \sim K l^{n+1}$, avec $K = \frac{1}{5}$

Exercice 3 (oral Centrale 1 23, Alice,3) : soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

On note $a_n = \min\left\{p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^p f(k) \geq n\right\}$.

- 1) Montrer que a_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$.
- 2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^p f(k)$.
- 3) Déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers l'infini.

Ind :

- 1) Utiliser la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ et majorer $\sum_{k=1}^p f(k)$ pour $p < n$
- 2) Comparer avec une intégrale.
- 3) Trouver de deux manières différentes un équivalent de $\sum_{k=1}^{a_n} f(k)$ en utilisant la question précédente et que $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \geq n \geq \sum_{k=1}^{a_n-1} f(k)$.

- 1) On sait que $\alpha \in]0,1[$, donc avec les séries de Riemann, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

Comme il s'agit d'une série à termes positifs, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p f(k) = +\infty$ donc $\left\{p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^p f(k) \geq n\right\}$ n'est pas vide et

$\boxed{a_n \text{ est défini pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p < n$, alors $\sum_{k=1}^p f(k) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^\alpha} \leq p < n$, donc on n'a pas $a_n < n$.

Dès lors, nécessairement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n}$

- 2) On effectue une comparaison avec une intégrale : f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour $2 \leq k \leq p$, on

sait que $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$, donc $1 + \int_2^{p+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^p f(k) \leq 1 + \int_1^p f(t) dt$.

Or $\int_1^p f(t) dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^p$, donc $\int_1^p f(t) dt = \frac{1}{1-\alpha} (p^{1-\alpha} - 1) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, donc $1 + \int_1^p f(t) dt \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

De même, $1 + \int_2^{p+1} f(t) dt \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Donc par théorème d'encadrement sur les équivalents, $\boxed{\sum_{k=1}^p f(k) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$

- 3) Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$, on sait que $a_n \rightarrow +\infty$. Donc $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Or si

$$A_n = \left\{ p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^p f(k) \geq n \right\}, \text{ on sait que } a_n = \min(A_n) \in A_n \text{ et que } a_n - 1 \notin A_n.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{a_n} f(k) \geq n \geq \sum_{k=1}^{a_n-1} f(k) \text{ et } \sum_{k=1}^{a_n} f(k) \geq n \geq \sum_{k=1}^{a_n} f(k) - \frac{1}{a_n^\alpha}.$$

$$\text{Donc } n \leq \sum_{k=1}^{a_n} f(k) \leq n + \frac{1}{a_n^\alpha} \leq n + 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{a_n} f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

$$\text{Donc } \frac{a_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \text{ et } \boxed{a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left((1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} n^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)}$$

Exercice 4 (oral Centrale 24, Quentin,4) : soit une fonction f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in [0,1]$ tels que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^{a_k} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt$.
- 2) Déterminer la nature de la suite de terme général $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
- 3) Que devient le résultat si on suppose seulement f à valeurs positives ?

Ind :

- 1) Appliquer le théorème de la bijection à $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$.
- 2) Utiliser de nouveau la fonction F et les sommes de Riemann.
- 3) Prendre pour f la fonction nulle et choisir $a_0, a_1, \dots, a_n \in [0,1]$ (qui dépendent de n) pour que (U_n) diverge.

- 1) On considère la fonction F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Comme f est continue, par théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $[0,1]$ et $F' = f$.

Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, F est strictement croissante, et continue sur l'intervalle $[0,1]$. Si

$$k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{ on a } F(0) = 0 \leq \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 f(t) dt = F(1).$$

Donc par théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), il existe $a_k \in [0,1]$ tel que

$$F(a_k) = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt. \quad \boxed{\text{On a bien } \int_0^{a_k} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt.}$$

- 2) Avec ce qui précède, on peut écrire que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $F(a_k) = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt$. Dès lors, on pose $c = \int_0^1 f(t) dt$. Comme la fonction f est continue et strictement positive, on a nécessairement

$c > 0$. F est strictement croissante, et continue sur l'intervalle $[0, 1]$, elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $[F(0), F(1)] = [0, c]$. On a donc $a_k = F^{-1}\left(\frac{kc}{n}\right)$.

Par théorème de convergence des sommes de Riemann, $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{kc}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 F^{-1}(ct) dt$.

Donc la suite (U_n) est convergente.

De plus, si on fait le changement de variable $u = F^{-1}(ct)$, il vient $F(u) = ct$, donc $dt = \frac{f(u)}{c} du$.

Enfin, quand $t = 1$, $u = F^{-1}(F(1)) = 1$

Donc $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{c} \int_0^1 u f(u) du$

- 3) Si on suppose seulement f à valeurs positives, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique au 1), mais $a_0, a_1, \dots, a_n$ ne sont plus nécessairement uniques.

Par exemple, si f est nulle, on peut prendre pour n pair $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ et $U_n = 0$, puis pour n impair $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 1$, et ainsi $U_n = 1$.

Dès lors, (U_{2n}) et (U_{2n+1}) n'ont pas même limite, donc (U_n) diverge.

Le résultat devient faux si on suppose seulement f à valeurs positives.

Exercice 5 (oral Mines 24, Cédrine, 4) : Etudier la convergence de la suite (U_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$U_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right).$$

$$\text{Ind : considérer } V_n = \ln(U_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} + \sum_{k=1}^n \left(\ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) - \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right).$$

Etudier la convergence du premier morceau avec les sommes de Riemann et calculer l'intégrale obtenue. Majorer le second morceau avec Taylor-Lagrange et montrer qu'il tend vers 0.

$$\text{On étudie } V_n = \ln(U_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$$

$$\text{Il vient } V_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} + \sum_{k=1}^n \left(\ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) - \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$$

$$\text{Alors } a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt.$$

$$\text{On la calcule avec } t - t^2 = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - (2t-1)^2).$$

$$\text{Donc } \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - (2t-1)^2} dt. \text{ On pose } u = 2t-1.$$

$$\text{Il vient } \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du \text{ par parité.}$$

$$\text{Donc en posant } u = \sin x, \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx, \text{ donc } \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = \frac{\pi}{8}$$

On note $b_n = \sum_{k=1}^n \left(\ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) - \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$

On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $h : u \mapsto \ln(1+u)$ entre 0 et $x \in \mathbb{R}_+$, à l'ordre $n=1$

Il vient $h'(u) = \frac{1}{1+u}$ et $h''(u) = -\frac{1}{(1+u)^2}$, donc $\forall u \in \mathbb{R}_+, |h''(u)| \leq 1$

Donc $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$. Donc $|b_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^4} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^4}$, puis $|b_n| \leq \frac{1}{2n}$.

Donc par encadrement, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $V_n = a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{8}$, donc $\boxed{U_n = \exp(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

Exercice 6 (Centrale 123, Thomas,4) ;

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On pose $U_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + U_n^2$.

- 1) Montrer que $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- 2) Soit $V_n = \frac{\ln(U_n)}{2^n}$. Montrer que (V_n) converge vers un réel β .
- 3) Montrer que $|V_n - \beta|_{n \rightarrow +\infty} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
- 4) Déterminer un équivalent de U_n

Ind :

- 1) Montrer que (U_n) est monotone mais ne converge pas.
 - 2) Calculer $V_{n+1} - V_n$ et utiliser le lien suite-série.
 - 3) Considérer $\sum_{k=n}^N (V_{k+1} - V_k)$ à n fixé et étudier la limite quand N tend vers l'infini.
 - 4) Ecrire U_n en fonction de V_n et conclure.
- 1) En premier lieu, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = U_n^2 \geq 0$, donc (U_n) est croissante. Si elle converge, alors elle tend vers $b \geq U_0 > 0$, et en passant à la limite, on doit avoir $b = b + b^2$, donc $b = 0$. C'est absurde, donc (U_n) est croissante et ne converge pas : $\boxed{U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$

2) $V_{n+1} = \frac{\ln(U_{n+1})}{2^{n+1}} = \frac{\ln(U_n^2 + U_n)}{2^{n+1}} = \frac{\ln\left(U_n^2 \left(1 + \frac{1}{U_n}\right)\right)}{2^{n+1}}$.

Donc $V_{n+1} = V_n + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{U_n}\right)}{2^{n+1}}$. Donc $V_{n+1} - V_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ puisque $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Or $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est de signe fixe et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} (V_{n+1} - V_n)$ converge et avec le lien suite-série, $\boxed{\text{la suite } (V_n) \text{ converge vers un réel } \beta.}$

3) On reprend le résultat précédent : $V_{n+1} = V_n + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{U_n}\right)}{2^{n+1}}$. On fixe $n \geq 1$ et $N \geq n$.

Alors $\sum_{k=n}^N (V_{k+1} - V_k) = \sum_{k=n}^N \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{U_k}\right)}{2^{k+1}}$. De plus, pour $k \geq n$, $U_k \geq U_n$ car (U_n) est croissante. Donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{U_k}\right) \leq \frac{1}{U_k} \leq \frac{1}{U_n} \text{ et ainsi } |V_{N+1} - V_n| = \sum_{k=n}^N \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{U_k}\right)}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{U_n} \sum_{k=n}^N \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Donc en passant à la limite quand N tend vers l'infini (avec 2), on sait que (V_n) converge :

$$|\beta - V_n| \leq \frac{1}{2U_n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}. \text{ Donc } |V_n - \beta| = \frac{1}{2^n} \frac{1}{U_n} \text{ et comme } U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \boxed{|V_n - \beta|_{n \rightarrow +\infty} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)}$$

4) On sait que $V_n = \frac{\ln(U_n)}{2^n}$, donc $U_n = \exp(2^n V_n) = \exp(2^n \beta) \exp(2^n (V_n - \beta))$

Or avec 3), $2^n (V_n - \beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\boxed{U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(2^n \beta)}$

Séance 2 : Mardi 20 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 3

Exercice 7 (oral CCINP 24, Tristan,2) : Soient $U_n = \int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t} dt$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

- 1) Montrer l'existence de I
- 2) Déterminer un équivalent de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Ind :

- 1) Etudier $t^{3/2} f(t)$ en $+\infty$.
- 2) Utiliser une intégration par parties.

1) Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}$, définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Étude en } +\infty : t^{3/2} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}, \text{ donc } t^{3/2} f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$, f l'est aussi.

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ est bien convergente.}}$

2) On effectue une intégration par parties.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $a(t) = \ln(1+t)$ et $b(t) = \text{Arctan}(t)$, donc $b'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

$$\text{Il vient ainsi } U_n = \text{Arctan}(n) \ln(1+n) - \int_0^n \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

Or $\text{Arctan}(n) \ln(1+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \ln(n)$, donc $\text{Arctan}(n) \ln(1+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} \ln(n) + o(\ln(n))$.

De plus, $\int_0^n \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$, donc $\int_0^n \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(n))$.

Donc $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} \ln(n) + o(\ln(n))$ et $\boxed{U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \ln(n)}$

Exercice 8 (Oral CCINP 24, Madeleine,2) : existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.

Ind : effectuer une intégration par parties, puis une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

On pose pour $x \in [1, +\infty[$: $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$. f est continue sur $[1, +\infty[$.

De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^2}$, donc comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, f l'est aussi et I est bien convergente.

On effectue une intégration par parties : on pose $u(x) = \arctan(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$.

On constate que $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Donc } I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)x} dx.$$

On a $\frac{1}{(1+x^2)x} = \frac{1}{(x+i)(x-i)x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+i)} - \frac{1}{2(x-i)}$ en décomposant en éléments simples.

$$\text{Donc } \frac{1}{(1+x^2)x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)x} dx = \left[\ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^{+\infty}.$$

$$\text{Donc } \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)x} dx = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} (\ln 2), \text{ donc } \boxed{I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}}$$

Exercice 9 (oral CCINP 24, Nassim,3) : on pose $J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{ch(t)} \right)^x dt$

- 1) Déterminer le domaine de définition de J .
- 2) Justifier la continuité de J .
- 3) Calculer $J(1)$ et $J(2)$
- 4) Etablir une relation entre $J(x)$ et $J(x+2)$.
- 5) Calculer $nJ(n)J(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 6) Déterminer un équivalent de $J(n)$ en $+\infty$.

Ind :

- 1) Poser pour $x, t \in \mathbb{R}$ $f(t, x) = \left(\frac{1}{ch(t)} \right)^x = \exp(-x \ln(cht))$.
- 2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- 3) Déterminer la dérivée de th .
- 4) Effectuer une intégration par parties.
- 5) Montrer que si $W_n = nJ(n)J(n+1)$, alors (W_n) est constante.
- 6) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $J(n+2) \leq J(n+1) \leq J(n)$. Utiliser ensuite ce qui précède.

$$1) \text{ On pose pour } x, t \in \mathbb{R} : f(t, x) = \left(\frac{1}{ch(t)} \right)^x = \exp(-x \ln(cht)).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et paire. Il suffit donc d'étudier en $+\infty$.

$$f(t, x) = \exp(-x \ln(cht)) = \exp \left(-x \ln \left(e' \left(\frac{1+e^{-2t}}{2} \right) \right) \right) = \exp \left(-tx - x \ln \left(\frac{1+e^{-2t}}{2} \right) \right).$$

Donc $f(t, x) = e^{-tx} \exp\left(-x \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right)\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-tx} 2^x$. Or $t \mapsto e^{-tx} 2^x$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 0$. Donc $D_J = \mathbb{R}_+^*$.

2) On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t, x) = \exp(-x \ln(cht))$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- On prend $a > 0$ et on considère $x \in [a, +\infty[$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $ch(t) \geq 1$ et $|f(t, x)| = \exp(-x \ln(cht)) \leq \exp(-a \ln(cht)) = f(a, t)$, où $t \mapsto f(a, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc par théorème de continuité des intégrales à paramètres, J est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) On calcule ces deux intégrales, en utilisant par exemple la parité de la fonction :

$$J(1) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch(t)} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt.$$

On effectue un changement de variable et on pose $u = e^t$. On a alors $du = e^t dt$ et il vient :

$$J(1) = 4 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du = \pi$$

Par ailleurs, $J(2) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^2(t)} dt = 2 [th(t)]_0^{+\infty}$. Or $th(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$. Donc $J(2) = 2$.

4) Soit $x > 0$. On a $J(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch^{x+1}(t)} dt$

On pose $u(t) = \frac{1}{ch^{x+1}(t)} = (ch(t))^{-x-1}$, avec $u'(t) = (-x-1)sh(t)(ch(t))^{-x-2}$

Et $v'(t) = ch(t)$, avec $v(t) = sh(t)$.

$u(t)v(t) = \frac{sh(t)}{ch^{x+1}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{e^{t(x+1)}} 2^x$, donc $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$.

Donc on peut intégrer par parties : $J(x) = 2(x+1) \int_0^{+\infty} \frac{sh^2(t)}{ch^{k+2}(t)} dt$.

Donc $J(x) = 2(x+1) \int_0^{+\infty} \frac{(ch^2(t)-1)}{ch^{k+2}(t)} dt = (x+1)(J(x) - J(x+2))$

On conclut : $J(x+2) = \frac{x}{x+1} J(x)$

5) On note $W_n = nJ(n)J(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On a vu au 3) que $W_1 = J(1)J(2) = 2\pi$. De plus, $W_{n+1} = (n+1)J(n+1)J(n+2)$.

Donc $W_{n+1} = (n+1)J(n+1)J(n+2) = W_n$ avec 4).

Donc (W_n) est constante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, nJ(n)J(n+1) = 2\pi$

6) $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{ch^{n+2}(t)} \leq \frac{1}{ch^{n+1}(t)} \leq \frac{1}{ch^n(t)}$.

Donc par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le « bon sens ») : $J(n+2) \leq J(n+1) \leq J(n)$.

On en déduit que $\frac{n}{n+1}J(n) \leq J(n+1) \leq J(n)$.

Donc par théorème d'encadrement sur les équivalents, $J(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} J(n)$.

Donc en utilisant 5) : $nJ(n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\pi$. On en conclut $J(n) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Exercice 10 (oral IMT 24, Pauline,4) : Soit f une fonction de classe C^1 , à valeurs réelles. On suppose que

$f(0) = f(1) = 0$. On pose $I(f) = \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) dt$.

- 1) Justifier la convergence de $I(f)$.
- 2) Démontrer que $I(f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sin^2(\pi t)} f^2(t) dt$.
- 3) Démontrer que $\pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt$

Ind :

- 1) Utiliser Taylor-Young pour l'étude aux bornes.
- 2) Faire une intégration par parties.
- 3) Etudier le signe de $d = \int_0^1 (f'(t))^2 dt - \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 (f'(t))^2 dt - \pi^2 \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} (1 - \cos^2(\pi t)) dt$.

- 1) On note $a(t) = \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)$ pour $t \in]0, 1[$.

- a est continue sur $]0, 1[$
- Etude en 0 : comme f est une fonction de classe C^1 , il vient d'après Taylor-Young :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(0) + t f'(0) + o(t) = t f'(0) + o(t)$$

Donc $a(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{(1 + o(1))(t f'(0) + o(t))(f'(0) + o(1))}{\pi t + o(t)} \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1)$. Or $t \mapsto 1$ est intégrable en 0, donc a l'est aussi.

- Etude en 1 : d'après Taylor-Young, $f(1-h) \underset{h \rightarrow 0^+}{=} f(1) - h f'(1) + o(h) = -h f'(1) + o(h)$.

Donc $a(1-h) \underset{h \rightarrow 0^+}{=} \frac{(-1 + o(1))(-f'(1) + o(1))(f'(1) + o(1))}{\pi + o(1)} \underset{h \rightarrow 0^+}{=} O(1)$. Or $h \mapsto 1$ est intégrable en 0, donc a est intégrable en 1.

