Analyse

Séance 1 : Jeudi 15 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 1 (avec les DL, les primitives, la trigo)

Exercice 1 (oral CCINP 23, Samuel, CCINP24, Sybille, 2) : soit $f : [0,\pi[\to \mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(t)=\dfrac{1}{\sin(t)}-\dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$.

1) f est-elle dérivable en 0 ?
2) Si f n'était pas dérivable en 0, comment cela se verrait-il graphiquement ?
3) Déterminer une équation de la tangente à C_f en 0. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 2 (oral CCINP 24, Diego,3) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = -4+\sum_{k=1}^{n} x^k$

1) Démontrer que l'équation $P_n(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la notera x_n dans la suite.
2)
   a) Calculer x_1, x_2. Montrer que $x_5 < 1$.
   b) Etudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite (x_n) est monotone et convergente. On notera l sa limite.
3)
   a) Montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$.
   b) Montrer que $x_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
4) On pose $\delta_n = x_n - l$. Montrer que $\delta_n = \dfrac{x_n^{n+1}}{5}$. En déduire que $n\delta_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
5) Etablir que $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K\, l^{n+1}$. Préciser la valeur de K.

Exercice 3 (oral Centrale 1 23, Alice,3) : soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}$

On note $a_n = \min\left(\left\{p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} f(k) \geq n\right\}\right)$.

1) Montrer que a_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$.
2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{p} f(k)$.
3) Déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 (oral Centrale 24, Quentin,4) : soit une fonction f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, .., a_n \in [0,1]$ tels que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \int_0^{a_k} f(t)dt = \dfrac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt$.
2) Déterminer la nature de la suite de terme général $U_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
3) Que devient le résultat si on suppose seulement f à valeurs positives ?

Exercice 5 (oral Mines 24, Cédrine,4) : Etudier la convergence de la suite (U_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

Exercice 6 (Centrale 1 23, Thomas,4) ;
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $U_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + U_n^2$.

1) Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
2) Soit $V_n = \frac{\ln(U_n)}{2^n}$. Montrer que (V_n) converge vers un réel β.
3) Montrer que $|V_n - \beta| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
4) Déterminer un équivalent de U_n

Séance 2 : Mardi 20 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 3

Exercice 7 (oral CCINP 24, Tristan,2) : Soient $U_n = \int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t} dt$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

1) Montrer l'existence de I
2) Déterminer un équivalent de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 8 (Oral CCINP 24, Madeleine,2) : existence et calcul de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.

Exercice 9 (oral CCINP 24, Nassim,3) : on pose $J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{ch(t)}\right)^x dt$

1) Déterminer le domaine de définition de J.
2) Justifier la continuité de J.
3) Calculer $J(1)$ et $J(2)$
4) Etablir une relation entre $J(x)$ et $J(x+2)$.
5) Calculer $nJ(n)J(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
6) Déterminer un équivalent de $J(n)$ en $+\infty$.

Exercice 10 (oral IMT 24, Pauline,4) : Soit f une fonction de classe C^1, à valeurs réelles. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$. On pose $I(f) = \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) dt$.

1) Justifier la convergence de $I(f)$.
2) Démontrer que $I(f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sin^2(\pi t)} f^2(t) dt$.
3) Démontrer que $\pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt \le \int_0^1 (f'(t))^2 dt$

Exercice 11 (oral Centrale 24, Cédrine, Elise,4) : soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que f^2 est intégrable en 0.

On suppose aussi $f(x) \int_0^x f^2(t) dt \underset{x\to+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On suppose que f admet une limite finie en 0. Que vaut-elle ?

2) Donner toutes les fonctions qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x)\int_0^x f^2(t)\,dt = l$.

3) Démontrer que f admet une limite finie en 0.