Finalement, a est intégrable sur $]0, 1[$ et $I(f)$ est bien convergente.

- 2) On effectue une intégration par parties.

On pose $u(t) = \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)}$. Alors $u'(t) = \frac{-\pi(\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t))}{\sin^2(\pi t)} = \frac{-\pi}{\sin^2(\pi t)}$.

On note $v'(t) = f(t) f'(t)$ et $v(t) = \frac{1}{2} f^2(t)$

Alors $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{(1 + o(1))(t f'(0) + o(t))^2}{\pi t + o(t)} = \frac{t(1 + o(1))(f'(0) + o(1))^2}{\pi + o(1)} \rightarrow 0$.

De même, $u(1-h)v(1-h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, donc $u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 1}{\rightarrow} 0$.

Donc
$$I(f) = \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sin^2(\pi t)} f^2(t) dt$$

3) On calcule $d = \int_0^1 (f'(t))^2 dt - \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt$.

Il vient $d = \int_0^1 (f'(t))^2 dt - \pi^2 \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} (1 - \cos^2(\pi t)) dt$.

Or $\int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt = \frac{2}{\pi} I(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) dt$.

De plus, $\int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} (1 - \cos^2(\pi t)) dt = \int_0^1 f^2(t) dt$ et $\int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt = \frac{2}{\pi} I(f)$ convergent.

Donc $\int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} (\cos^2(\pi t)) dt$ converge aussi par différence.

Donc $d = \int_0^1 (f'(t))^2 dt - 2\pi \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) dt + \pi^2 \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} (\cos^2(\pi t)) dt$.

Donc $d = \int_0^1 \left(f'(t) - \pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) \right)^2 dt \geq 0$

Donc on a bien $\boxed{\pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt}$

Exercice 11 (oral Centrale 24, Cédrine, Elise, 4) : soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que f^2 est intégrable en 0.

On suppose aussi $f(x) \int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+^*$.

- 1) On suppose que f admet une limite finie en 0. Que vaut-elle ?
- 2) Donner toutes les fonctions qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \int_0^x f^2(t) dt = l$.
- 3) Démontrer que f admet une limite finie en 0.

Ind :

- 1) Procéder par l'absurde et supposer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a > 0$. Montrer alors que $\int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ en utilisant la définition de limite et en coupant l'intégrale en deux.
- 2) Procéder par analyse et synthèse. Considérer $g(x) = \int_0^x f^2(t) dt$ et déterminer g puis f .
- 3) Utiliser de nouveau g et montrer qu'elle admet une limite strictement positive en $+\infty$.
- 1) On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}$. Alors comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a nécessairement $a \in \mathbb{R}_+$.

On suppose par l'absurde que $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors par définition de limite, on peut considérer $A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \geq A, f(x) \geq \frac{a}{2}$.

Dès lors, $\int_0^x f^2(t) dt = \int_0^A f^2(t) dt + \int_A^x f^2(t) dt \geq (x - A) \left(\frac{a}{2} \right)^2$.

Donc $\int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui est absurde.

Donc $a = 0$ et $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

- 2) On suppose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \int_0^x f^2(t) dt = l$ (analyse).

On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^* : g(x) = \int_0^x f^2(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt + \int_1^x f^2(t) dt$. Comme f^2 est continue, g est une primitive de f^2 . Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = f^2(x) \geq 0$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^2(x) g^2(x) = l^2$ et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) g^2(x) = l^2$.

Il vient donc en intégrant pour $x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{1}{3} g^3(x) = l^2 x + C$, où C est une constante réelle.

De plus, f^2 est intégrable en 0, donc $g(x) = \int_0^1 f^2(t) dt + \int_1^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Donc on a forcément $C = 0$ et $g(x) = 3^{1/3} l^{2/3} x^{1/3}$ et comme $f(x) g(x) = l$, $f(x) = 3^{-1/3} l^{1/3} x^{-1/3}$ donc

$$f(x) = \left(\frac{l}{3x} \right)^{1/3}.$$

Réciproquement, on suppose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \left(\frac{l}{3x} \right)^{1/3} = l^{1/3} 3^{-1/3} x^{-1/3}$.

Alors $\int_0^x f^2(t) dt = l^{2/3} 3^{-2/3} 3x^{1/3} = l^{2/3} 3^{1/3} x^{1/3}$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \int_0^x f^2(t) dt = l$.

La seule fonction vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \int_0^x f^2(t) dt = l$ est donnée par $f(x) = \left(\frac{l}{3x} \right)^{1/3}$.

- 3) On a vu au 2) que si $g(x) = \int_0^x f^2(t) dt$, alors $g'(x) = f^2(x) \geq 0$. Donc g est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle admet une limite $b \in [0, +\infty]$ lorsque x tend vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

De plus, $f(x) g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$, donc soit $A \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq A, f(x) g(x) \geq \frac{l}{2} > 0$. On a donc $\forall x \geq A, g(x) > 0$ et

$b > 0$. De plus, pour $x \geq A, f(x) = \frac{1}{g(x)} (f(x) g(x))$.

Donc f admet une limite finie en $+\infty$ par produit (qui finalement est nulle avec 1)).

Exercice 12 (oral Centrale 1 2023, Ali,4) : on considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt$

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 2) Montrer l'existence et calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de continuité puis le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Se placer sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ pour la dérivation.
- 2) Montrer que I existe et que $I = f(0)$ en intégrant par parties. Puis expliciter f'', f' et enfin f sur $\mathbb{R}_+^*$. Exploiter les limites en $+\infty$ pour trouver les constantes d'intégration.

- 1) Soit $g(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t > 0$.

On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g(x, t)| \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$

φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$t^{3/2} \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, donc φ est intégrable en $+\infty$.

En outre, $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{t^2}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{2}$ est intégrable en 0 donc φ aussi.

Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout $x, t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x, t)$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec ce qui précède (car φ l'est).

De plus, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-tx}$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable en $+\infty$ (car

$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$) et en 0 (car $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2}$) donc est intégrable.

- En outre, si $0 < a < b$ et $x \in [a, b]$, alors $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| (1 - \cos(t)) e^{-tx} \right| \leq 2e^{-ta} = h(t)$

Où h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est de classe C^2 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-tx} dt$

- 2) On fait une intégration par parties : on pose $a'(t) = \sin(t)$, $a(t) = 1 - \cos(t)$, $b(t) = \frac{1}{t}$ et $b'(t) = -\frac{1}{t^2}$.

$a(t)b(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $a(t)b(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2}$ donc $a(t)b(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Donc par intégration par parties, I a même nature que $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ qui converge avec 1).

Donc I existe et $I = f(0)$.

En outre, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-tx} dt = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-x)} dt \right)$.

Or $\int_0^{+\infty} e^{t(i-x)} dt = -\frac{1}{x-i} \left[e^{t(i-x)} \right]_0^{+\infty}$, avec $|e^{t(i-x)}| = e^{-tx} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{t(i-x)} dt = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$ et $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, donc il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + C.$$

En outre, $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(t))}{t} e^{-tx} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par théorème de convergence dominée (en effet, on

prend $x \in [1, +\infty[$ et il vient $\left| \frac{(1 - \cos(t))}{t} e^{-tx} \right| \leq \left| \frac{(1 - \cos(t))}{t} e^{-t} \right|$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec 1))

Donc $C = 0$

On veut une primitive de $x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$:

$$\int^x \left(\ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right) dt = \left[t \left(\ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right) \right]^x - \int^x \left(1 - \frac{t^2}{1+t^2} \right) dt = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x)$$

Donc il existe $D \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x) + D$

De même, par convergence dominée, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et $\frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = -\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$, donc

$D = \frac{\pi}{2}$. Enfin, f est continue en 0 et $\frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = x \ln(x) - x \ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}$.

Donc $I = f(0) = \frac{\pi}{2}$

Séance 3 : Vendredi 23 Mai 3

Cours : revoir tout le chapitre 4

Exercice 13 (oral CCINP 23, Maxime,3) : soit $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Etudier la convergence de la série $\sum 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right)$.
- 2) Calculer sa somme.

Ind :

- 1) Prendre un équivalent.
- 2) Linéariser $\sin^3 \alpha$ puis calculer la somme partielle de la série à l'aide d'une somme télescopique.

- 1) On pose $U_n = 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right)$. Si $x = 0$, $U_n = 0$ et $\sum U_n$ converge.

Si $x \neq 0$, $U_n = 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3}{3^{2n}} = \frac{x^3}{9^n}$. Or $\left(\frac{x^3}{9^n} \right)$ est de signe fixe et $\sum \frac{x^3}{9^n}$ converge, donc

$\sum U_n$ converge.

- 2) On linéarise $\sin^3 \alpha = \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3i\alpha} - 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} - e^{-3i\alpha}) = \frac{3}{4} \sin(\alpha) - \frac{1}{4} \sin(3\alpha)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On étudie les sommes partielles, car si on coupe en deux, les deux séries obtenues ne sont pas convergentes.

$$\sum_{n=0}^N 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right) = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^N 3^n \sin \left(\frac{x}{3^n} \right) - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^N 3^n \sin \left(\frac{3x}{3^n} \right).$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right) = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^N 3^{n+1} \sin \left(\frac{x}{3^n} \right) - \sum_{n=0}^N 3^n \sin \left(\frac{x}{3^{n-1}} \right) \right)$$

$$\sum_{n=0}^N 3^n \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right) = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{N+1} 3^n \sin \left(\frac{x}{3^{n-1}} \right) - \sum_{n=0}^N 3^n \sin \left(\frac{x}{3^{n-1}} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(3^{N+1} \sin \left(\frac{x}{3^N} \right) - \sin(3x) \right)$$

Si $x \neq 0$, $3^{N+1} \sin\left(\frac{x}{3^N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 3x$, donc $3^{N+1} \sin\left(\frac{x}{3^N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 3x$. Ceci reste vrai si $x = 0$.

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}(3x - \sin(3x))}$$

Exercice 14 (Oral CCINP 24, Grégoire, 3) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $U_n(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

1) Montrer la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose alors $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ si $s > 0$

2) a) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left| \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| \leq \frac{1}{p^s}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t^s}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{s}{(2n-1)^{s+1}} \leq g(2n) - g(2n-1) \leq -\frac{s}{(2n)^{s+1}}$.

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n)^{s+1}} \leq f(s) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n-1)^{s+1}}$

4) On définit la fonction Zeta pour $s > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Montrer que $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$.

5) Déterminer la limite en 0 de f .

Ind :

1) Utiliser le TSSA.

2) a) Avec la majoration du reste du TSSA.

b) Montrer la convergence uniforme du reste sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

3) a) Exploiter $g(2n) - g(2n-1) = \int_{2n-1}^{2n} g'(t) dt$.

b) Expliciter $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ en séparant termes d'indice pair et d'indice impair.

4) Utiliser une comparaison avec une intégrale.

5) Utiliser le théorème d'encadrement et qu'on obtient les termes d'indice impair en prenant tous les termes et en retranchant les termes d'indice pair.

1) Soit $s \in]0, +\infty[$. On utilise le théorème spécial sur les séries alternées. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n(s) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

$\sum_{n \geq 1} U_n(s)$ est une série alternée. $(|U_n(s)|)$ est décroissante et converge vers 0. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2a) Avec la majoration du reste des séries alternées, il vient pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| = |R_{p-1}(s)| \leq |U_p(s)|, \text{ donc on a bien } \boxed{\left| \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| \leq \frac{1}{p^s}}$$

2b) On prouve maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chaque U_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On se place sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $s \in [a, b]$, $R_n(s) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^s}$.

Avec 2a), $|R_n(s)| \leq \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{n^s}$, et $0 \leq \|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^a}$.

Donc par encadrement, $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $g(2n) - g(2n-1) = \int_{2n-1}^{2n} g'(t) dt = -s \int_{2n-1}^{2n} \frac{1}{t^{s+1}} dt$.

On encadre : $1 \frac{1}{(2n)^{s+1}} \leq \int_{2n-1}^{2n} \frac{1}{t^{s+1}} dt \leq 1 \frac{1}{(2n-1)^{s+1}}$.

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{s}{(2n-1)^{s+1}} \leq g(2n) - g(2n-1) \leq -\frac{s}{(2n)^{s+1}}$.

3b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors en séparant termes d'indice pair et d'indice impair : $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^s} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^s}$.

Donc $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = -\sum_{n=1}^N (g(2n) - g(2n-1))$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (g(2n) - g(2n-1))$ (puisque l'on sait que la première série converge, la seconde aussi).

On a donc bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n)^{s+1}} \leq f(s) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n-1)^{s+1}}$.

4) Soit $s > 1$ fixé. Alors pour $t > 0$, on note $h(t) = \frac{1}{t^s}$.

h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc si $n \geq 2$: $\int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n) \leq \int_{n-1}^n h(t) dt$

Comme $s > 1$, h est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc en sommant $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt$.

On obtient donc $\left[\frac{t^{-s+1}}{1-s} \right]_2^{+\infty} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \left[\frac{t^{-s+1}}{1-s} \right]_1^{+\infty}$, puis $1 + \frac{2^{1-s}}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.

On reprend l'encadrement obtenu précédemment : $s-1 + 2^{1-s} \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + s-1$, donc par encadrement,

$(s-1)\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1$. Donc $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$

5) On a vu que pour $s > 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n)^{s+1}} \leq f(s) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n-1)^{s+1}}$.

Soit $a(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n)^{s+1}} = \frac{s}{2^{s+1}} \zeta(s+1)$. Or $\zeta(s+1) \sim \frac{1}{s}$ avec 4), donc $a(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$.

Soit $b(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n-1)^{s+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{n^{s+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n)^{s+1}}$ (on obtient les termes d'indice impair en prenant tous les termes et en retranchant les termes d'indice pair).

Donc $b(s) = s \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}} \right) \zeta(s+1) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$, donc par encadrement, $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$ $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$

Exercice 15 (Oral IMT 23, Thomas,2) : déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de classe C^∞ sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 n!$.

Ind : Chercher une fonction développable en série entière.

On cherche une fonction f développable en série entière vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 n!$, avec un rayon de convergence $R > 0$

Si une telle fonction f existe, alors pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

De plus, f est C^∞ sur $] -R, R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n^2$, donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

Or on sait que $R \left(\sum_{n \geq 0} n^2 x^n \right) = R \left(\sum_{n \geq 0} n x^n \right) = R \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) = 1$. Donc :

On prend $I =]-1, 1[$ pour $x \in I$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$: cette fonction convient

Exercice 16 (Oral Mines 24, Madeleine,4) : soit (U_n) une suite à valeurs strictement positives et (V_n) une suite telle que $V_0, V_1 \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = V_n + U_n V_{n-1}$.

Montrer que (V_n) converge si et seulement si la série $\sum U_n$ converge.

Ind : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n > 0$ et que $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante, puis procéder par double implication. Dans le sens direct, exploiter le lien suite-série et un critère de majoration. Dans le sens retour, remarquer que pour $n \geq 2$, il vient $V_{n+1} \leq (1 + U_n)V_n$ et itérer le procédé pour prouver que (V_n) est majorée.

Tout d'abord, on peut dire par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n > 0$ (puisque (U_n) est à valeurs strictement positives). Dès lors, si $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = U_n V_{n-1} \geq 0$, donc $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

On procède par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose que (V_n) converge. Alors avec le lien suite-série, $\sum (V_{n+1} - V_n)$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} U_n V_{n-1}$ converge.

Or $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Donc $\forall n \geq 1, V_n \geq V_1$

Donc pour $n \geq 2$, $U_n V_{n-1} \geq U_n V_1 > 0$ et $0 \leq U_n \leq \frac{U_n V_{n-1}}{V_1}$. Or $\sum_{n \geq 1} U_n V_{n-1}$ converge.

Donc par majoration, $\sum U_n$ converge.

$\Leftarrow$ On suppose que $\sum U_n$ converge. Comme $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante, il vient pour $n \geq 2$: $V_{n+1} \leq V_n + U_n V_n$, donc

$V_{n+1} \leq (1 + U_n)V_n$, donc par récurrence $V_n \leq \prod_{k=2}^{n-1} (1 + U_k) V_2$ (1).

On pose alors pour $n \geq 2$: $W_n = \prod_{k=2}^{n-1} (1 + U_k)$. Il vient $\ln(W_n) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln(1 + U_k)$.

Or $\ln(1 + U_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} U_k > 0$, donc par critère sur les équivalents des séries à termes positifs, comme $\sum U_n$

converge, on peut dire que $\sum \ln(1 + U_n)$ converge aussi.

Donc $\ln(W_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} a \in \mathbb{R}$ et $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^a$. De plus, pour $n \geq 2$, $W_{n+1} = (1 + U_n)W_n \geq W_n$, donc (W_n) est croissante, et ainsi $\forall n \geq 2, W_n \leq e^a$.

On reprend (1) : $V_n \leq e^a V_2$, donc $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée : elle converge.

On a donc bien prouvé que (V_n) converge si et seulement si la série $\sum U_n$ converge.

Exercice 17 (oral Mines 24, Antoine,3) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

- 1) Montrer que (U_n) converge. Déterminer sa limite.
- 2) Déterminer la nature de la série de terme général U_n .
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de convergence dominée.
- 2) Utiliser un changement de variable et une minoration de U_n .
- 3) Utiliser un développement en série entière et le théorème d'intégration terme à terme.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1]$, on pose $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$.

Alors $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$, et intégrable en 0 avec Riemann, donc φ est intégrable sur $]0,1]$.

Par théorème de convergence dominée, chaque $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$ est bien défini et $\boxed{U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$

- 2) On effectue un changement de variable en posant $u = nt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \geq 0$ (lors du changement de variable, les deux intégrales concernées ont même nature, si bien que la seconde est aussi convergente).