Exercice 12 (oral Centrale 1 2023, Ali,4) : on considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}\,dt$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer l'existence et calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Séance 3 : Vendredi 23 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 4

Exercice 13 (oral CCINP 23, Maxime,3) : soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Etudier la convergence de la série $\sum 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$.

2) Calculer sa somme.

Exercice 14 (Oral CCINP 24, Grégoire, 3) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $U_n(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

1) Montrer la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

   On pose alors $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ si $s > 0$

2) a) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left|\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right| \leq \frac{1}{p^s}$.

   b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t^s}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{s}{(2n-1)^{s+1}} \leq g(2n) - g(2n-1) \leq -\frac{s}{(2n)^{s+1}}$.

   b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n)^{s+1}} \leq f(s) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s}{(2n-1)^{s+1}}$

4) On définit la fonction Zeta pour $s > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Montrer que $\zeta(s) \underset{s\to 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$.

5) Déterminer la limite en 0 de f.

Exercice 15 (Oral IMT 23, Thomas,2) : déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de classe C^∞ sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 n!$.

Exercice 16 (Oral Mines 24, Madeleine,4) : soit (U_n) une suite à valeurs strictement positives et (V_n) une suite telle que $V_0, V_1 \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = V_n + U_n V_{n-1}$.
Montrer que (V_n) converge si et seulement si la série $\sum U_n$ converge.

Exercice 17 (oral Mines 24, Antoine,3) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

1) Montrer que (U_n) converge. Déterminer sa limite.
2) Déterminer la nature de la série de terme général U_n
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$

Exercice 18 (oral Mines 24, Angel,4) :

1) Calculer $J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$
2) Etudier la convergence de $\sum (-1)^n J_n$ et calculer sa somme de plusieurs manières (une manière sera déjà pas mal…).

Séance 4 : Mercredi 28 Mai

Cours : revoir tous les chapitre 6 et 7

Exercice 19 (oral IMT 24, Tristan,3) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $f_n(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$.

1) Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20 (Oral IMT 23, Emma,2) : pour $t \in \mathbb{R}$, on note $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2 + t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f
2) Montrer que f est continue sur D.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4) f est-elle dérivable sur D ?

Exercice 21 (oral CCINP 24, Elise,2) : Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}$ et $g_n(x) = x f_n(x)$. On considère, sous réserve de convergence, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2)
   a) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3)
   a) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
   b) Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{A}{x}$
5) Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 22 (oral Mines 24, Nassim,3) :

1) Etudier le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n^n e^{-n}}{n!} x^n$, avec $x \in \mathbb{R}$.
2) Etudier la convergence de cette série sur le bord de l'intervalle de convergence.

Exercice 23 (oral Centrale 24, Angel,3) : Soit E_n un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Une partition de E_n est la donnée d'un ensemble de $k \in [\![1,n]\!]$ sous-ensembles $A_1,..,A_k$ de E , tous non vides, deux à deux disjoints et tels que $A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_k = E_n$. Par exemple, $\{\{1,2\},[\![3,n]\!]\}$ est une partition de $[\![1,n]\!]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose $a_0 = 1$.

1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq n!$.
2) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
3) Pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une expression de f .

Exercice 24 (oral Mines 24, Léo,4) : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}+...+e^{-nt}} dt$.

1) Etudier la convergence et la limite de la suite (U_n)
2) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} U_n$.

<u>Séance 5 : Mardi 10 Juin</u>

Cours : revoir le chapitre 10

Exercice 25 (oral CCINP 23, Mathilde,2) : soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

1) Déterminer le domaine de définition D de f et étudier sa continuité sur D .
2) Calculer $f(1/2)$ avec $t = u^2$ et en déduire $f(3/2)$.

Exercice 26 (oral CCINP 24, Marie,3) : On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$,avec $x \in]0,+\infty[$.

1) Démontrer que $\Gamma(1)$ est bien défini et le calculer.
2) Vérifier que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$
3) Démontrer que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = \Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(2)$.
4) Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5) Montrer que Γ' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 27 (oral Centrale 24, Léo) : on considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$

1) Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $f(0)$ en admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 28 (oral Mines 24, Elise,4) :

1) Montrer que $K=\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du$ converge. En déduire que $J=\int_0^{+\infty}e^{it^2}dt$ converge.
2) On note $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2(t^2+i)}}{t^2+i}dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
4) Retrouver la convergence de J à l'aide de F'.

Exercice 29 (oral Centrale 24, Sandra,4) : soit $f(x)=\int_0^1\frac{\ln\left(1+2t\cos(x)+t^2\right)}{t}dt$ pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Montrer que f est définie et est C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
2) Déterminer une expression simple de f. On donne $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 30 (Oral Mines 24, Simon,3) : soit $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, continue.

Montrer que $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$. On pourra poser $g:\begin{array}{l}[c,d]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\int_a^b\left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx\end{array}$

Séance 6 : lundi 16 Juin

Cours : revoir le chapitre 13

Exercice 31 (oral CCINP 24, Victor,3) : on souhaite créer un parallélépipède de volume égal à $1000\,cm^3$ en minimisant sa surface afin de limiter la quantité de métal utilisée.

1) Montrer que le problème se ramène à la détermination du minimum de $f:\begin{array}{l}V=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto xy+\frac{1000}{x}+\frac{1000}{y}\end{array}$.
2)
   a) Trouver l'unique point critique (x_0,y_0) de f sur V.
   b) Calculer $f(x_0,y_0)$. Est-ce un minimum ou un maximum local ?
3)
   a) Montrer que $\exists m\in\mathbb{R}$ et $(x_1,y_1)\in D=[1,400]\times[1,400]$ tels que $\begin{cases}f(x_1,y_1)=m\\ \forall(x,y)\in D, f(x,y)\geq m\end{cases}$.
   b) Soit $U=]1,400[\times]1,400[$. Montrer $\forall(x,y)\in V\setminus U, f(x,y)>300$. En déduire que m est un minimum global de f sur V.
4) Montrer que $\forall(x,y)\in V, f(x,y)\geq 2\sqrt{1000\,y}+\frac{1000}{y}$.
5) Retrouver que f possède un minimum global sur $k'(y)=\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{y}}-\frac{1000}{y^2}$ et sa valeur.

Exercice 32 (oral CCINP 23, Liam) : soit $f:\begin{array}{l}[-1,1]\times\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x^2-\sqrt{1-x^2}\cos y\end{array}$.

On admettra que f est continue et qu'elle est C^2 sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

2)

a) Trouver les points critiques sur $]-1,1[\times[0,\pi]$.

b) Montrer que $\forall(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}, f(x,y)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)\leq x^2+\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}$.

c) Montrer que f admet un maximum global en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$. On pourra poser $u=\sqrt{1-x^2}$.

3) Déterminer la matrice Hessienne en $(0,\pi)$. f admet-elle un maximum local en $(0,\pi)$?

4) f admet-elle un minimum global en $(0,0)$?

5) Soit $y_0\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. $f(1,y_0)$ est-il un extremum local ?

Exercice 33 (oral Centrale 24, Matthias,3) : Soit $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto xy^2+\frac{1}{2}(x+y)^2+xy+\frac{3}{4}\end{array}$.

1) Déterminer les points critiques de f .
2) Trouver les extremums locaux et globaux de f .

Exercice 34 (Oral Mines 24,3) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall k\in[\![0,n]\!], \int_0^1 x^k f(x)\,dx=0$.

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0,1]$.
Indication donnée : raisonner par l'absurde et construire une fonction g telle que fg soit positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$.