Or $u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue et strictement positive sur $]0,1]$, donc $\int_0^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du > 0$.

Comme $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge avec Riemann, $\boxed{\sum U_n \text{ diverge.}}$

- 3) On effectue un développement en série entière : $e^{-nt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!} t^k$.

Donc $U_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!} t^{k-1/2} \right) dt$. On fixe dans la suite $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1]$: $h_k(t) = \frac{(-1)^k n^k}{k!} t^{k-1/2}$

On cherche à utiliser le théorème d'interversion terme à terme sur un intervalle quelconque.

- Pour $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2-k}}$ est continue sur $]0,1]$, et intégrable en 0 avec Riemann car $\frac{1}{2} - k < 1$, donc h_k est intégrable sur $]0,1]$.

- $\sum_{k \geq 0} h_k$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme est f_n , avec $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$ (et cette dernière est continue par morceaux sur $]0,1]$).

- On étudie $\int_0^1 |h_k(t)| dt = \frac{n^k}{k!(k+\frac{1}{2})} \left[t^{k+1/2} \right]_0^1 = 2 \frac{n^k}{k!(2k+1)}$.

Si on pose $W_k = 2 \frac{n^k}{k!(2k+1)}$, alors $0 \leq k^2 W_k \leq \frac{n^{k-1} n}{(k-1)!}$. Or $\frac{n^k}{k!} \rightarrow 0$, donc $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \rightarrow 0$.

Donc $W_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum W_k$ converge, donc

$$\sum_k \int_0^1 |h_k(t)| dt \text{ converge.}$$

On peut donc conclure :
$$U_n = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$$

Exercice 18 (oral Mines 24, Angel,4) :

- 1) Calculer $J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 2) Etudier la convergence de $\sum (-1)^n J_n$ et calculer sa somme de plusieurs manières (une manière sera déjà pas mal...).

Ind :

- 1) Calculer $J_n + J_{n+2}$ puis itérer le procédé en distinguant deux cas suivant la parité de n .
- 2) Utiliser le théorème sur les séries alternées pour la convergence. Pour le calcul de la somme, on peut revenir aux sommes partielles et effectuer le calcul en échangeant somme (finie) et intégrale.
On peut aussi exprimer cette somme partielle en séparant les termes pairs et impairs, puis obtenir une double somme que l'on peut calculer difficilement en utilisant la première question et le développement asymptotique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

$$3) \text{ On calcule pour } n \in \mathbb{N} : J_n + J_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) \tan^n x dx = \int_0^{\pi/4} \tan' x \tan^n x dx = \frac{1}{n+1}.$$

On a donc pour $p \in \mathbb{N}^*$: $J_{2p} = -J_{2(p-1)} + \frac{1}{2p-1}$.

On itère le procédé : $J_{2p} = (-1)^2 J_{2(p-2)} + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3}$

$J_0 = \frac{\pi}{4}$, et $J_2 = -J_0 + 1$. Donc par récurrence, $J_{2p} = (-1)^p \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{p-k}}{2k-1}$

De même, pour $p \in \mathbb{N}^*$: $J_{2p+1} = -J_{2p-1} + \frac{1}{2p}$.

On itère le procédé : $J_{2p+1} = (-1)^2 J_{2(p-2)+1} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2}$

$J_1 = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$, et $J_3 = -J_1 + \frac{1}{2}$. Donc par récurrence, $J_{2p+1} = (-1)^p \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{p-k}}{2k}$

4) Pour établir la convergence de $\sum (-1)^n J_n$, on utilise le théorème spécial sur les séries alternées (TSSA).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan x - 1) dx \leq 0$. Donc (J_n) est décroissante.

De plus, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan^n x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\tan^n x| \leq 1$.

Donc comme $x \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on obtient par théorème de convergence dominée que

$$J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} 0 dx = 0 \quad (1).$$

Comme $\sum (-1)^n J_n$ est une série alternée ($\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq 0$). On déduit que $\boxed{\sum (-1)^n J_n \text{ converge.}}$

Soit alors $N \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=0}^N (-1)^n J_n = \int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^N (-\tan x)^n dx$. Or pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $|\tan x| < 1$.

Donc $\sum_{n=0}^N (-1)^n J_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - (-1)^{N+1} (\tan x)^{N+1}}{1 + \tan x} dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan x} dx$ (toujours avec le théorème de

convergence dominée, en utilisant $\left| \frac{1 - (-1)^{N+1} (\tan x)^{N+1}}{1 + \tan x} \right| \leq \frac{2}{1 + \tan x}$ pour la domination).

On calcule enfin $K = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Soit $L = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Alors $K + L = \frac{\pi}{4}$ et $K - L = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \left[\ln(\sin x + \cos x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \ln 2$.

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \right)}$$

On essaie de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_n$ d'une autre manière (compliquée...il doit y avoir plus simple). Soit

$N \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n J_n = \sum_{n=0}^N (J_{2n} - J_{2n+1})$ (en séparant les termes d'indices pairs et impairs)

$$\sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n J_n = \sum_{n=0}^N (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(2k-1)(2k)}.$$

On veut calculer $\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(2k-1)(2k)}$. Or $\begin{cases} 0 \leq n \leq N \\ 1 \leq k \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq N \\ k \leq n \leq N \end{cases}$.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(2k-1)(2k)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)(2k)} \left(\sum_{n=k}^N (-1)^{n-k} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)(2k)} \left(\sum_{n=0}^{N-k} (-1)^n \right).$$

Or avec la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(2k-1)(2k)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1 - (-1)^{N-k+1}}{(2k-1)(2k)}. \text{ De plus, } \sum_{n=0}^N (-1)^n = \frac{1 - (-1)^{N+1}}{2}$$

On prend dans la suite N impair. On pose $N = 2q + 1$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{2q+1} (-1)^n J_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1 - (-1)^k}{(2k-1)(2k)}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{2q+1} (-1)^n J_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{(2k-1)(2k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k)}. \quad (2)$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{(2k-1)} - \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{(2k)} = \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2q} \frac{1}{2k} - \frac{1}{4q+2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{(2k-1)(2k)} \underset{q \rightarrow +\infty}{=} \ln(4q+1) + \gamma + o(1) - (\ln(2q) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{4q+2} \underset{q \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(\frac{4q+1}{2q}\right) + o(1).$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{1}{(2k-1)(2k)} \underset{q \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ln(2)$$

$$\text{De plus, } \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k)} = \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} - \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{(-1)^k}{(2k)}$$

$$\text{Or on a vu au 1) que } J_{2p} = (-1)^p \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{p-k}}{2k-1}, \text{ donc } (-1)^p J_{2p} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

$$\text{Avec (1), } J_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, \text{ donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{De plus, } J_{2p+1} = (-1)^p \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{p-k}}{2k}, \text{ donc de même } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)} = -\frac{\ln 2}{2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{2q+1} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k)} \underset{q \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

$$\text{On conclut avec (2) : } \sum_{n=0}^{2q+1} (-1)^n J_n \underset{q \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \right) \text{ et } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \right)} \text{ Ouf !}$$

Séance 4 : Mercredi 28 Mai

Cours : revoir tous les chapitre 6 et 7

Exercice 19 (oral IMT 24, Tristan,3) : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $f_n(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$.

- 1) Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Ind :

- 1) Etudier la convergence simple de (f_n) vers f , puis étudier $f_n - f$ en $+\infty$ à n fixé.
- 2) Majorer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de la croissance de $\sin$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 1) Etudions d'abord la convergence simple de cette suite de fonctions.

$$\text{Pour } x = 0, \underset{n \rightarrow +\infty}{f_n(0)} = 1 \rightarrow 1$$

$$\text{Pour } x \neq 0, \underset{n \rightarrow +\infty}{f_n(x)} = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \rightarrow 1.$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto 1$.

Dès lors, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa limite est f

On étudie la convergence uniforme. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Alors } f_n(x) - f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right), \text{ avec } x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}, \text{ donc } \underset{x \rightarrow +\infty}{f_n(x) - f(x)} \rightarrow +\infty.$$

Donc $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{(f_n) \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}}$

- 2) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$.

Pour n assez grand ($n \geq \frac{2}{a\pi}$), pour $x \in [a, b]$, il vient $0 \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na} \leq \frac{\pi}{2}$.

Or $\sin$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $|f_n(x) - f(x)| = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \leq b^2 \sin\left(\frac{1}{na}\right)$.

Ce majorant ne dépend pas de x : on a donc $0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq b^2 \sin\left(\frac{1}{na}\right)$.

Donc par encadrement, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20 (Oral IMT 23, Emma, 2) : pour $t \in \mathbb{R}$, on note $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2 + t^2}$

- 1) Déterminer le domaine de définition D de f
- 2) Montrer que f est continue sur D .
- 3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 4) f est-elle dérivable sur D ?

Ind :

- 1) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions.
- 2) Utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. On peut se placer sur des segments.
- 3) Utiliser le théorème de la double limite.

- 4) Montrer que $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}$ est dérivable sur D .

- 1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on note $U_n(t) = \frac{e^{-t}}{n^2 + t^2}$. $U_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{n^2}$, et $\left(\frac{e^{-t}}{n^2}\right)$ est de signe fixe, avec $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

converge. Donc $\sum_{n \geq 0} U_n(t)$ converge et $D = \mathbb{R}$

- 2) On utilise le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

- Chaque U_n est continue sur $\mathbb{R}$.

- On considère deux réels a, b tels que $a \leq b$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a, b]$, $|U_n(t)| \leq \frac{e^{-a}}{n^2}$.

Donc $0 \leq \|U_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{e^{-a}}{n^2}$ et par majoration, $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$

Donc f est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

- 3) On utilise le théorème de la double limite. $U_n(t) = \frac{e^{-t}}{n^2 + t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $|U_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $0 \leq \|U_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n^2}$ et par majoration, $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2 + t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$

- 4) On pose pour $t \in D : g(t) = f(t)e^t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}$, On montre que g est dérivable sur D et par produit,

comme $f(t) = e^t g(t)$, f sera dérivable sur $D = \mathbb{R}$

On note $V_n(t) = \frac{1}{n^2 + t^2}$

- Chaque fonction V_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ (pour $n \geq 1$).
- $\sum V_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car $V_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$).
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n'(t) = \frac{-2t}{(n^2 + t^2)^2}$. On considère deux réels a, b tels que $a \leq b$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

et $t \in [a, b]$, $0 \leq |V_n'(t)| \leq \frac{2(|a| + |b|)}{n^4}$, donc $0 \leq \|V_n'\|_\infty \leq \frac{2(|a| + |b|)}{n^4}$. Donc $\sum_{n \geq 1} V_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$

Ainsi, f est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 21 (oral CCINP 24, Elise, 2) : Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}$ et $g_n(x) = x f_n(x)$. On

considère, sous réserve de convergence, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

- 1) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2)
 - a) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 3)
 - a) Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
 - b) Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 4) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{x}$
- 5) Déterminer un équivalent de f en 0.

Ind :

- 1) Traiter à part le cas $x = 0$.
 - 2) a) Prendre $x \leq y$ et comparer $f(x)$ et $f(y)$.
b) Utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.
 - 3) a) Utiliser le théorème de la double limite.
b) Etudier la fonction g_n
 - 4) Utiliser le théorème de la double limite pour $x \mapsto x f(x)$.
 - 5) Faire une comparaison avec une intégrale.
- 1) Pour $x = 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $f_n(x) = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge. Pour $x > 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x} > 0$, donc pas théorème sur les équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 2) a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leq y$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+n^2x} \geq \frac{1}{n+n^2y}$, et en sommant, $f(x) \geq f(y)$.

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- b) On constate que chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, soit $a > 0$. Alors pour

$$x \in [a, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n+n^2a} = f_n(a).$$

Donc $0 \leq \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq f_n(a)$. Or $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ converge, donc par majoration, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 3) a) On utilise le théorème de la double limite. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$. Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

- b) On note $g_n(x) = x f_n(x) = \frac{x}{n+n^2x}$. On étudie cette fonction : $g_n'(x) = \frac{n}{(n+n^2x)^2}$, donc g_n est

croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g_n(x) > 0$, donc $\|g_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$.

Donc avec Riemann, $\boxed{\sum g_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+^*}$.

- 4) Pour $x > 0$, il vient $xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n+n^2x} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$. On utilise le théorème de la double limite. Si $n \in \mathbb{N}^*$

$$, \text{ alors } g_n(x) = \frac{x}{n+n^2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}.$$

De plus, $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$. Donc $\boxed{xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = A}$.

On a donc bien $\boxed{f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{x}}$

- 5) Le théorème de la double limite ne fonctionne plus ici car il donne une limite nulle pour $x \mapsto x f(x)$. On

fixe $x > 0$ et on fait une comparaison somme-intégrale avec $\varphi(t) = \frac{1}{t+t^2x}$. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc pour $n \geq 2$: $\int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^n \varphi(t) dt$. Donc pour $N \geq 2$, $\int_2^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=2}^N f_n(x) \leq \int_1^N \varphi(t) dt$

Comme $\varphi(t) = \frac{1}{t+t^2x} \sim \frac{1}{t^2x}$, et que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, φ l'est aussi.

On peut donc passer l'inégalité à la limite quand N tend vers l'infini : $\int_2^{+\infty} \varphi(t) dt \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.

Or $\varphi(t) = \frac{1}{t+t^2x} = \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx} \right)$, donc $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \left[\ln \left(\frac{t}{1+tx} \right) \right]_1^{+\infty} = -\ln(x) + \ln(1+x) \sim -\ln(x)$

Et $\int_2^{+\infty} \varphi(t) dt = \left[\ln \left(\frac{t}{1+tx} \right) \right]_2^{+\infty} = -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x) \sim -\ln(x)$. Donc $\boxed{f(x) \sim_{x \rightarrow 0} -\ln(x)}$

Exercice 22 (oral Mines 24, Nassim,3) :

- 1) Etudier le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n^n e^{-n}}{n!} x^n$, avec $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Etudier la convergence de cette série sur le bord de l'intervalle de convergence.

Ind :

- 1) Déterminer un équivalent de $a_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$ ou utiliser d'Alembert.
- 2) Conclure avec un équivalent de a_n pour $\sum a_n$ et utiliser le TSSA pour $\sum (-1)^n a_n$.

- 1) On note $R = R\left(\sum \frac{n^n e^{-n}}{n!} x^n\right)$ On utilise la formule de Stirling : $a_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

Donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, donc $R \geq 1$. De plus, pour $r > 1$, $a_n r^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$, donc $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Donc $R \leq 1$. Ainsi, finalement $\boxed{R=1}$. On aurait aussi pu utiliser d'Alembert.

- 2) On étudie les convergences de $\sum a_n$ et de $\sum (-1)^n a_n$.

On a prouvé au 1) que $a_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} > 0$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge par critère de Riemann, donc par critère d'équivalent sur les séries à termes positifs, $\boxed{\sum a_n \text{ diverge.}}$

Pour $\sum (-1)^n a_n$, on ne peut pas utiliser un équivalent qui n'est pas de signe fixe. On cherche à utiliser le

TSSA. La série est bien alternée. On a vu que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, donc $a_n \rightarrow 0$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n! e^{-n}}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (avec $a_n > 0$).

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$.

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{e} \exp(1) = 1$, donc (a_n) est décroissante et on peut appliquer le TSSA.

Donc $\boxed{\sum (-1)^n a_n \text{ converge.}}$

Exercice 23 (oral Centrale 24, Angel,3) : Soit E_n un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Une partition de E_n est la donnée d'un ensemble de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sous-ensembles $A_1, \dots, A_k$ de E , tous non vides, deux à deux disjoints et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = E_n$. Par exemple, $\{\{1, 2\}, \llbracket 3, n \rrbracket\}$ est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose $a_0 = 1$.

- 1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq n!$.
- 2) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
- 3) Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une expression de f .

Ind :

- 1) Pour trouver le nombre de partitions d'un ensemble $E_{n+1} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, choisir l'ensemble de la partition qui contient e_{n+1} et distinguer suivant son nombre d'éléments, puis effectuer une partition avec les éléments qui restent. Utiliser une récurrence forte pour la seconde moitié de la question.
- 2) Etudier la suite $\left(\frac{a_n}{n!} 1^n\right)$.
- 3) Calculer f' sur $] -R, R[$ et reconnaître un produit de Cauchy.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On doit ici trouver le nombre de partitions d'un ensemble $E_{n+1} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ qui contient $(n+1)$ éléments.

Pour constituer une telle partition, on doit d'abord prendre un ensemble qui contient e_{n+1} . Ce dernier comportera au total $k+1$ éléments, avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il y a $\binom{n}{k}$ manières de constituer cet ensemble que l'on note A_{k+1} . Il faut ensuite effectuer une répartition des $n-k$ éléments restants. Il y a alors a_{n-k} partitions possibles. Il vient donc en sommant toutes les possibilités pour k : $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} a_k$ avec un changement d'indice.

Donc on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ puisque $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

On prouve ensuite par récurrence forte $P(n) : "a_n \leq n!"$.

- $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)$ est vraie. Alors $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} k!$.

Donc $a_{n+1} \leq n! \sum_{k=0}^n 1$ et $a_{n+1} \leq (n+1)!$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq n!$.

- 2) Soit $r = 1$. Alors $\left(\frac{a_n}{n!} r^n\right)$ est bornée puisque $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{a_n}{n!} r^n \leq 1$.

Donc $R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}_+, \left(\frac{a_n}{n!} r^n\right) \text{ bornée} \right\} \geq 1$

- 3) Comme f est la somme d'une série entière, elle est C^∞ sur $] -R, R[$, où R est son rayon de convergence.