Exercice 35 (Oral Mines 23, Hugo B,4) : déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{\sin(2\pi e n!)}{\ln(n)}$

Exercice 36 (Oral Mines 23, Samuel,4) :

1) Soit $x>0$. Montrer qu'il existe un unique $t_x>0$ tel que $sh(x)=x+\frac{x^3}{6}sh(x\,t_x)$
2) Montrer que $sh(x\,t_x)>1$
3) Etudier les limites de t_x lorsque x tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Exercices en plus :

Exercice 37 (oral CCINP 23, Simon,3) :

Soient $a,b\in\mathbb{R}_+$ tels que $a+1<b$. Soit une suite (U_n) telle que $\forall n\in\mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n+a}{n+b}$.

1) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$.

2)

a) Prouver que $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)=-\infty$

b) En déduire que $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3) On pose $\alpha=b-a$ et $V_n=n^\alpha U_n$. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ puis montrer que $\sum\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ converge.

4) Montrer $\exists A>0, U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$. En déduire la nature de $\sum U_n$.

5) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \frac{b-1}{b-a-1}U_0$. On pourra commencer par calculer la N-ème somme partielle de $n\left(U_{n+1}-U_n\right)+bU_{n+1}-aU_n$.

Exercice 38 (Oral Mines 23,24, Chloé,5) : soient deux réels a,b tels que $a<b$. Soient deux fonctions $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $\frac{f}{g}$ admet un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.

2) Montrer que $\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)\leq \frac{(M+m)^2}{4mM}\left(\int_a^b fg\right)^2$

Exercice 39 (Oral Mines 23, Mailys,5) : Convergence et calcul de $\sum(-1)^n I_n$, avec $I_n=\int_0^\pi \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{1+\cos^2 t}dt$

Exercice 40 (oral ESPCI 24, Angel,5) : soit $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5\left(1-z+\frac{i}{n^3}\right)}$.

1) Montrer que f est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1.
2) Montrer que f est définie sur tout le disque unité fermé.
3) Montrer que f n'est pas continue sur le disque unité fermé.

Exercice 41 (oral X 24, Andréa,5) : soient deux suites (a_n), (b_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N}, b_n>0$ et (b_n) diverge.

On suppose que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge vers $s\in\mathbb{R}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $A_n=\sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^n b_k$ Montrer que $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$ converge vers s.

Exercice 42 (oral ENS 24, Andréa,4) : On considère une suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0=0 \\ {a_{n+1}}^3=8-a_n^2 \end{cases}$.

Que dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{n+1}-a_n\right|$?

Exercice 43 (oral ENS 24, Matthias,5) : Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels, telle que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\left(P_n(x)-e^x\right)=0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\deg(P_n)=+\infty$

Exercice 44 (oral ESPCI 24, Raphaël,5) : soient $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, deux fonctions continues telles que $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt=0$. Montrer que $\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^1 g^2(t)dt\right)\geq 4\left(\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right)\right)^2$

On pourra commencer par prouver le résultat pour des fonctions constantes par morceaux.

Exercice 45 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : soit f une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée.

1) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|e^{-tx^2}\right)=|f(0)|$.
2) On suppose en plus $f(0)=0$ et $f'(0)\neq 0$. Donner un équivalent de $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|e^{-tx^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 46 (Oral ENS 23, Ali,5) : soit $U_n=\left(\prod\limits_{k=1}^{n}k^k\right)^{1/n}$.

1) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $\ln(U_n)$.
2) Déterminer un équivalent de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 47 (Oral X 23, Ali,5) : déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$

Pour $m\in[\![2,n]\!]$, on pourra poser $a_{m,n}=\sqrt{1+m\sqrt{1+(m+1)\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$ et considérer, pour n fixé, $W_m=a_{m,n}-(m+1)$.

Exercice 48 (Oral X 23, Ali,5) :

1) Existe-t-il une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?
2) Existe-t-il une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?

Exercice 49 (Oral X 23, Eloi, ESPCI 23, Maxime,4) : soient $K:[0,1]^2\to\mathbb{R}$, $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, continues et strictement positives. On suppose $\forall x\in[0,1], f(x)=\int_0^1 K(x,z)g(z)\,dz$ et $\forall x\in[0,1], g(x)=\int_0^1 K(x,z)f(z)\,dz$.

Démontrer que $f=g$.

On pourra considérer la fonction $h=g-Mf$, où M est le maximum de $\dfrac{f}{g}$ sur $[0,1]$.

Exercice 50 (Oral ESPCI Bastien L,5) : Soit $a\in\mathbb{R}$. On note $U_n=n\left(a(n!)-\lfloor a\,n!\rfloor\right)$.

Montrer que (U_n) converge si et seulement si $a\in\mathbb{Q}+e\mathbb{N}$.

Indications : commencer par le sens retour.

Pour le sens direct, écrire $U_n=n\left(a(n(n-1)!)-\lfloor a\,n!\rfloor\right)$ en fonction de U_{n-1}

Exercice 51 (Oral ESPCI 23, Samuel,5) : soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x>0,\exists c\in\,]x,x+n[\,,\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k)=f^{(n)}(c)$

Indications :

Exercice 1 (oral CCINP 23, Samuel, CCINP24, Sybille, 2) :

1) Etudier le taux d'accroissement.
2) Revenir à la définition de dérivée et à son interprétation graphique.
3) Déterminer un équivalent de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente pour en obtenir le signe.

Exercice 2 (oral CCINP 24, Diego,3) :

1) Utiliser le théorème de la bijection.
2) a) Faire le calcul ; remarquer que $P_5(1)=1>0$.

   b) Montrer $P_{n+1}(x_n)>P_{n+1}(x_{n+1})$.
3) a) Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique et séparer le cas $x_n=1$.

   b) Utiliser $x_5<1$ et la monotonie de (x_n).
4) Déterminer la valeur de l et procéder par encadrement.
5) Ecrire $\dfrac{\delta_n}{l^{n+1}}$ sous forme exponentielle et déterminer sa limite en utilisant 4).

Exercice 3 (oral Centrale 1 23, Alice,3) :

1) Utiliser la nature de $\sum\limits_{k\geq 1}\dfrac{1}{k^\alpha}$ et majorer $\sum\limits_{k=1}^{p} f(k)$ pour $p<n$
2) Comparer avec une intégrale.
3) Trouver de deux manières différentes un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{a_n} f(k)$ en utilisant la question précédente et que $\sum\limits_{k=1}^{a_n} f(k)\geq n\geq \sum\limits_{k=1}^{a_n-1} f(k)$.

Exercice 4 (oral Centrale 24, Quentin,4) :

1) Appliquer le théorème de la bijection à $F: x\mapsto \int\limits_0^x f(t)dt$.
2) Utiliser de nouveau la fonction F et les sommes de Riemann.
3) Prendre pour f la fonction nulle et choisir $a_0,a_1,..,a_n\in[0,1]$ (qui dépendent de n) pour que (U_n) diverge.

Exercice 5 (oral Mines 24, Cédrine,4) :

considérer $V_n=\ln(U_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)-\dfrac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

Etudier la convergence du premier morceau avec les sommes de Riemann et calculer l'intégrale obtenue.
Majorer le second morceau avec Taylor-Lagrange et montrer qu'il tend vers 0.

Exercice 6 (Centrale 1 23, Thomas,4) ;

1) Montrer que (U_n) est monotone mais ne converge pas.
2) Calculer $V_{n+1}-V_n$ et utiliser le lien suite-série.
3) Considérer $\sum\limits_{k=n}^{N}\left(V_{k+1}-V_k\right)$ à n fixé et étudier la limite quand N tend vers l'infini.
4) Ecrire U_n en fonction de V_n et conclure.

Exercice 7 (oral CCINP 24, Tristan,2) :

1) Etudier $t^{3/2}f(t)$ en $+\infty$.
2) Utiliser une intégration par parties.