On a de plus pour $x \in] -R, R[: f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a_k \right) \frac{1}{(n-k)!} x^n$

On reconnaît un produit de Cauchy.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et le rayon de convergence est $+\infty \geq R$.

Donc pour $x \in] -R, R[, f'(x) = e^x f(x)$.

On résout cette équation : il vient $\forall x \in] -R, R[, f(x) = \lambda \exp(e^x)$.

Or $f(0) = 1$, donc $\lambda = e^{-1}$ et $\forall x \in] -R, R[, f(x) = \exp(e^x - 1)$

Exercice 24 (oral Mines 24, Léo,5) : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1 + e^{-t} + \dots + e^{-nt}} dt$.

1) Etudier la convergence et la limite de la suite (U_n)

2) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} U_n$.

Ind :

1) Utiliser le théorème de convergence dominée.

2) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque pour obtenir une expression de sous forme de somme, puis montrer $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1) On cherche à utiliser le théorème de convergence dominée.

On note $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{1 + e^{-t} + \dots + e^{-nt}}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $1 + e^{-t} + \dots + e^{-nt} = \frac{1 - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}$

Donc $f_n(t) = e^{-nt} \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-(n+1)t}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

De plus, $|f_n(t)| = \frac{e^{-nt}}{1 + e^{-t} + \dots + e^{-nt}} \leq e^{-t} = \varphi(t)$, où la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par convergence dominée, $U_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1 + e^{-t} + \dots + e^{-nt}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$

2) On a vu que $U_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-(n+1)t}} dt$.

Ce dénominateur est délicat à traiter.

On effectue un développement en série entière : si $|u| < 1$, $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

Donc pour $t > 0$, $f_n(t) = e^{-nt} \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-(n+1)t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-t(n+k(n+1))} (1 - e^{-t})$.

On a donc $U_n = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-t(n+k(n+1))} (1 - e^{-t}) \right) dt$. On cherche à intervertir série et intégrale.

On pose $h_k(t) = e^{-t(n+k(n+1))} (1 - e^{-t})$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $t > 0$.

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} h_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa somme est f_n qui est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, h_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est continue et $h_k(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$).

De plus, $\int_0^{+\infty} |h_k(t)| dt = \int_0^{+\infty} h_k(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(n+k(n+1))} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1+k(n+1))} dt = \frac{1}{(n+k(n+1))} - \frac{1}{(n+1+k(n+1))}$.

Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^{+\infty} |h_k(t)| dt = \frac{1}{(n+k(n+1))(n+1+k(n+1))} \leq \frac{1}{k^2(n+1)^2}$.

Or $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, donc $\sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} |h_k(t)| dt$ converge, et $\sum_{k \geq 0} \int_0^{+\infty} |h_k(t)| dt$ converge aussi.

On obtient donc $U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-t(n+k(n+1))} (1 - e^{-t}) \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+k(n+1))(n+1+k(n+1))}$

On a donc $U_n = \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k(n+1))(n+1+k(n+1))}$.

Donc $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donc $(n^2 U_n)$ est bornée et $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n \geq 1} U_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Séance 5 : Mardi 10 Juin. 5

Cours : revoir le chapitre 10

Exercice 25 (oral CCINP 23, Mathilde,2) : soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D de f et étudier sa continuité sur D .
- 2) Calculer $f(1/2)$ avec $t = u^2$ et en déduire $f(3/2)$.

Ind :

- 1) Déterminer d'abord D puis utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- 2) Calculer $f(x) + f(x+1)$.

- 1) On pose $g(x, t) = \frac{t^x}{1+t} = \frac{e^{x \ln(t)}}{1+t}$.

Pour tout réel x , $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0, 1[$.

Etude en 0 : $g(x, t) = \frac{t^x}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $-x < 1$, ce qui équivaut à $x > -1$. Donc $D =]-1, +\infty[$.

On considère $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Si $t \in]0, 1[$ et $x \in [a, b]$, on a $|g(x, t)| = \frac{e^{x \ln(t)}}{1+t} \leq e^{a \ln(t)} = \frac{1}{t^{-a}} = \varphi(t)$.

Or $-a < 1$ donc φ est intégrable sur $]0, 1[$.

Donc par théorème de continuité des intégrales à paramètres, f est continue sur D .

- 2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$. On pose comme suggéré $t = u^2$. Il vient $dt = 2u du$.

$$\text{Donc } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{De plus, si } x \in D, f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}. \text{ Donc } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

Exercice 26 (oral CCINP 24, Marie,3) : On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, avec $x \in]0, +\infty[$.

- 1) Démontrer que $\Gamma(1)$ est bien défini et le calculer.
- 2) Vérifier que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- 3) Démontrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(2)$.
- 4) Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 5) Montrer que Γ' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$

Ind :

- 1) C'est une intégrale de référence.
- 2) Utiliser un équivalent en 0.
- 3) Utiliser une intégration par parties.
- 4) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Penser à séparer les cas $t \leq 1$ et $t \geq 1$.
- 5) Utiliser la question précédente et penser au théorème de Rolle.
- 1) On sait que $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $a > 0$. Donc $\Gamma(1)$ est bien défini et

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

- 2) Soit $x \in]0, +\infty[$. On pose $g(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$.

Alors pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Etude en 0 : $g(x, t) = t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $1-x < 1$, ce qui équivaut à $x > 0$.

Etude en $+\infty$: $t^2 g(x, t) = t^{x+1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ l'est.

Donc Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

- 3) Soit $x \in]0, +\infty[$. On intègre par parties : $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. On pose $\begin{cases} a(t) = t^x \\ b'(t) = e^{-t} \end{cases}$; $\begin{cases} a'(t) = x t^{x-1} \\ b(t) = -e^{-t} \end{cases}$

Par croissance comparée, $a(t)b(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et par ailleurs $a(t)b(t) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$.

Donc $\Gamma(x+1) = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$. Ainsi, $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$

- 4) On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour montrer que Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t) = e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec 2).
- Pour $x, t \in]0, +\infty[$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(t) e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} = \frac{1}{t^{1-x}} \ln(t) e^{-t}$. $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Etude en 0 : on prend $1-x < c < 1$. Alors $t^c \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^{c-(1-x)} \ln(t) e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée.

Donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^c}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^c}$ est intégrable en 0, donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ aussi.

Etude en $+\infty$: $t^2 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\ln(t)}{t} t^{x+2} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.0 = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est

intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ aussi. Donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour $x, t \in]0, +\infty[$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \ln^2(t) e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} = \frac{1}{t^{1-x}} \ln^2(t) e^{-t}$. On prend $0 < a < b$ et on prend $x \in [a, b]$.

Pour $t \leq 1$, $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(t) e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} \leq \ln^2(t) e^{(a-1)\ln(t)} e^{-t}$.

Pour $t \geq 1$, $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(t) e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} \leq \ln^2(t) e^{(b-1)\ln(t)} e^{-t}$.

On pose donc $\varphi(t) = \frac{\ln^2(t)}{t^{1-a}} e^{-t}$ si $t \leq 1$ et $\varphi(t) = \frac{\ln^2(t)}{t^{1-b}} e^{-t} = \ln^2(t) t^{b-1} e^{-t}$ si $t \geq 1$.

φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Etude en 0 : on prend $1-a < c < 1$. Alors $t^c \varphi(t) = t^{c-(1-a)} \ln^2(t) e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^c}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^c}$ est intégrable en 0, donc φ aussi.

Etude en $+\infty$: $t^2 \varphi(t) = \frac{\ln^2(t)}{t} t^{b+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc φ est intégrable en $+\infty$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{1-x}} \ln^2(t) e^{-t} dt$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}} \ln^2(t) e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas

la fonction nulle. Donc $\forall x > 0, \Gamma''(x) > 0$ et $\boxed{\Gamma' \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

- 5) Comme Γ' est strictement monotone, elle s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après 3), on a $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, avec Γ continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$, à valeurs réelles. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe une valeur d'annulation de Γ' dans $]1, 2[$, donc dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\boxed{\Gamma' \text{ s'annule une unique fois sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Exercice 27 (oral Centrale 24, Léo) : on considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$

- 1) Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- 2) Calculer $f(0)$ en admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- 3) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
- 2) Utiliser un changement de variable.
- 3) Utiliser une intégration par parties dans l'expression de f' pour retrouver celle de f .

1) On pose $g(x, t) = \frac{e^{-t} e^{ixt}}{\sqrt{t}}$.

On vérifie les différentes hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x, t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrons que $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$g(x, t) = \frac{e^{-t} e^{ixt}}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0, donc $t \mapsto g(x, t)$ l'est aussi.

$|t^2 g(x, t)| = t^{3/2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $g(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable en $+\infty$.

Donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{it e^{-t} e^{ixt}}{\sqrt{t}} = i\sqrt{t} e^{-t} e^{ixt}$.

Alors pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-t} = \varphi(t)$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque

$$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et que } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = i \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{(ix-1)t} dt$

2) On a $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. On effectue un changement de variable et on pose $u = \sqrt{t}$ (ainsi, $t = u^2$). Alors

$$du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \text{ et } f(0) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \text{ (on sait que les deux intégrales concernées ont même nature donc convergent).}$$

3) On procède à une intégration par parties. On pose $u(t) = \sqrt{t}$, $v'(t) = e^{(ix-1)t}$. Il vient $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

On prend $v(t) = \frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)t}$. u, v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $|u(t)v(t)| = \frac{\sqrt{t} e^{-t}}{|ix-1|}$, donc par croissance comparée, $u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. De plus, $u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, donc

$$f'(x) = \frac{i}{2(1-ix)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{(ix-1)t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{i-x}{1+x^2} \right) f(x)$$

Si $a(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{i-x}{1+x^2} \right)$, une primitive est $A(x) = \frac{1}{2} \left(i \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right)$

$$\text{Donc } f(x) = f(0) \frac{e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arc tan}(x)}}{(x^2+1)^{1/4}} = \sqrt{\pi} \frac{e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arc tan}(x)}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Exercice 28 (oral Mines 24, Elise,4) :

- 1) Montrer que $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge. En déduire que $J = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.
- 2) On note $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i} dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' .
- 4) Retrouver la convergence de J à l'aide de F' .

Ind :

- 1) Utiliser une intégration par parties pour l'étude en $+\infty$. Montrer que J converge à l'aide d'un changement de variable.
- 2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- 3) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Conclure avec le théorème de la limite de la dérivée.
- 4) Utiliser le théorème fondamental et déterminer la limite de F en $+\infty$.

1) On pose $h(u) = \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ pour $u \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $h(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$, donc h est intégrable

en 0. On s'intéresse à $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$. On fait une intégration par parties. On pose $a(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$, $a'(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{u^{3/2}}$,

et $b'(u) = e^{iu}$, $b(u) = -i e^{iu}$. Alors $|a(u)b(u)| \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$, donc $a(u)b(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$, et $a(u)b(u) \xrightarrow{u \rightarrow 1} -ie^i$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ a même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$ qui converge absolument par majoration avec $0 \leq \left| \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$.

Donc $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge

On effectue un changement de variable et on pose $u = t^2$. Alors $du = 2tdt$ et $\sqrt{u} = t$.

Donc K a même nature que $2J$ et comme K converge, $J = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge aussi.

2) On pose $g(x, t) = \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i}$.

On vérifie les différentes hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto g(x, t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$.
- Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, $|g(x, t)| = \frac{e^{-x^2 t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$.

φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\varphi(t) \sim \left(\frac{1}{t^2}\right)$, avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

Donc par théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est définie et continue sur $\mathbb{R}$

3) On vérifie les différentes hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto g(x, t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait avec 2) que $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-x^2(t^2+i)}$. On se place sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [a, b]$, il vient $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2b e^{-t^2 a^2} = \varphi(t)$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-x^2(t^2+i)} dt$.

On a donc $F'(x) = -2x e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$. On pose $u = xt$ et il vient $F'(x) = -2e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

Comme de plus F est paire, le résultat reste vrai sur $\mathbb{R}_-^*$

De plus, comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \in \mathbb{R}$.

Donc par théorème de la limite de la dérivée, F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2e^{-ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

4) On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du > 0$ (la fonction sous l'intégrale est continue et strictement positive). Par théorème

fondamental, il vient $F(x) = F(0) - 2I \int_0^x e^{-it^2} dt$. Or $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i} dt$.

On étudie sa limite en $+\infty$ avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Pour $t > 0$, $\left| \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i} \right| = \frac{e^{-x^2 t^2}}{\sqrt{1+t^4}}$, donc $\frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. De plus, $\left| \frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = \varphi(t)$.

φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\varphi(t) \sim \left(\frac{1}{t^2}\right)$, avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

Donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et $\int_0^x e^{-it^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{F(0)}{2I}$. On retrouve que $J = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.

Exercice 29 (oral Centrale 24, Sandra, 4) : soit $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t \cos(x)+t^2)}{t} dt$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 1) Montrer que f est définie et est C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) Déterminer une expression simple de f . On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
- 2) Calculer f' . Se ramener à intégrer $u \mapsto \frac{1}{u^2 + \sin^2 x}$, puis utiliser $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$ si $x > 0$.
Ensuite, calculer $f(0)$ avec le théorème d'intégration terme à terme.

- 1) On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

On pose pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $t \in]0, 1]$: $f(x, t) = \frac{\ln(1+2t \cos(x)+t^2)}{t}$ (on a bien $1+2t \cos(x)+t^2 > 0$).

- Pour tout $t \in]0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est bien C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{-2 \sin(x)}{(1+2t \cos(x)+t^2)}$.
- Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, 1]$.

De plus, $f(x, t) = \frac{\ln(1+2t \cos(x)+t^2)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2t \cos(x)+t^2}{t} = \cos x + t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \cos x$.

Donc $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1)$ et $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

- $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| = \left| \frac{-2 \sin(x)}{(1+2t \cos(x)+t^2)} \right| \leq \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t)$ car $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc comme φ est intégrable sur $]0, 1]$, on déduit par théorème de dérivation des intégrales à paramètres que

$$f'(x) = -2 \sin(x) \int_0^1 \frac{1}{(1+2t \cos(x)+t^2)} dt$$

- 2) Il s'agit maintenant de calculer $J(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+2t \cos(x)+t^2)} dt$.

$$J(x) = \int_0^1 \frac{1}{(t + \cos(x))^2 + \sin^2 x} dt = \int_{\cos x}^{1+\cos x} \frac{1}{u^2 + \sin^2 x} dx.$$

Si $x = 0$, $f'(x) = f'(0) = 0$.

$$\text{Si } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right], J(x) = \frac{1}{\sin(x)} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{u}{\sin(x)} \right) \right]_{\cos x}^{1+\cos x} = \frac{1}{\sin(x)} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} \right) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) \right).$$

$$\text{Donc avec } \begin{cases} \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \end{cases} \text{ et pour } u > 0, \operatorname{Arctan}(u) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right), \text{ il vient pour } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ (ainsi,}$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \neq 0) : J(x) = \frac{1}{\sin(x)} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right), \text{ donc } \boxed{f'(x) = -2 \left(\frac{x}{2} \right) = -x}.$$

Cela reste vrai en $x = \frac{\pi}{2}$ (en faisant le calcul ou par continuité de f' en $\frac{\pi}{2}$).

$$\text{Or } f(0) = 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{nt} dt = 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1} dt.$$

On pose alors $U_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n+1}$. Elle est intégrable et $\sum U_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$.

En outre, $\int_0^1 |U_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} > 0$. Donc $\sum_0^1 |U_n(t)| dt$ converge.

On utilise donc le théorème d'intégration terme à terme, et il vient $f(0) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

On sépare les termes d'indice pair et impair.

$$\text{Il vient } f(0) = 2 \sum_{n \text{ pair}} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} + 2 \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 2 \left(\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} \right).$$

$$\text{Donc } f(0) = 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}. \text{ Donc } \boxed{f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} x^2}$$

Exercice 30 (Oral Mines 24, Simon,3) : soit $f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, continue.

Montrer que $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$.

$$[c,d] \rightarrow \mathbb{R}$$

On pourra poser $g : t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y) dy \right) dx$

Ind : considérer $h(x,t) = \int_c^t f(x,y) dy$ et utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour g .

Une fois g' obtenue, exprimer g à l'aide de g' et du théorème fondamental de l'analyse.

$$[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

On considère donc $g : t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx$ et on pose pour $x \in [a, b]$ et $t \in [c, d]$: $h(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$.

$$\text{On a donc } g(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b h(x, t) dx.$$

On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- Comme f est continue sur $[a, b] \times [c, d]$, $y \mapsto f(x, y)$ l'est aussi pour tout $x \in [a, b]$. Donc par théorème fondamental de l'analyse, $t \mapsto h(x, t)$ est C^1 sur $[c, d]$ et $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = f(x, t)$.
- Pour tout $t \in [c, d]$, montrons que $x \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[a, b]$. On fixe $t \in [c, d]$. f est continue sur le fermé borné $[a, b] \times [c, d]$ (on peut le montrer par caractérisation séquentielle et passage des inégalités à la limite), donc est bornée : soit $M \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d], |f(x, y)| \leq M$. Dès lors, comme $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $[a, b]$ pour tout $y \in [c, d]$, et $y \mapsto M$ est intégrable sur $[c, t]$, on peut dire par théorème de continuité des intégrales à paramètres que $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, donc intégrable sur $[a, b]$.
- Enfin, pour $t \in [c, d]$ et $x \in [a, b]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \leq M$, où $x \mapsto M$ est constante donc intégrable sur $[a, b]$.

On obtient que g est C^1 sur $[c, d]$ et telle que $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dx = \int_a^b f(x, t) dx$.

On déduit par théorème fondamental de l'analyse que $g(d) = g(c) + \int_c^d g'(t) dt = 0 + \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$.