Exercice 8 (Oral CCINP 24, Madeleine,2) : existence et calcul de $I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(x)}{x^2}dx$.

Exercice 9 (oral CCINP 24, Nassim,3) ::

1) Poser pour $x,t\in\mathbb{R}$ $f(t,x)=\left(\frac{1}{ch(t)}\right)^x=\exp\left(-x\ln(cht)\right)$.
2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
3) Déterminer le dérivée de th.
4) Effectuer une intégration par parties.
5) Montrer que si $W_n=nJ(n)J(n+1)$, alors (W_n) est constante.
6) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$: $J(n+2)\le J(n+1)\le J(n)$. Utiliser ensuite ce qui précède.

Exercice 10 (oral IMT 24, Pauline,4) :

1) Utiliser Taylor-Young pour l'étude aux bornes.
2) Faire une intégration par parties.
3) Etudier le signe de $d=\int_0^1\left(f'(t)\right)^2dt-\pi^2\int_0^1 f^2(t)\,dt==\int_0^1\left(f'(t)\right)^2dt-\pi^2\int_0^1\frac{f^2(t)}{\sin^2\left(\pi t\right)}\left(1-\cos^2(\pi t)\right)dt$.

Exercice 11 (oral Centrale 24, Cédrine, Elise,4) :

1) Procéder par l'absurde et supposer $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}a>0$. Montrer alors que $\int_0^x f^2(t)\,dt\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$ en utilisant la définition de limite et en coupant l'intégrale en deux.
2) Procéder par analyse et synthèse. Considérer $g(x)=\int_0^x f^2(t)\,dt$ et déterminer g puis f.
3) Utiliser de nouveau g et montrer qu'elle admet une limite strictement positive en $+\infty$.

Exercice 12 (oral Centrale 1 2023, Ali,4) :

1) Utiliser le théorème de continuité puis le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Se placer sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ pour la dérivation.
2) Montrer que I existe et que $I=f(0)$ en intégrant par parties. Puis expliciter f'',f' et enfin f sur $\mathbb{R}_+^*$. Exploiter les limites en $+\infty$ pour trouver les constantes d'intégration.

Exercice 13 (oral CCINP 23, Maxime,3) :

1) Prendre un équivalent.
2) Linéariser $\sin^3\alpha$ puis calculer la somme partielle de la série à l'aide d'une somme télescopique.

Exercice 14 (Oral CCINP 24, Grégoire, 3) :

1) Utiliser le TSSA.
2) a) Avec la majoration du reste du TSSA.
   b) Montrer la convergence uniforme du reste sur tout segment $\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}_+^*$.
3) a) Exploiter $g(2n)-g(2n-1)=\int_{2n-1}^{2n}g'(t)dt$.
   b) Expliciter $\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ en séparant termes d'indice pair et d'indice impair.
4) Utiliser une comparaison avec une intégrale.
5) Utiliser le théorème d'encadrement et qu'on obtient les termes d'indice impair en prenant tous les termes et en retranchant les termes d'indice pair.

Exercice 15 (Oral IMT 23, Thomas,2) : Chercher une fonction développable en série entière.

Exercice 16 (Oral Mines 24, Madeleine,4) :
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n > 0$ et que $(V_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puis procéder par double implication. Dans le sens direct, exploiter le lien suite-série et un critère de majoration. Dans le sens retour, remarquer que pour $n \geq 2$, il vient $V_{n+1} \leq (1+U_n)V_n$ et itérer le procédé pour prouver que (V_n) est majorée.

Exercice 17 (oral Mines 24, Antoine,3) :
1) Utiliser le théorème de convergence dominée.
2) Utiliser un changement de variable et une minoration de U_n.
3) Utiliser un développement en série entière et le théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 18 (oral Mines 24, Angel,4) :
1) Calculer $J_n + J_{n+2}$ puis itérer le procédé en distinguant deux cas suivant la parité de n.
2) Utiliser le théorème sur les séries alternées pour la convergence. Pour le calcul de la somme, on peut revenir aux sommes partielles et effectuer le calcul en échangeant somme (finie) et intégrale.
   On peut aussi exprimer cette somme partielle en séparant les termes pairs et impairs, puis obtenir une double somme que l'on peut calculer difficilement en utilisant la première question et le développement asymptotique $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 19 (oral IMT 24, Tristan,3) :
1) Etudier la convergence simple de (f_n) vers f, puis étudier $f_n - f$ en $+\infty$ à n fixé.
2) Majorer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de la croissance de $\sin$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 20 (Oral IMT 23, Emma,2) :
1) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions.
2) Utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. On peut se placer sur des segments.
3) Utiliser le théorème de la double limite.
4) Montrer que $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}$ est dérivable sur D.

Exercice 21 (oral CCINP 24, Elise,2) :
1) Traiter à part le cas $x = 0$.
2) a) Prendre $x \leq y$ et comparer $f(x)$ et $f(y)$.
   b) Utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.
3) a) Utiliser le théorème de la double limite.
   b) Etudier la fonction g_n
4) Utiliser le théorème de la double limite pour $x \mapsto x f(x)$.
5) Faire une comparaison avec une intégrale.

Exercice 22 (oral Mines 24, Nassim,3) :
1) Déterminer un équivalent de $a_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$ ou utiliser d'Alembert.
2) Conclure avec un équivalent de a_n pour $\sum a_n$ et utiliser le TSSA pour $\sum (-1)^n a_n$.

Exercice 23 (oral Centrale 24, Angel,3) :
1) Pour trouver le nombre de partitions d'un ensemble $E_{n+1} = \{e_1, .., e_{n+1}\}$, choisir l'ensemble de la partition qui contient e_{n+1} et distinguer suivant son nombre d'éléments, puis effectuer une partition avec les éléments qui restent. Utiliser une récurrence forte pour la seconde moitié de la question.
2) Etudier la suite $\left(\frac{a_n}{n!} 1^n\right)$.

3) Calculer f' sur $\left]-R,R\right[$ et reconnaître un produit de Cauchy.

Exercice 24 (oral Mines 24, Léo,4) :

1) Utiliser le théorème de convergence dominée.
2) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque pour obtenir une expression de sous forme de somme, puis montrer $U_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 25 (oral CCINP 23, Mathilde,2) :

1) Déterminer d'abord D puis utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
2) Calculer $f(x)+f(x+1)$.

Exercice 26 (oral CCINP 24, Marie,3) :

1) C'est une intégrale de référence.
2) Utiliser un équivalent en 0.
3) Utiliser une intégration par parties.
4) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Penser à séparer les cas $t \le 1$ et $t \ge 1$.
5) Utiliser la question précédente et penser au théorème de Rolle.

Exercice 27 (oral Centrale 24, Léo) :

1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
2) Utiliser un changement de variable.
3) Utiliser une intégration par parties dans l'expression de f' pour retrouver celle de f.

Exercice 28 (oral Mines 24, Elise,4) :

1) Utiliser une intégration par parties pour l'étude en $+\infty$. Montrer que J converge à l'aide d'un changement de variable.
2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
3) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Conclure avec le théorème de la limite de la dérivée.
4) Utiliser le théorème fondamental et déterminer la limite de F en $+\infty$.

Exercice 29 (oral Centrale 24, Sandra,4) :

1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
2) Calculer f'. Se ramener à intégrer $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+\sin^2 x}$, puis utiliser $\operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$ si $x>0$. Ensuite, calculer $f(0)$ avec le théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 30 (Oral Mines 24, Simon,3) :

Considérer $h(x,t) = \int_c^t f(x,y)dy$ et utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour g.