On a donc bien $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

Séance 6 : Mardi 10 Juin. 4

Cours : revoir le chapitre 13

Exercice 31 (oral CCINP 24, Victor,3) : on souhaite créer un parallélépipède de volume égal à 1000 cm^3 en minimisant sa surface afin de limiter la quantité de métal utilisée.

$$V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

- 1) Montrer que le problème se ramène à la détermination du minimum de $f : (x, y) \mapsto xy + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y}$.
- 2)
 - a) Trouver l'unique point critique (x_0, y_0) de f sur V .
 - b) Calculer $f(x_0, y_0)$. Est-ce un minimum ou un maximum local ?
- 3)
 - a) Montrer que $\exists m \in \mathbb{R}$ et $(x_1, y_1) \in D = [1, 400] \times [1, 400]$ tels que $\begin{cases} f(x_1, y_1) = m \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq m \end{cases}$.
 - b) Soit $U =]1, 400[\times]1, 400[$. Montrer $\forall (x, y) \in V \setminus U, f(x, y) > 300$. En déduire que m est un minimum global de f sur V .
- 4) Montrer que $\forall (x, y) \in V, f(x, y) \geq 2\sqrt{1000y} + \frac{1000}{y}$.
- 5) Retrouver que f possède un minimum global sur $k'(y) = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{y}} - \frac{1000}{y^2}$ et sa valeur.

Ind :

- 1) Utiliser l'expression du volume d'un parallélépipède.
- 2) Chercher quand le gradient s'annule et utiliser la matrice Hessienne.
- 3) a) Utiliser le théorème des bornes atteintes.
b) Distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de x, y .
- 4) Etudier une fonction de la variable x en fixant y puis exploiter avec soin les questions précédentes.
- 5) Etudier la fonction obtenue à la question précédente et chercher sa valeur minimale.

1) Notons x la longueur et y la largeur du parallélépipède. Si h est sa hauteur, son volume vaut $V = xyh = 1000$. La surface est égale à $S = 2(xy + xh + hy)$ en ajoutant les surfaces des 6 faces.

$$\text{On a donc } S = 2\left(xy + x\frac{1000}{xy} + y\frac{1000}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y}\right).$$

Il s'agit donc bien de minimiser la fonction f .

2a) f est de classe C^2 sur V par opérations.

$$\text{On calcule } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{1000}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{1000}{y^2} \end{cases} . \text{ On résout } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1000}{x^2} \\ x = \frac{1000}{y^2} = \frac{x^4}{1000} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1000}{x^2} \\ x^3 = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 10 \text{ (on sait que } x \text{ est non nul).}$$

On obtient donc un seul point critique : $A(10, 10)$.

2b) On calcule $f(10, 10) = 300$

$$\text{On détermine la matrice Hessienne. Il vient } \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2000}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 \end{cases} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2000}{y^3}.$$

$$\text{Il vient donc } H_f(10, 10) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En $A(10, 10) \therefore \det(H_f(10, 10)) = 3 > 0$, et $Tr(H_f(10, 10)) = 4 > 0$

Donc f admet un minimum local en $A(10, 10)$.

3a) La fonction f est continue sur $D = [1, 400] \times [1, 400]$. Justifions que cet ensemble est fermé et borné.

Si on prend $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$, il vient pour $(x, y) \in D$, $\|(x, y)\|_\infty \leq 400$, donc D est borné.

De plus, si on prend une suite (x_n, y_n) d'éléments de D qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} 1 \leq x_n \leq 400 \\ 1 \leq y_n \leq 400 \end{cases} \text{ et en passant les inégalités à la limite, } (x, y) \in D. \text{ Donc } D \text{ est fermé.}$$

Par théorème des bornées atteintes, $\exists m \in \mathbb{R}$ et $(x_1, y_1) \in D$ tels que $\begin{cases} f(x_1, y_1) = m \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq m \end{cases}$.

3b) Soit $(x, y) \in V \setminus U$. Alors $f(x, y) = xy + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y}$. On a plusieurs possibilités.

- Si $x \leq 1$ ou $y \leq 1$, alors $f(x, y) \geq \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y} \geq 1000 > 300$.
- Sinon, $x \geq 400$ ou $y \geq 400$. Donc $f(x, y) \geq xy \geq 400 > 300$.

Dans tous les cas, on a donc bien $\boxed{\forall (x, y) \in V \setminus U, f(x, y) > 300}$.

On constate que $(x_0, y_0) = (10, 10) \in D$. Donc $m \leq f(x_0, y_0) = 300$.

Donc $(x_1, y_1) \in U =]1, 400[\times]1, 400[$ avec la question précédente. Comme

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x-1 > 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x-400 < 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y-1 > 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y-400 < 0\}$$

est un ouvert (puisque $(x, y) \mapsto x-1, \dots, (x, y) \mapsto y-400$ sont continues), et que m est un minimum local sur U , alors (x_1, y_1) est un point critique de f sur U . Donc avec 2a), nécessairement $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$ et $m = 300$. Enfin, $\forall (x, y) \in V \setminus U, f(x, y) > 300 = m$, donc finalement $\forall (x, y) \in V, f(x, y) \geq 300 = m$.

$\boxed{\text{Donc } m \text{ est le minimum global de } f \text{ sur } V}$.

4) Soit $(x, y) \in V$. Alors $f(x, y) = xy + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y}$.

Donc $f(x, y) - \left(2\sqrt{1000y} + \frac{1000}{y}\right) = xy + \frac{1000}{x} - 2\sqrt{1000y} = h(x)$. On fixe $y \in \mathbb{R}_+^*$ et on étudie cette

fonction de x . Il vient $h'(x) = y - \frac{1000}{x^2}$, donc $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1000}{x^2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{1000}{y}}$.

h est donc décroissante sur $\left]0, \sqrt{\frac{1000}{y}}\right]$, puis croissante sur $\left[\sqrt{\frac{1000}{y}}, +\infty\right[$.

On a donc $f(x, y) - \left(2\sqrt{1000y} + \frac{1000}{y}\right) = h(x) \geq h\left(\sqrt{\frac{1000}{y}}\right) = 0$.

$\boxed{\text{On déduit bien que } \forall (x, y) \in V, f(x, y) \geq 2\sqrt{1000y} + \frac{1000}{y}}$.

5) Pour $(x, y) \in V, f(x, y) \geq 2\sqrt{1000y} + \frac{1000}{y} = k(y)$.

On étudie k qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $k'(y) = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{y}} - \frac{1000}{y^2}$.

Donc $k'(y) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{y}} \geq \frac{1000}{y^2} \Leftrightarrow y^{3/2} \geq \sqrt{1000} \Leftrightarrow y \geq 10$.

k admet donc un minimum égal à $k(10) = 300$ et $\forall (x, y) \in V, f(x, y) \geq 300 = f(10, 10) = m$.

$\boxed{\text{Don retrouve donc que } m \text{ est le minimum global de } f \text{ sur } V}$.

Exercice 32 (oral CCINP 23, Liam) : soit $f : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1-x^2} \cos y$.

On admettra que f est continue et qu'elle est C^2 sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$.

1) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$.

2)

a) Trouver les points critiques sur $] -1, 1[\times [0, \pi]$.

- b) Montrer que $\forall (x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}, f(x, y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) \leq x^2 + \sqrt{1-x^2} - \frac{5}{4}$.
- c) Montrer que f admet un maximum global en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$. On pourra poser $u = \sqrt{1-x^2}$.
- 3) Déterminer la matrice Hessienne en $(0, \pi)$. f admet-elle un maximum local en $(0, \pi)$?
- 4) f admet-elle un minimum global en $(0, 0)$?
- 5) Soit $y_0 \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. $f(1, y_0)$ est-il un extremum local ?

Ind :

- 2a) Chercher les points d'annulation du gradient en résolvant un système.
 2c) Reconnaître une identité remarquable.
 3) Utiliser les valeurs propres de cette matrice hessienne.
 4) Majorer $\left|(-\cos y)\sqrt{1-x^2}\right|$
 5) Séparer les cas $y_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $y_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Mettre $\sqrt{1-x^2}$ en facteur.

1) On calcule pour $(x, y) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos y\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{1-x^2} \sin y$

- 2) a) On cherche les $(x, y) \in]-1, 1[\times [0, \pi]$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Ceci s'écrit $\begin{cases} x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(y)\right) = 0 \\ y \in \{0, \pi\} \end{cases}$. On résout $2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-x^2) = \frac{1}{4}$ (en

effet, ces deux quantités sont positives). Puis $(1-x^2) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}$.

Donc les points critiques sont les $A(0, 0)$, $B(0, \pi)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$ et $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$

b) Soit $(x, y) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$. Alors $f(x, y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) = x^2 - \sqrt{1-x^2} \cos y - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \leq x^2 + \sqrt{1-x^2} - \frac{5}{4}$

On a donc bien $f(x, y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) \leq x^2 + \sqrt{1-x^2} - \frac{5}{4}$

c) Si on pose $u = \sqrt{1-x^2}$, il vient $x^2 + \sqrt{1-x^2} - \frac{5}{4} = 1 - u^2 + u - \frac{5}{4} = -\left(u^2 - u + \frac{1}{4}\right) = -\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$.

Donc $f(x, y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) \leq 0$ et f admet un maximum global en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos y\right)$, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \pi) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \pi) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, \pi) = \cos \pi = -1$.

Donc $H_f(0, \pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Sp(H_f(0, \pi)) \not\subset \mathbb{R}_+$, $Sp(H_f(0, \pi)) \not\subset \mathbb{R}_-$

f ne possède pas d'extremum local en $(0, \pi)$.

4) $f(0,0) = -1$. Pour $(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - \sqrt{1-x^2} \cos y \geq (-\cos y) \sqrt{1-x^2}$.

Or $|(-\cos y) \sqrt{1-x^2}| \leq 1$, donc $f(x, y) \geq (-\cos y) \sqrt{1-x^2} \geq -1$

f possède un minimum global en $(0, 0)$

5) Soit $y_0 \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$. $f(1, y_0) = 1$. On calcule $f(x, y) - 1 = -\sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2} + \cos y)$

Si $y_0 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, alors pour $y \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $f(x, y) - f(1, y_0) \leq 0$

Donc si $y_0 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $f(1, y_0)$ est un maximum local.

Si $y_0 \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, alors $\cos y_0 < 0$ et pour x assez proche de 1 et y assez proche de y_0 , on a

$\cos y \leq \frac{1}{2} \cos y_0$ et $\sqrt{1-x^2} \leq -\frac{1}{2} \cos y_0$, donc $f(x, y) - 1 = -\sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2} + \cos y) \geq 0$

Donc si $y_0 \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, $f(1, y_0)$ est un minimum local

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice 33 (oral Centrale 24, Matthias, 3) : Soit $f : (x, y) \mapsto xy^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2 + xy + \frac{3}{4}$.

- 1) Déterminer les points critiques de f .
- 2) Trouver les extremums locaux et globaux de f .

Ind :

- 1) Résoudre le système. On trouve trois points critiques, avec des coordonnées parfois un peu compliquées.
- 2) Utiliser la matrice Hessienne pour déterminer la nature de chaque point critique.
- 5) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, car elle est polynomiale.

On calcule $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + (x+y) + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + (x+y) + x \end{cases}$. On résout $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (x+y) + y = 0 \\ 2xy + (x+y) + x = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 - 2y \\ 2x(1+y) = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 - 2y \\ 2y(2+y)(1+y) = y \end{cases}$.

Pour $y = 0$, on obtient un point critique : $A(0, 0)$.

Pour $y \neq 0$, il vient $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 - 2y \\ 4 + 6y + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 - 2y \\ y^2 + 3y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{3}{2} \\ y^2 + 3y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$

On trouve les solutions de $y^2 + 3y + \frac{3}{2} = 0$: $y_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ et $y_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$

Ceci donne deux autres points critiques : $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Il y a donc au total trois points critiques.

6) On détermine la matrice Hessienne. Il vient $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y + 2 \end{cases}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x + 1$.

Il vient donc $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y+2 \\ 2y+2 & 2x+1 \end{pmatrix}$

On étudie chaque point critique. En $A(0, 0)$: $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(H_f(0, 0)) = -3 < 0$.

Donc f ne possède pas d'extremum local en $A(0, 0)$.

En $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$: $H_f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -(1+\sqrt{3}) \\ -(1+\sqrt{3}) & -\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$. $\det\left(H_f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)\right) < 0$.

Donc f ne possède pas d'extremum local en $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$.

En $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$: $M = H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$. $Tr(M) = 2 + \sqrt{3} > 0$

De plus, $\det(M) = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1)^2 = 3(\sqrt{3} - 1) > 0$.

Donc f possède un minimum local en $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$. Il vaut $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{15-6\sqrt{3}}{8}$

Enfin, $f(x, x) = x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4} \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$.

Donc f ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34 (Oral Mines 24,3) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 x^k f(x) dx = 0$

. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0, 1]$.

Indication donnée : raisonner par l'absurde et construire une fonction g telle que fg soit positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$.

Ind : considérer les valeurs d'annulation de f dans $]0, 1[$ et construire une fonction polynomiale g qui change de signe en même temps que f , de manière à ce que gf reste de signe fixe sur $[0, 1]$.

Tout d'abord, on remarque que par linéarité de l'intégrale, il vient $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(x)f(x)dx = 0$.

On va considérer un polynôme P qui change de signe en même temps que f , de manière à que Pf reste de signe fixe sur $[0,1]$

On suppose par l'absurde que les valeurs d'annulation de f dans $]0,1[$ sont $c_1 < c_2 < \dots < c_p$, avec $p \leq n$.

On considère, pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $x_k \in]c_k, c_{k+1}[$, $x_0 \in]0, c_1[$ et $x_p \in]c_p, 1[$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $]c_k, c_{k+1}[$, et qu'elle ne s'annule pas sur cet intervalle, elle est de signe fixe sur $]c_k, c_{k+1}[$. Elle change de signe en c_k lorsque $f(x_{k-1})f(x_k) < 0$.

On pose $g(x) = f(x_p) \prod_{k=1}^p (x - c_k)^{\alpha_k}$, avec $\alpha_k = 1$ si $f(x_{k-1})f(x_k) < 0$ et $\alpha_k = 0$ si $f(x_{k-1})f(x_k) > 0$.

Pour $x > c_p$, $g(x)f(x) = f(x)f(x_p) \prod_{k=1}^p (x - c_k)^{\alpha_k} > 0$ car $f(x)f(x_p) > 0$.

Or g et f changent de signe en même temps (en certains c_k), donc gf ne change pas de signe et il vient donc $\forall x \in [0,1], f(x)g(x) \geq 0$. De plus, g est polynomiale, de degré inférieur ou égal à p , avec $p \leq n$.

Donc on a $\int_0^1 g(x)f(x)dx = 0$ et comme gf est continue et positive, $\forall x \in [0,1], f(x)g(x) = 0$ et f est nulle sur

$[0,1] \setminus \{c_1, \dots, c_p\}$, donc elle s'annule une infinité de fois, ce qui est absurde.

Donc f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0,1]$ (et même dans $]0,1[$).

Exercice 35 (Oral Mines 23, Hugo B,4) : déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$

Ind : développer e en série entière et déterminer un équivalent de $U_n = \frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$. Montrer avec soin que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$$

On développe en série entière : $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Alors $\sin(2\pi en!) = \sin\left(2\pi \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + 2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) = \sin\left(2\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right)$ car $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$.

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} J_n$, avec $J_n = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}$

Donc $0 \leq J_n \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$.

Or $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ converge donc son reste tend vers 0. Par encadrement, $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$, donc $\sin(2\pi en!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\pi}{(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Donc $\frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n \ln(n)} = V_n$.

Or (V_n) est de signe fixe, donc $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$ et $\sum_{n \geq 2} V_n$ ont même nature.

Or par comparaison somme-intégrale, $\sum_{n \geq 2} V_n$ diverge, donc $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$ diverge.

(En effet, pour $N \geq n \geq 2$, $\frac{1}{n \ln(n)} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt$, donc $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln(n)} \geq \sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.

Donc $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln(n)} \geq \int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2))$

Exercice 36 (Oral Mines 23, Samuel,4) :

- 1) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique $t_x > 0$ tel que $sh(x) = x + \frac{x^3}{6} sh(x t_x)$
- 2) Montrer que $sh(x t_x) > 1$
- 3) Etudier les limites de t_x lorsque x tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Ind :

- 1) Chercher le nombre de solutions de l'équation $sh(xu) = y$, où y est fixé,
- 2) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
- 3) Dédire une minoration de t_x de la question précédente, et utiliser un développement limité en 0.

- 1) On fixe $x > 0$. On cherche $t_x > 0$ tel que $sh(x t_x) = \frac{6(sh(x) - x)}{x^3}$. Or sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,

donc $y = \frac{6(sh(x) - x)}{x^3}$ possède un unique antécédent u_x par sh . On pose alors $t_x = \frac{u_x}{x}$ et on a bien

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{6} sh(x t_x).$$

De plus, on étudie $a : x \mapsto sh(x) - x$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, a'(x) = ch(x) - 1 \geq 0$, avec $\forall x \in \mathbb{R}^*, a'(x) > 0$.

Donc comme a est continue sur $\mathbb{R}_+$, a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $x > 0$, on peut dire

que $y = \frac{6(sh(x) - x)}{x^3} > 0$. Donc $sh(u_x) > sh(0)$ et par stricte croissance de sh , il vient $t_x = \frac{u_x}{x} > 0$

Enfin, par bijectivité de sh , t_x est bien unique (si on prend une autre solution t' , on doit avoir

$$sh(x t_x) = sh(x t'), \text{ donc } x t_x = x t' \text{ et } t_x = t'.$$

Donc il existe un unique $t_x > 0$ tel que $sh(x) = x + \frac{x^3}{6} sh(x t_x)$

- 2) On utilise la formule de Taylor avec reste intégral pour sh (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et x , à

$$\text{l'ordre } n = 3. \text{ Il vient donc } sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} sh(t) dt.$$

Or pour $t \in [0, x]$, $\frac{(x-t)^3}{3!} sh(t) \geq 0$ et $t \mapsto \frac{(x-t)^3}{3!} sh(t)$ est continue sur $[0, x]$, sans être la fonction

nulle. Donc $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} sh(t) dt > 0$ et $sh(x) > x + \frac{x^3}{6}$.

Dès lors, $x + \frac{x^3}{6} sh(x t_x) > x + \frac{x^3}{6}$ donc $sh(x t_x) > 1$

3) On sait que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $a \in \mathbb{R}_+^*$ l'unique réel tel que $sh(a) = 1$.

Alors $sh(xt_x) \geq sh(a)$, donc $xt_x \geq a$ et $t_x \geq \frac{a}{x}$, donc $\boxed{t_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty}$

Il vient par ailleurs $sh(xt_x) = \frac{6(sh(x) - x)}{x^3}$ donc $\ln\left(\frac{e^{xt_x} - e^{-xt_x}}{2}\right) = \ln(6) - 3\ln(x) + \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\right)$.

On met le terme dominant en facteur :

$$\ln\left(e^{xt_x} \frac{1 - e^{-2xt_x}}{2}\right) = \ln(6) - 3\ln(x) + \ln\left(e^x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{2} - xe^{-x}\right)\right).$$

Donc $xt_x = x + o(x)$, donc $t_x = 1 + o(1)$ et $\boxed{t_x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$

Exercices en plus :

Exercice 37 (oral CCINP 23, Simon,3) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + 1 < b$. Soit une suite (U_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

- 1) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$.
- 2)
 - a) Prouver que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = -\infty$
 - b) En déduire que $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- 3) On pose $\alpha = b - a$ et $V_n = n^\alpha U_n$. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ puis montrer que $\sum \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ converge.
- 4) Montrer $\exists A > 0, U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$. En déduire la nature de $\sum U_n$.
- 5) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \frac{b-1}{b-a-1} U_0$. On pourra commencer par calculer la N -ème somme partielle de $n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n$.

Ind :

- 1) Utiliser un développement limité.
- 2)
 - a) Montrer que la série diverge, puis que la suite des sommes partielles est décroissante.
 - b) Utiliser la question précédente et une somme télescopique.
- 3) Utiliser les développements limités et $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \ln\left(n\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) - \ln\left(n\left(1+\frac{b}{n}\right)\right)$.
- 4) Calculer les sommes partielles de la série précédente et simplifier.
- 5) Montrer que la somme suggérée est nulle d'une part, et la calculer d'une autre manière en séparant les différents termes.

$$1) \quad \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \ln\left(n\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) - \ln\left(n\left(1+\frac{b}{n}\right)\right) = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)$$

Donc $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)_{n \rightarrow +\infty} = \frac{a-b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $a < b$, on a $a \neq b$ donc $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)_{n \rightarrow +\infty} \sim \frac{a-b}{n}$.

2) a) $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)_{n \rightarrow +\infty} \sim \frac{a-b}{n}$, donc comme $\left(\frac{a-b}{n}\right)$ est de signe fixe et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$

diverge. Si on note $S_n = \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{k+a}{k+b}\right)$, alors comme $a < a+1 < b$, (S_n) est décroissante (car

$\ln\left(\frac{k+a}{k+b}\right) < 0$ pour $k \in \mathbb{N}$). Comme elle ne converge pas, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = -\infty$

2b) Or $\sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} (\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)) = \ln(U_N) - \ln(U_0)$, donc $\ln(U_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty$ et donc

$$U_n = \exp(\ln(U_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3) $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(n(1 + \frac{a}{n})\right) - \ln\left(n(1 + \frac{b}{n})\right)$.

Donc $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = (b-a) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{n}\right)$.

Or $\ln(u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, donc

$$\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = (b-a) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{b}{n} - \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2n^2} (a-b-(a^2-b^2)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{(a-b)(1-a-b)}{2n^2}$

(On sait que $a+1 < b$, donc $a \neq b$ et $a+b > 2a+1$ donc comme $a \in \mathbb{R}_+$, $a+b-1 > 0$).

Donc par critère d'équivalence, comme $\left(\frac{(a-b)(1-a-b)}{2n^2}\right)$ est de signe fixe, $\sum \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ converge.

4) $\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{V_{k+1}}{V_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(V_{k+1}) - \ln(V_k))$. C'est une somme télescopique

Donc $\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{V_{k+1}}{V_k}\right) = \ln(V_n) - \ln(V_1)$ et avec 3), $\ln(V_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{V_{k+1}}{V_k}\right) + \ln(V_1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}$

Donc $n^\alpha U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A = e^b > 0$ et on a bien $U_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$

Comme $a+1 < b$, il vient $\alpha = b-a > 1$, donc $\sum U_n$ converge.

5) On calcule comme suggéré $\sum_{n=0}^N (n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n) = \sum_{n=0}^N ((n+b)U_{n+1} - (n+a)U_n) = 0$

On note $T_N = \sum_{n=0}^N U_n$ et $T = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$. On calcule d'une autre manière :

$$\sum_{n=0}^N (n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n) = \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)U_n - \sum_{n=1}^N nU_n + b \sum_{n=1}^{N+1} U_n - a \sum_{n=0}^N U_n$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N (n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n) = NU_{N+1} - \sum_{n=1}^N U_n + b(U_{N+1} + \sum_{n=1}^N U_n) - a \sum_{n=0}^N U_n$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N (n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n) = NU_{N+1} - T_N + U_0 + b(U_{N+1} + T_N - U_0) - aT_N$$

Or $U_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{N^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc $NU_{N+1} \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

En passant à la limite : $0 = -T + U_0 + bT - bU_0 - aT$. Donc $T = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \frac{b-1}{b-a-1} U_0$

Exercice 38 (Oral Mines 23,24, Chloé,5) : soient deux réels a, b tels que $a < b$. Soient deux fonctions $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $\frac{f}{g}$ admet un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$.

2) Montrer que $\left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right) \leq \frac{(M+m)^2}{4mM} \left(\int_a^b fg \right)^2$

Ind :

2) Considérer $(Mg(x) - f(x))(f(x) - mg(x))$ pour $x \in [a, b]$, puis intégrer.

1) $\frac{f}{g}$ est continue sur le segment $[a, b]$, donc par théorème des bornes atteintes, elle possède un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$.

2) On a donc pour tout $x \in [a, b]$: $0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$. Donc $(Mg(x) - f(x))(f(x) - mg(x)) \geq 0$. Donc en développant : $(M+m)g(x)f(x) \geq f^2(x) + Mmg^2(x)$.

$$\text{Donc en intégrant : } (M+m) \int_a^b g(x)f(x)dx \geq \int_a^b f^2(x)dx + Mm \int_a^b g^2(x)dx \geq 0.$$

$$\text{Donc en mettant au carré } (M+m)^2 \left(\int_a^b fg \right)^2 \geq \left(\int_a^b f^2 + Mm \int_a^b g^2 \right)^2.$$

Or si $u, v \in \mathbb{R}, (u+v)^2 \geq 4uv$ (car $(u-v)^2 \geq 0$).

$$\text{Donc } (M+m)^2 \left(\int_a^b fg \right)^2 \geq 4Mm \int_a^b f^2 \int_a^b g^2. \text{ On a bien } \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right) \leq \frac{(M+m)^2}{4mM} \left(\int_a^b fg \right)^2$$

Exercice 39 (Oral Mines 23, Mailys,5) : Convergence et calcul de $\sum (-1)^n I_n$, avec $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t} dt$

Ind : je n'ai trouvé qu'une manière difficile et astucieuse de faire cet exercice, mais peut-être existe-t-il une autre

possibilité. Etudier $S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k I_k$ en calculant $\sum_{k=0}^N (-1)^k \sin((2k+1)t)$.

Justifier que $I_n = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t} dt$. Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue vu en début d'année et calculer

$$K_N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+1)u)}{\sin u} du \text{ pour } N \in \mathbb{N}.$$

On sait que $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t} dt$. On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et on étudie $S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k I_k$.

$$\text{Il vient } S_N = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t} \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k \sin((2k+1)t) \right) dt.$$

$$\text{On calcule pour } t \in [0, \pi] : \sum_{k=0}^N (-1)^k \sin((2k+1)t) = \text{Im} \left(e^{it} \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{2ikt} \right) = \text{Im} \left(e^{it} \sum_{k=0}^N (-e^{2it})^k \right)$$

$$\text{Pour } t \neq \frac{\pi}{2}, e^{it} \sum_{k=0}^N (-e^{2it})^k = e^{it} \left(\frac{1 - (-e^{2it})^{N+1}}{1 - e^{2it}} \right) = \frac{e^{it}}{e^{it} (2 \cos t)} \left(1 + (-1)^N e^{i(2N+2)t} \right).$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^N (-1)^k \sin((2k+1)t) = \frac{(-1)^N \sin((2N+2)t)}{2 \cos t}.$$

La valeur $t = \frac{\pi}{2}$ pose problème.

$$\text{En posant } u = \pi - t, \text{ on remarque que } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)u)}{1+\cos^2 u} du.$$

$$\text{Donc } I_n = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t} dt \text{ et } S_N = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 t} \left(\frac{(-1)^N \sin((2N+2)t)}{2 \cos t} \right) dt = (-1)^N \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+2)t)}{\cos t (1+\cos^2 t)} dt$$

La fonction sous l'intégrale est prolongeable par continuité en $\pi/2$ donc cette intégrale impropre est convergente et on a bien l'égalité.

$$\text{On pose alors } u = \frac{\pi}{2} - t \text{ pour se ramener à un problème en } 0 : S_N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+2)u)}{\sin u (1+\sin^2 u)} du.$$

$$\text{Donc } S_N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+2)u)}{\sin u} du - \int_0^{\pi/2} \sin((2N+2)u) \frac{\sin u}{(1+\sin^2 u)} du.$$

On utilise le lemme de Riemann-Lebesgue qui se prouve à l'aide d'une intégration parties (vu en TD) :

$$\text{Si } g \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, b], \text{ alors } \int_a^b g(t) \sin((2N+2)t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Donc ici } \int_0^{\pi/2} \sin((2N+2)u) \frac{\sin u}{(1+\sin^2 u)} du \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Alors } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+2)u)}{\sin u} du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+1)u)}{\sin u} du + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+2)u) - \sin((2N+1)u)}{\sin u} du.$$

$$\text{Pour } c, d \in \mathbb{R}, \sin(c) - \sin(d) = \text{Im}(e^{ic} - e^{id}) = \text{Im} \left(e^{i(c+d)/2} (2i \sin \left(\frac{c-d}{2} \right)) \right) = 2 \sin \left(\frac{c-d}{2} \right) \cos \left(\frac{c+d}{2} \right)$$

Donc $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+2)u) - \sin((2N+1)u)}{\sin u} du = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos((2N+3/2)u)}{\cos \frac{u}{2}} du \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, avec la même preuve que

pour le lemme de Riemann-Lesbesgue.

Si on note $K_N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+1)u)}{\sin u} du$, alors

$$K_{N+1} - K_N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+3)u) - \sin((2N+1)u)}{\sin u} du = 2 \int_0^{\pi/2} \cos((2N+2)u) du = 0, \text{ donc } K_N = K_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{=} K_N + o(1) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 40 (oral ESPCI 24, Angel,5) : soit $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 - z + \frac{i}{n^3}\right)}$.

- 1) Montrer que f est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1.
- 2) Montrer que f est définie sur tout le disque unité fermé.
- 3) Montrer que f n'est pas continue sur le disque unité fermé.

Ind :

- 1) Montrer d'abord que $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^5 + in^2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\left(1 + \frac{i}{n^3}\right)^k}$: on aimerait ensuite échanger les deux

sommes. On peut utiliser le théorème de Fubini sur les familles sommables (hors programme dans ce

contexte non probabiliste), ou bien prouver que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right) = 0$ à l'aide d'une

majoration du module.

- 2) Séparer deux cas suivant que $z = 1$ ou pas.
- 3) Poser $z_N = \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i \frac{1}{N^3}$ et minorer la partie réelle de $f(z_N)$ en isolant le terme en $n = N$.

- 1) On prend $|z| < 1$.

Il vient $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 + \frac{i}{n^3}\right) \left(1 - \frac{z}{1 + \frac{i}{n^3}}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^5 + in^2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\left(1 + \frac{i}{n^3}\right)^k}$. Si on note $u = \frac{z}{1 + \frac{i}{n^3}}$, on a

bien $|u| < 1$ car $\left|1 + \frac{i}{n^3}\right| > 1$. Donc $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right)$.

On s'intéresse à $\sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}}$ (c'est une somme finie de séries

convergentes). Si on pose, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé : $b_{n,k} = \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}}$, alors $n^2 b_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la série

$\sum_{n \geq 1} b_{n,k}$ converge absolument et on pose $a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}}$.

Il vient alors $\sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \left(a_k - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right)$.

De plus, $|a_k| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{|1+in^{-3}|^{k+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} = C$, donc comme $|z| < 1$, $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ converge et on peut séparer

la somme en deux.

Donc $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right)$.

Or $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} = C_N$, donc $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right| \leq C_N \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^k$.

Donc par encadrement, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right) = 0$ et $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

Donc f est développable en série entière, avec un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

De plus, si $z = 1 + \frac{i}{k^3}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{1 - z + \frac{i}{n^3}}$ n'est pas défini.

Donc $R \leq \left| 1 + \frac{i}{k^3} \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^6}}$, donc en passant à la limite, $R \leq 1$.

f est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1.

On peut aussi utiliser le théorème de Fubini sur les familles sommables, mais c'est normalement hors programme puisqu'on n'est pas dans un contexte probabiliste....

2) Si $|z| \leq 1$, on pose $U_n(z) = \frac{1}{n^5 \left(1 - z + \frac{i}{n^3} \right)}$.

Si $z = 1$, il vient $U_n(z) = -\frac{i}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} U_n(z)$ converge.

Si $z \neq 1$, $n^2 U_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sum_{n \geq 1} U_n(z)$ converge aussi.

Donc f est définie sur tout le disque unité fermé.

3) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $z_N = \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i \frac{1}{N^3}$. On a $|z_N| = 1$.

Alors $f(z_N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{N^3} \right) \right)}$.

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(f(z_N)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}}{n^5 \left(\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{N^3}\right)^2 \right)}.$$

Il s'agit d'une somme de nombres positifs, supérieure ou égale au terme obtenu pour $n = N$:

$$\operatorname{Re}(f(z_N)) \geq \frac{1}{N^5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}\right)}.$$

$$\text{Or } \frac{1}{N^5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}\right)} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{N^5} \left(\frac{N^6}{2}\right), \text{ donc par encadrement, } \operatorname{Re}(f(z_N)) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

En particulier, la suite (z_N) converge vers 1 lorsque N tend vers $+\infty$, mais $f(z_N)$ ne tend pas vers $f(1)$. Avec la caractérisation séquentielle, f n'est pas continue en 1 donc sur le disque unité fermé.

Exercice 41 (oral X 24, Andréa, 5) : soient deux suites (a_n) , (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$ et (b_n) diverge.

On suppose que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge vers $s \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Montrer que $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$ converge vers s .

Ind : revenir à la définition de limite. Majorer $\left|\frac{A_n}{B_n} - s\right| = \left|\frac{A_n - sB_n}{B_n}\right|$ en coupant la somme en deux. Montrer que $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et conclure avec la double détente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient $B_{n+1} - B_n = b_{n+1} \geq 0$, donc (B_n) est croissante. Si elle convergeait, on aurait $b_n = B_n - B_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$.

On utilise la définition de limite : soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \left|\frac{a_n}{b_n} - s\right| \leq \varepsilon$.

Donc pour $n \geq N$, $|a_n - s b_n| \leq \varepsilon b_n$.

$$\text{On s'intéresse à } W_n = \left|\frac{A_n}{B_n} - s\right| = \left|\frac{A_n - sB_n}{B_n}\right|$$

$$\text{Il vient alors pour } n \geq N : A_n - sB_n = \sum_{k=0}^N (a_k - s b_k) + \sum_{k=N+1}^n (a_k - s b_k)$$

$$\text{Donc } |A_n - sB_n| \leq \left|\sum_{k=0}^N (a_k - s b_k)\right| + \sum_{k=N+1}^n |a_k - s b_k| \leq \left|\sum_{k=0}^N (a_k - s b_k)\right| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n b_k.$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0, \text{ donc } |A_n - sB_n| \leq \left|\sum_{k=0}^N (a_k - s b_k)\right| + \varepsilon B_n.$$

$$\text{Ainsi, } W_n = \left|\frac{A_n - sB_n}{B_n}\right| \leq \frac{\left|\sum_{k=0}^N (a_k - s b_k)\right|}{B_n} + \varepsilon.$$

$$\text{C'est la double détente : } \left|\sum_{k=0}^N (a_k - s b_k)\right| \text{ est une constante et } B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty, \text{ donc } \frac{\left|\sum_{k=0}^N (a_k - s b_k)\right|}{B_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', \left| \frac{\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)}{B_n} \right| \leq \varepsilon$. Donc $\forall n \geq \max(N, N'), \left| \frac{A_n}{B_n} - s \right| \leq 2\varepsilon$.

On retrouve la définition de limite et $\left(\frac{A_n}{B_n} \right)$ converge vers s .

Exercice 42 (oral ENS 24, Andréa,4) : On considère une suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1}^3 = 8 - a_n^2 \end{cases}$.

Que dire de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{n+1} - a_n|$?

Ind : poser $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$ et étudier cette fonction sur $[0, 2]$. Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Il s'agit d'une suite récurrente. On note pour $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Par composée, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$. De plus, $f(0) = 8^{1/3} = 2$, donc $a_1 = 2$, et $f(2) = 4^{1/3} > 0$.

Donc $f([0, 2]) \subset [f(2), f(0)] \subset [0, 2]$ et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, 2]$.

De plus, pour $x > 0$, $f'(x) = -\frac{2}{3}x(8 - x^2)^{-2/3} = -\frac{2}{3}x \frac{1}{(f(x))^2}$

Donc pour $x \in]0, 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{3} \frac{1}{(f(2))^2}$, donc $|f'(x)| \leq \frac{4^{1/3}}{3} \leq \frac{2}{3} = k$.

On utilise l'inégalité des accroissements finis.

Comme f est continue sur $[0, 2]$, dérivable sur $]0, 2[$, à valeurs réelles, il vient

$$\forall x, y \in [0, 2], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

En particulier, comme $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, 2]$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq k|a_n - a_{n-1}|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}|$.

Par récurrence, il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |a_{n+1} - a_n| \leq k^n |a_1 - a_0|$.

Comme $0 \leq k < 1$ (l'application f est contractante sur $]0, 2]$), $\sum k^n |a_1 - a_0|$ converge, donc $\sum |a_{n+1} - a_n|$ aussi.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{n+1} - a_n|$ est convergente.

Exercice 43 (oral ENS 24, Matthias,5) : Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} (P_n(x) - e^x) = 0. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(P_n) = +\infty$$

Ind : on peut procéder par l'absurde et montrer qu'il existe une suite (Q_n) extraite de (P_n) qui est de degré

borné. Si on a $Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k$, prendre $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq d}$ deux à deux distincts et étudier les limites des $Q_n(\lambda_i)$ pour

montrer avec Vandermonde que $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_k$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} (P_n(x) - e^x) = 0$, on peut dire que (P_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction

$$x \mapsto e^x.$$

On procède par l'absurde et on suppose qu'on n'a pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(P_n) = +\infty$.

Alors il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \deg(P_n) \leq d$. Soit un tel d

Pour $N = 0$, on prend $n_0 \geq N, \deg(P_{n_0}) \leq d$ et on pose $Q_0 = P_{n_0}$. On pose $n_0 = \varphi(0)$

Puis pour $N = n_0 + 1$, on prend $n_1 \geq N, \deg(P_{n_1}) \leq d$ et on pose $Q_1 = P_{n_1}$ et $n_1 = \varphi(1) > \varphi(0)$.

On construit ainsi par récurrence une suite $(Q_n) = (P_{\varphi(n)})$ de polynômes qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(Q_n) \leq d$. Elle est extraite de (P_n) donc converge aussi vers $x \mapsto e^x$ dans l'espace vectoriel normé des fonctions C^∞ sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

On écrit ensuite pour $x \in [-1, 1]$: $Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k$.

Comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple, il vient $\forall x \in [-1, 1], Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.

On prend $-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_d < 1$. On a alors pour tout $j \in \llbracket 0, d \rrbracket$: $\sum_{k=0}^d a_{n,k} (\lambda_j)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda_j}$.

On écrit cela matriciellement : si $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & & \lambda_1^d \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_d & & \lambda_d^d \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0} \\ e^{\lambda_1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$.

On a donc $AX_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$ (convergence coordonnée par coordonnée).

Or comme les λ_i sont deux à deux distincts, on peut dire avec Vandermonde que A est inversible.

Or $X \mapsto A^{-1}X$ est linéaire en dimension finie, donc continue.

Donc $A^{-1}(AX_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A^{-1}B$, donc la suite (X_n) converge dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Avec la convergence coordonnée par coordonnée, il vient $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_k$.

Dès lors, pour $x \in [-1, 1]$, $Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^d a_k x^k$. Mais on a aussi $Q_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$, donc par unicité de la

limite, $\forall x \in [-1, 1], \sum_{k=0}^d a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$. C'est absurde par unicité du développement en série entière (on n'a pas

$$\frac{1}{(d+1)!} = 0. \quad \boxed{\text{Donc on a bien } \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(P_n) = +\infty.}$$

Exercice 44 (oral ESPCI 24, Raphaël, 5) : soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues telles que

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0. \text{ Montrer que } \left(\int_0^1 f^2(t)dt \right) \left(\int_0^1 g^2(t)dt \right) \geq 4 \left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 g(t)dt \right)^2$$

On pourra commencer par prouver le résultat pour des fonctions constantes par morceaux.

Ind : prendre une subdivision régulière de $[0, 1]$ et écrire le résultat attendu pour des fonctions constantes par morceaux. Traduire le résultat à l'aide de produits scalaires et de normes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en utilisant

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \text{ Décomposer les vecteurs à l'aide de } \text{Vect}(E) \oplus (\text{Vect}(E))^\perp = \mathbb{R}^n \text{ et montrer le résultat attendu}$$

avec Cauchy-Schwarz et des normes de vecteurs.

Généraliser le résultat aux fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des sommes de Riemann

On considère une subdivision régulière $(c_0, \dots, c_n)$ de $[0, 1]$ donnée par $c_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On définit les fonctions f_n et g_n par $\forall x \in [c_k, c_{k+1}[$, $f_n(x) = \lambda_k$ et $g_n(x) = \mu_k$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, avec

$$f_n(1) = \lambda_n \text{ et } g_n(1) = \mu_n. \text{ Alors } \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k, \int_0^1 g_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \text{ et } \int_0^1 f_n(t)g_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mu_k.$$

On suppose donc $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mu_k = 0$ et on veut prouver que $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2\right) \geq 4 \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\right)\right)^2$, ce qui équivaut à $n^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2\right) \geq 4 \left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\right)\right)^2$.

On pose alors $U = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $V = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

On veut montrer que $n^2 \|U\|^2 \|V\|^2 \geq 4 \langle U, E \rangle^2 \langle V, E \rangle^2$ lorsque $\langle U, V \rangle = 0$.

On sait que $\text{Vect}(E) \oplus (\text{Vect}(E))^\perp = \mathbb{R}^n$.

On décompose $U = \alpha E + U'$ et $V = \beta E + V'$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\langle U', E \rangle = \langle V', E \rangle = 0$.

On a alors $\|U\|^2 = \alpha^2 \|E\|^2 + \|U'\|^2 = \alpha^2 n + \|U'\|^2$, $\|V\|^2 = \beta^2 n + \|V'\|^2$, $\langle U, E \rangle = \alpha n$, $\langle V, E \rangle = \beta n$.

En outre $\langle U, V \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha \beta n + \langle U', V' \rangle = 0$

On veut donc montrer que $n^2 (\alpha^2 n + \|U'\|^2) (\beta^2 n + \|V'\|^2) \geq 4 \alpha^2 \beta^2 n^4$ lorsque $\langle U', V' \rangle = -\alpha \beta n$.

Ceci équivaut à $(\alpha^2 n + \|U'\|^2) (\beta^2 n + \|V'\|^2) \geq 4 \alpha^2 \beta^2 n^2$.

Or avec Cauchy-Schwarz, $\langle U', V' \rangle^2 = (\alpha \beta n)^2 \leq \|U'\|^2 \|V'\|^2$.

De plus, $(\alpha^2 n \|V'\|^2 + \beta^2 n \|U'\|^2) = \|\alpha \sqrt{n} V' + \beta \sqrt{n} U'\|^2 - 2 \alpha \beta n \langle U', V' \rangle \geq 2 \alpha^2 \beta^2 n^2$.

On a donc bien $(\alpha^2 n + \|U'\|^2) (\beta^2 n + \|V'\|^2) \geq 4 \alpha^2 \beta^2 n^2$ et le résultat est vrai pour f et g constantes par morceaux définies auparavant.

On utilise ensuite les sommes de Riemann pour approcher f et g continues sur $[0, 1]$ à l'aide de fonctions constantes par morceaux. On suppose $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$.

On prend $n \geq 2$ et on pose $\lambda_k = f_n(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\mu_k = g_n(c_k) = g\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

On pose aussi $\lambda_{n-1} = 1$ et $\mu_{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k \mu_k$ (ainsi, on a bien $\int_0^1 f_n(t)g_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mu_k = 0$).

Donc avec ce qui précède, $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2\right) \geq 4 \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\right)\right)^2$ (1).

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} f^2\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^2\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f^2\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n}$. Or f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc

bornée et ainsi $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t)dt$.

De même, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} g^2\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\mu_{n-1}^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^2\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} g^2\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{\mu_{n-1}^2}{n}$.

Or $\frac{\mu_{n-1}}{n} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} f g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f g\left(\frac{n-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$, donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g^2(t)dt$.

De même, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)dt$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t)dt$.

On conclut en passant l'inégalité (1) à la limite : $\boxed{\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right) \left(\int_0^1 g^2(t)dt\right) \geq 4 \left(\int_0^1 f(t)dt\right) \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2}$

Exercice 45 (oral ENS Lyon 24, Raphaël, 5) : soit f une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée.

- 1) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2} \right) = |f(0)|$.
- 2) On suppose en plus $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Ind :

- 1) Montrer tout d'abord que $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |f(x)| e^{-tx^2}$ possède bien un maximum M_t sur $\mathbb{R}$ en exploitant la définition de limite et le théorème des bornes atteintes. Utiliser ensuite la définition de la continuité de f en 0 et obtenir le résultat avec la définition de limite.
- 2) Etudions sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $h_t : x \rightarrow x e^{-tx^2}$ et déterminer son maximum N_t . Exprimer g_t à l'aide de f_t et procéder de manière analogue au 1), en encadrant $\frac{M_t}{N_t}$ pour t assez grand.

- 1) Soit $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C$. Pour $t \geq 1$, on considère $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |f(x)| e^{-tx^2}$.

On justifie que g_t possède un maximum sur $\mathbb{R}$.

Si f est constante nulle, c'est bien le cas.

Sinon, soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) \neq 0$. Soit $u = g_t(c) = |f(c)| e^{-tc^2} > 0$.

Comme $g_t(x) = |f(x)| e^{-tx^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $g_t(x) = |f(x)| e^{-tx^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, on peut trouver $A > 0$ tel que

$\forall x \notin [-A, A], g_t(x) \leq \frac{u}{2}$. En particulier, $c \in [-A, A]$. Sur le segment $[-A, A]$, g_t est continue, donc possède par théorème des bornes atteintes un maximum $M_t \geq u = g_t(c)$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, g_t(x) \leq M_t$ et g_t possède un maximum égal à M_t sur $\mathbb{R}$.

On prouve maintenant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (M_t) = |f(0)|$, avec $M_t = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} |f(0)|$.

Donc soit $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha], |f(x)| \leq |f(0)| + \varepsilon$. Donc pour $x \in [-\alpha, \alpha] : |g_t(x)| \leq |f(0)| + \varepsilon$.

Pour $|x| \geq \alpha$, $|f(x)| e^{-tx^2} \leq C e^{-t\alpha^2}$. Or $C e^{-t\alpha^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Soit donc $t_0 \geq 1$ tel que $\forall t \geq t_0, C e^{-t\alpha^2} \leq |f(0)| + \varepsilon$.

Pour $t \geq t_0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, |g_t(x)| \leq |f(0)| + \varepsilon$, donc $g_t(0) \leq M_t \leq |f(0)| + \varepsilon$.

On a donc $\forall t \geq t_0, |f(0)| \leq M_t \leq |f(0)| + \varepsilon$.

C'est la définition de limite et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2} \right) = |f(0)|$.

- 2) On suppose $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Alors $g_t(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $g_t(x) = \left| \frac{f(x)}{x} \right| x e^{-tx^2}$.

Etudions sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $h_t : x \rightarrow x e^{-tx^2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h_t'(x) = (1 - 2tx^2) e^{-tx^2}$.

Elle est croissante puis décroissante et possède donc un maximum atteint pour $2tx^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$.

Le maximum de h_t sur $\mathbb{R}_+$ est atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$ et vaut $N_t = \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{1}{\sqrt{e}}$.

On a d'une part $M_t = \max_{x \in \mathbb{R}} g_t(x) \geq g_t\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right) = \left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right| \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{1}{\sqrt{e}}$, donc $\sqrt{2te}M_t \geq \left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right|$ (1).

On fixe de nouveau $\varepsilon > 0$.

Il vient par définition $\left| \frac{f(x)}{x} \right|_{x \rightarrow 0} \rightarrow |f'(0)|$. On peut donc considérer $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |f'(0)| + \varepsilon. \text{ Alors } \forall x \in [-\alpha, \alpha], |g_t(x)| \leq (|f'(0)| + \varepsilon) N_t.$$

Pour $|x| \geq \alpha$, $|f(x)|e^{-tx^2} \leq Ce^{-t\alpha^2}$, donc $0 \leq \frac{|g_t(x)|}{N_t} \leq C\sqrt{2te}e^{-t\alpha^2}$. Or par croissance comparée,

$$\sqrt{2te}e^{-t\alpha^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \text{ Soit donc } t_0 \geq 1 \text{ tel que } \forall t \geq t_0, C\sqrt{2te}e^{-t\alpha^2} \leq |f'(0)| + \varepsilon.$$

Pour $t \geq t_0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, |g_t(x)| \leq (|f'(0)| + \varepsilon) N_t$, donc $M_t \leq (|f'(0)| + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2te}}$

On a donc avec (1) : $\forall t \geq t_0, (|f'(0)| + \varepsilon) \geq \sqrt{2te}M_t \geq \left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right|$.

On utilise la double détente.

Par composée de limites, $\left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow |f'(0)|$, donc il existe $t_1 \geq 1$ tel que $\forall t \geq t_1, \left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right| \geq |f'(0)| - \varepsilon$.

Pour $t \geq \max(t_0, t_1)$, il vient $\forall t \geq t_0, (|f'(0)| + \varepsilon) \geq \sqrt{2te}M_t \geq (|f'(0)| - \varepsilon)$

On reconnait la définition de limite et $\sqrt{2te}M_t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} |f'(0)|$.

$$\text{Donc } M_t = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|e^{-tx^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|f'(0)|}{\sqrt{2te}}$$

Exercice 46 (Oral ENS 23, Ali,5) : soit $U_n = \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{1/n}$.

- 1) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $\ln(U_n)$.
- 2) Déterminer un équivalent de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Ind :

- 1) Utiliser une comparaison avec une intégrale.
- 2) Si $S_n = \sum_{k=1}^n k \ln(k) = a_n + b_n + o(b_n)$, alors poser $W_n = S_n - a_n + b_n$ et faire un développement de

$W_n - W_{n-1}$ à l'ordre $o(1)$. Puis montrer que si $Y_n = o(1)$, alors $\sum_{k=2}^n Y_k = o(n)$ et conclure.

- 1) On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(U_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n k \ln(k) \right)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k \ln(k)$ et pour $t \geq 1$:

$$f(t) = t \ln(t).$$

On effectue une comparaison somme-intégrale. f est croissante sur $[1, +\infty[$.

$$\text{Pour } k \geq 1, f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt, \text{ donc } S_n = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq n \ln(n) + \int_1^n f(t)dt.$$

De plus, $S_n = \sum_{k=2}^n f(k) \geq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \int_1^n f(t) dt$.

On a donc $\int_1^n f(t) dt \leq S_n \leq n \ln(n) + \int_1^n f(t) dt$.

On calcule avec une intégration par parties : $\int_1^n f(t) dt = \frac{1}{2} n^2 \ln(n) - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{t^2}{t} dt = \frac{1}{2} n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}$

Donc $\frac{1}{4} \leq S_n - \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{n^2}{4} \leq n \ln(n) + \frac{1}{4}$, donc par encadrement, $\frac{1}{n^2} \left(S_n - \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{n^2}{4} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{4} + o(n^2)$ et $\boxed{\ln(U_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} n \ln(n) - \frac{n}{4} + o(n)}$

- 2) Pour pouvoir ensuite prendre l'exponentielle et aboutir à un équivalent de U_n , on a besoin d'un développement asymptotique du $\ln(U_n)$ à l'ordre $o(1)$, donc d'un développement de S_n à l'ordre $o(n)$

On pose $W_n = S_n - \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{n^2}{4}$.

On cherche un équivalent de $W_n - W_{n-1} = n \ln(n) - \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{1}{2} (n-1)^2 \ln(n-1) + \frac{1}{4} (n^2 - (n-1)^2)$

On calcule $(n-1)^2 \ln(n-1) = (n^2 - 2n + 1) \left(\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right)$.

Donc $(n-1)^2 \ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n^2 - 2n + 1) \left(\ln(n) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$.

Donc $\frac{1}{2} (n-1)^2 \ln(n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} n^2 \ln(n) - n \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} n + \frac{3}{4} + o(1)$

Donc $W_n - W_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} + o(1)$.

On pose alors pour $n \geq 2$: $Y_n = W_n - W_{n-1} - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2}$. Alors $Y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

On admet provisoirement que dans ce cas, $\sum_{k=2}^n Y_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.

On calcule $\sum_{k=2}^n Y_k = W_n - W_1 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \ln(k)$.

On fait de nouveau une comparaison avec une intégrale pour estimer $\sum_{k=2}^n \ln(k)$:

$\int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(t) dt$, où $\int_1^n \ln(t) dt = n \ln(n) - n + 1$.

Donc $\sum_{k=2}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + o(n)$. Donc comme $W_n = W_1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \ln(k) + \sum_{k=2}^n Y_k$, on déduit que

$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} n \ln(n) + o(n)$. Or $W_n = S_n - \frac{1}{2} n^2 \ln(n) + \frac{n^2}{4}$, donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{2} n \ln(n) + o(n)$.

Donc $\ln(U_n) = \frac{1}{n} (S_n) = \frac{1}{2} n \ln(n) - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \ln(n) + o(1)$.

Donc $U_n = \exp\left(\frac{1}{2} n \ln(n) - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \ln(n)\right) \cdot \exp(o(1))$ et

$\boxed{U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{1}{2} n \ln(n) - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \ln(n)\right) = \sqrt{n} \exp\left(\frac{1}{2} n \ln(n) - \frac{n}{4}\right)}$

Il reste à justifier que si $Y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$, alors $\sum_{k=2}^n Y_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Alors soit $N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |Y_n| \leq \varepsilon$.

Il vient $\left| \sum_{k=2}^n Y_k \right| \leq \left| \sum_{k=2}^N Y_k \right| + \sum_{k=N+1}^n |Y_k|$, donc $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^n Y_k \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^N Y_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \varepsilon$.

Donc $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^n Y_k \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^N Y_k \right| + \varepsilon$. On utilise la « double détente » : comme $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^N Y_k \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors il existe

$N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^N Y_k \right| \leq \varepsilon$. Donc pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, il vient $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=2}^n Y_k \right| \leq 2\varepsilon$.

On a donc $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n Y_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on a bien $\sum_{k=2}^n Y_k = o(n)$, ce qui achève la preuve.

Exercice 47 (Oral X 23, Ali, 5) : déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$

Pour $m \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on pourra poser $a_{m,n} = \sqrt{1+m\sqrt{1+(m+1)\sqrt{1+\dots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$ et considérer, pour n fixé, $W_m = a_{m,n} - (m+1)$.

Ind : exprimer W_{m+1} à l'aide de W_m , puis établir une relation entre W_2 et W_n faisant intervenir les $a_{m,n}$ et m avec $2 \leq m \leq n-1$. Faire le lien avec U_n et conclure à l'aide d'une minoration de $a_{m,n}$.

On note $U_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+(n-1)\sqrt{1+n}}}} = a_{2,n}$

On remarque tout d'abord que $a_{m,n}^2 = 1 + m a_{m+1,n}$, donc $a_{m+1,n} = \frac{a_{m,n}^2 - 1}{m}$

Donc $W_{m+1} = a_{m+1,n} - (m+2) = \frac{a_{m,n}^2 - 1 - m^2 - 2m}{m} = \frac{a_{m,n}^2 - (m+1)^2}{m} = W_m \left(\frac{a_{m,n} + (m+1)}{m} \right)$.

Donc en itérant le procédé, par récurrence, $W_n = W_2 \prod_{m=2}^{n-1} \left(\frac{a_{m,n} + (m+1)}{m} \right)$.

Or $W_2 = a_{2,n} - 3 = U_n - 3$ et $W_n = a_{n,n} - (n+1) = \sqrt{1+n} - n - 1$.

Donc $3 - U_n = ((n+1) - \sqrt{n+1}) \prod_{m=2}^{n-1} \left(\frac{m}{a_{m,n} + (m+1)} \right)$.

De plus, $a_{m,n} = \sqrt{1+m\sqrt{1+(m+1)\sqrt{1+\dots+(n-1)\sqrt{1+n}}}} \geq 1$, donc $\prod_{m=2}^{n-1} \left(\frac{m}{a_{m,n} + (m+1)} \right) \leq \prod_{m=2}^{n-1} \left(\frac{m}{m+2} \right) = \frac{6}{n(n+1)}$

Donc $|3 - U_n| \leq \frac{6(n+1)}{n(n+1)}$ et par encadrement, $\boxed{U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3}$

Exercice 48 (Oral X 23, Ali, 5) :

- 1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?
- 2) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?

Ind :

- 1) Considérer $A = \{p + \sqrt{2}q, p, q \in \mathbb{Z}\}$ et $f = 1_A$, la fonction indicatrice de A .
- 2) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, (\sqrt{2} - 1)^n \in A$. En déduire $\forall n, p \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(x + p(\sqrt{2} - 1)^n\right)$ et aboutir à une absurdité en supposant $x < y$ et $f(x) < f(y)$ et en mettant en défaut la définition de la continuité en y .

- 1) Si f existe, alors pour $x \in \mathbb{R}$ et $n, p \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(x+p) = f(x+p+n\sqrt{2})$

On considère alors $A = \{p + \sqrt{2}q, p, q \in \mathbb{Z}\}$. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f = 1_A$ ($f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ sinon).

Alors si $x \in A$, $x = p + \sqrt{2}q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ donc $f(x+1) = f(x) = 1$ car $x+1 = p+1 + \sqrt{2}q \in A$. De même, $f(x+\sqrt{2}) = f(x) = 1$.

De plus, si $x \notin A$, alors $x+1 \notin A$ (on aurait sinon $x+1 = p + \sqrt{2}q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, et $x = p-1 + \sqrt{2}q \in A$).

On a alors $f(x+1) = f(x) = 0$ et de même, $f(x+\sqrt{2}) = f(x) = 0$.

Enfin, f est non constante car $0 \in A$ (donc $f(0) = 1$) et $\frac{1}{2} \notin A$ (en effet, si par l'absurde il existe

$p, q \in \mathbb{Z}$ $\frac{1}{2} = p + \sqrt{2}q$, alors $q \neq 0$ et $\sqrt{2} = \frac{1-2p}{2q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde), donc $f(\frac{1}{2}) = 0$.

- 2) On procède par l'absurde et on suppose qu'une telle fonction f existe.

Alors $\forall p, q \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+p+q\sqrt{2})$.

On note $A = \{p + q\sqrt{2}, p, q \in \mathbb{Z}\}$. On remarque que si $x = p + q\sqrt{2} \in A$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, alors

$x^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2} \in A$. Donc en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, (\sqrt{2}-1)^n \in A$, avec $(\sqrt{2}-1)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme f n'est pas constante, on considère $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$ (le cas $f(x) > f(y)$ se traite de même). On a $\forall n, p \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(x + p(\sqrt{2}-1)^n\right)$.

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(y) - f(x)) > 0$. La continuité de f en y assure que si $|y-u| \leq \alpha$, alors

$|f(u) - f(y)| \leq \varepsilon$, donc que $f(u) \geq f(y) - \varepsilon > f(x)$

On a $(\sqrt{2}-1)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc on peut choisir et fixer n tel que $0 < (\sqrt{2}-1)^n < \alpha$

On prend $p \in \mathbb{N}$ tel que $x + p(\sqrt{2}-1)^n \leq y \leq x + (p+1)(\sqrt{2}-1)^n$ (c'est possible en choisissant

$p = \left\lfloor \frac{y-x}{(\sqrt{2}-1)^n} \right\rfloor$). On pose alors $u = x + p(\sqrt{2}-1)^n$ et on a bien $|y-u| \leq \alpha$, donc $f(u) > f(x)$.

Ceci est absurde car $f(x) = f(u) = f\left(x + p(\sqrt{2}-1)^n\right)$.

Donc il n'existe pas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique.

Exercice 49 (Oral X 23, Eloi, ESPCI 23, Maxime, 4) : soient $K : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues et

strictement positives. On suppose $\forall x \in [0,1], f(x) = \int_0^1 K(x,z)g(z)dz$ et $\forall x \in [0,1], g(x) = \int_0^1 K(x,z)f(z)dz$.

Démontrer que $f = g$.

On pourra considérer la fonction $h = g - Mf$, où M est le maximum de $\frac{f}{g}$ sur $[0,1]$.

Ind : montrer $\forall x \in [0,1], h(x) \leq 0$, puis étudier $f(x_0) - Mg(x_0)$.

On sait que $\frac{f}{g}$ est continue et strictement positive sur le segment $[0,1]$. Par théorème des bornes atteintes, elle

admet donc un maximum $M > 0$ sur ce segment. Il est en particulier atteint en $x_0 \in [0,1]$.

On a ainsi $\forall x \in [0,1], f(x) - Mg(x) \leq 0$ et $f(x_0) - Mg(x_0) = 0$

On considère la fonction $h = g - Mf$.

Par différence, il vient $\forall x \in [0,1], h(x) = g(x) - Mf(x) = \int_0^1 K(x,z)(f(z) - Mg(z))dz \leq 0$.

Dès lors, $0 = f(x_0) - Mg(x_0) = \int_0^1 K(x_0,z)(g(z) - Mf(z))dz = \int_0^1 K(x_0,z)(h(z))dz$.

Donc $\int_0^1 -K(x_0,z)(h(z))dz = 0$

Or $z \mapsto -K(x_0,z)(h(z))$ est continue, positive et l'intégrale est nulle, donc $\forall z \in [0,1], K(x_0,z)(h(z)) = 0$.

Comme K est strictement positive, il vient $\forall z \in [0,1], h(z) = 0$, donc $\forall x \in [0,1], g(x) = Mf(x)$.

En particulier, $g(x_0) = Mf(x_0) = M^2g(x_0)$. Comme $g(x_0) > 0$, on conclut $M^2 = 1$, donc comme $M > 0$, on a nécessairement $M = 1$. On déduit bien que $\boxed{f = g}$

Exercice 50 (Oral ESPCI Bastien L,5) : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $U_n = n(a(n!) - \lfloor an! \rfloor)$.

Montrer que (U_n) converge si et seulement si $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$.

Indications : commencer par le sens retour.

Pour le sens direct, écrire $U_n = n(a(n(n-1)!) - \lfloor an! \rfloor)$ en fonction de U_{n-1}

Ind : dans le sens retour, écrire $a = \frac{p}{q} + ec$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}$. Ecrire e comme somme d'une série et

séparer les termes d'indice inférieur ou égal à n des autres. Montrer $\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \rightarrow 0$.

Pour le sens direct, , écrire $U_n = n(a(n(n-1)!) - \lfloor an! \rfloor)$ en fonction de U_{n-1} , puis poser

$V_n = n \lfloor a(n-1)! \rfloor - \lfloor an! \rfloor$ et montrer que (V_n) est convergente, puis qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang N . Exprimer $p_n = \lfloor an! \rfloor$ en fonction de n et N et étudier la limite de (p_n) .

On remarque tout d'abord que si $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x+a \rfloor = \lfloor x \rfloor + a$.

En effet, par définition $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + a \leq x+a < \lfloor x \rfloor + 1+a$

Or $\lfloor x+a \rfloor$ est l'unique entier relatif b tel que $b \leq x+a < b+1$.

On a donc bien $\lfloor x+a \rfloor = \lfloor x \rfloor + a$.

On suppose alors $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$. Soient donc $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}$, $a = \frac{p}{q} + ec$.

On prend $n \geq q$. Alors $an! = p \frac{n!}{q} + ecn!$, avec $p \frac{n!}{q} \in \mathbb{Z}$. Donc $\lfloor an! \rfloor = p \frac{n!}{q} + \lfloor ecn! \rfloor$ et $U_n = n(ecn! - \lfloor ecn! \rfloor)$.

Or $e = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}$, donc $ecn! = \sum_{p=0}^n \frac{cn!}{p!} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!}$.

De nouveau, $\sum_{p=0}^n \frac{cn!}{p!} \in \mathbb{Z}$, donc $U_n = n \left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} - \left\lfloor \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} \right\rfloor \right)$.

On étudie donc $W_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} = \frac{c}{n+1} + \frac{c}{(n+1)(n+2)} + \frac{c}{n+1} \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!}$.

Or $0 \leq \frac{n!}{p!} = \frac{n!}{p(p-1)(p-2)!} \leq \frac{1}{p(p-1)}$, où $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p(p-1)}$ converge.

Donc $0 \leq \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \leq \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)}$ et comme $\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est le reste d'une série convergente), il

vient $\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc par somme, $W_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$ et pour n assez grand $\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} \right| = 0$

On a donc pour n assez grand $U_n = nW_n = \frac{cn}{n+1} + \frac{cn}{(n+1)(n+2)} + \frac{cn}{n+1} \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ et $\boxed{(U_n) \text{ converge}}$

Etudions la réciproque : on suppose que (U_n) converge vers $c \in \mathbb{R}$. $U_n = n(a(n(n-1)! - \lfloor an! \rfloor)$.

Alors pour $n \geq 1$, $U_{n-1} = (n-1)(a((n-1)!) - \lfloor a(n-1)! \rfloor)$ donc $a((n-1)!) = \frac{U_{n-1}}{n-1} + \lfloor a(n-1)! \rfloor$.

Donc $U_n = n\left(n \frac{U_{n-1}}{n-1} + n \lfloor a(n-1)! \rfloor - \lfloor an! \rfloor\right)$, et $\frac{U_n}{n} = \left(n \frac{U_{n-1}}{n-1} + n \lfloor a(n-1)! \rfloor - \lfloor an! \rfloor\right)$.

On pose $V_n = n \lfloor a(n-1)! \rfloor - \lfloor an! \rfloor \in \mathbb{Z}$. Alors $V_n = \frac{U_n}{n} - n \frac{U_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -c$

Par définition de la limite, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, -c - \frac{1}{4} \leq V_n \leq -c + \frac{1}{4}$. Or l'intervalle

$\left[-c - \frac{1}{4}, -c + \frac{1}{4}\right]$ contient au plus un entier relatif (il est de taille égale à $\frac{1}{2}$).

Donc $\forall n \geq N, V_n = V_N$.

On pose alors pour $n \geq N$: $p_n = \lfloor an! \rfloor$. Alors $np_{n-1} - p_n = V_N$, donc $np_{n-1} - V_N = p_n$

On itère le procédé : $p_n = np_{n-1} - V_N = n((n-1)p_{n-2} - V_N) - V_N = n(n-1)p_{n-2} - V_N(1+n)$.

Puis $p_n = n(n-1)(n-2)p_{n-3} - V_N(1+n+n(n-1))$.

Puis $p_n = n(n-1)\dots(n-(n-N)+1)p_{n-(n-N)} - V_N(1+n+n(n-1)+\dots+n(n-1)\dots(n-(n-N)+2))$

Donc par récurrence, $p_n = \frac{n!}{N!} p_N - V_N \sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{N!} p_N - V_N \sum_{k=N+1}^n \frac{n!}{k!}$.

Donc $\frac{p_n}{n!} = \frac{1}{N!} p_N - V_N \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \right)$.

Or $p_n = \lfloor an! \rfloor$, donc $p_n = \lfloor an! \rfloor \leq an! \leq p_n + 1$ et $a(n!) - 1 \leq p_n \leq an!$ et $a - \frac{1}{n!} \leq \frac{p_n}{n!} \leq a$.

Donc $\frac{p_n}{n!} = \frac{1}{N!} p_N - V_N \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N!} p_N - V_N \left(e - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \right)$ et $\frac{p_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Donc par unicité de la limite, $a = \frac{1}{N!} p_N - V_N \left(e - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \right) = -V_N e + \frac{1}{N!} p_N + V_N \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}$.

De plus, $V_n = n \lfloor a(n-1)! \rfloor - \lfloor an! \rfloor = np_{n-1} - p_n \in \mathbb{Z}$, avec $a(n!) - 1 < p_n \leq an!$ et $p_{n-1} \leq a(n-1)!$, donc $np_{n-1} \leq an!$, puis $p_n - np_{n-1} > a(n!) - 1 - a(n!)$, donc $V_n = np_{n-1} - p_n < 1$ et comme $V_n \in \mathbb{Z}$, $V_n \leq 0$.

En particulier, $-V_N \in \mathbb{N}$

On a donc bien $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$.

Exercice 51 (Oral ESPCI 23, Samuel,5) : soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \exists c \in]x, x+n[, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) = f^{(n)}(c)$$

Ind : procéder par récurrence et utiliser le théorème des accroissements finis pour l'initialisation.

Pour l'hérédité, considérer $T(f) : x \mapsto f(x+1)$ et calculer $(T - Id_E)^n(f)$. Remarquer ensuite que

$$(T - Id_E)^{n+1}(f) = (T - Id_E)^n(T(f)) - (T - Id_E)^n(f).$$

On procède par récurrence sur $n \geq 1$ pour montrer $H(n)$: « si h est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$$\forall x > 0, \exists c \in]x, x+n[, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h(x+k) = h^{(n)}(c) \text{ »}.$$

- Pour $n = 1$, on suppose que h est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en on prend $x > 0$.

On veut montrer $\exists c \in]x, x+1[, f(x+1) - f(x) = f'(c)$. On utilise le **théorème des accroissements finis** entre x et $x+1$: comme f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, alors

$$\exists c \in]x, x+1[, \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(c) \text{ et } H(1) \text{ est vraie.}$$

- Soit $n \geq 1$ tel que $H(n)$ est vraie.

On pose pour $x > 0$: $T(f)(x) = f(x+1)$. $T \in L(E)$ et $(T - Id_E)^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$ en utilisant le binôme de Newton car T et Id_E commutent.

$$\text{De même, } \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} f(x+k) = (T - Id_E)^{n+1}(f)(x) = (T - Id_E)^n(f)(x+1) - (T - Id_E)^n(f)(x).$$

$$\text{On note alors } g = (T - Id_E)^n(f) = x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

Il vient $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} f(x+k) = g(x+1) - g(x)$. Avec le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]x, x+1[, g(x+1) - g(x) = g'(c) \text{ avec } g'(c) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f'(c+k).$$

f' est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence en c : il existe

$$\exists d \in]c, c+n[\subset]x, x+n+1[, g'(c) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f'(c+k) = (f')^{(n)}(d)$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} f(x+k) = g'(c) = f^{(n+1)}(d) \text{ et } H(n+1) \text{ est vraie.}$$