Une fois g' obtenue, exprimer g à l'aide de g' et du théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 31 (oral CCINP 24, Victor,3) :

1) Utiliser l'expression du volume d'un parallélépipède.
2) Chercher quand le gradient s'annule et utiliser la matrice Hessienne.
3) a) Utiliser le théorème des bornes atteintes.
   b) Distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de x, y.
4) Etudier une fonction de la variable x en fixant y puis exploiter avec soin les questions précédentes.
5) Etudier la fonction obtenue à la question précédente et chercher sa valeur minimale.

Exercice 32 (oral CCINP 23, Liam) :

2a) Chercher les points d'annulation du gradient en résolvant un système.
2c) Reconnaître une identité remarquable.
3) Utiliser les valeurs propres de cette matrice hessienne.

4) Majorer $\left|(-\cos y)\sqrt{1-x^2}\right|$

5) Séparer les cas $y_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $y_0 \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Mettre $\sqrt{1-x^2}$ en facteur.

Exercice 33 (oral Centrale 24, Matthias,3) :

1) Résoudre le système. On trouve trois points critiques, avec des coordonnées parfois un peu compliquées.
2) Utiliser la matrice Hessienne pour déterminer la nature de chaque point critique.

Exercice 34 (Oral Mines 24,3) : considérer les valeurs d'annulation de f dans $]0,1[$ et construire une fonction polynomiale g qui change de signe en même temps que f, de manière à ce que gf reste de signe fixe sur $[0,1]$.

Exercice 35 (Oral Mines 23, Hugo B,4) : développer e en série entière et déterminer un équivalent de $U_n = \dfrac{\sin(2\pi e n!)}{\ln(n)}$. Montrer avec soin que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$

Exercice 36 (Oral Mines 23, Samuel,4) :

1) Chercher le nombre de solutions de l'équation $sh(xu) = y$, où y est fixé,
2) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
3) Déduire une minoration de t_x de la question précédente, et utiliser un développement limité en 0.

Exercice 37 (oral CCINP 23, Simon,3) :

1) Utiliser un développement limité.
2) a) Montrer que la série diverge, puis que la suite des sommes partielles est décroissante.
   b) Utiliser la question précédente et une somme télescopique.
3) Utiliser les développements limités et $\ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right) = \ln\left(n(1+\dfrac{a}{n})\right) - \ln\left(n(1+\dfrac{b}{n})\right)$.
4) Calculer les sommes partielles de la série précédente et simplifier.
5) Montrer que la somme suggérée est nulle d'une part, et la calculer d'une autre manière en séparant les différents termes.

Exercice 38 (Oral Mines 23,24, Chloé,5) :

1) Penser au théorème des bornes atteintes.
2) Considérer $(M\,g(x) - f(x))(f(x) - m\,g(x))$ pour $x \in [a,b]$, puis intégrer.

Exercice 39 (Oral Mines 23, Mailys,5) :
je n'ai trouvé qu'une manière difficile et astucieuse de faire cet exercice, mais peut-être existe-t-il une autre possibilité. Etudier $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k I_k$ en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \sin((2k+1)t)$.

Justifier que $I_n = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}\,dt$. Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue vu en début d'année et calculer

$K_N = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2N+1)u)}{\sin u}\,du$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 40 (oral ESPCI 24, Angel,5) :

1) Montrer d'abord que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^5 + in^2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\left(1+\frac{i}{n^3}\right)^k}$: on aimerait ensuite échanger les deux

sommes. On peut utiliser le théorème de Fubini sur les familles sommables (hors programme dans ce contexte non probabiliste), ou bien prouver que $\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}\frac{1}{\left(1+in^{-3}\right)^{k+1}}\right)=0$ à l'aide d'une majoration du module.

2) Séparer deux cas suivant que $z=1$ ou pas.
3) Poser $z_N=\sqrt{1-\frac{1}{N^6}}+i\frac{1}{N^3}$ et minorer la partie réelle de $f(z_N)$ en isolant le terme en $n=N$.

Exercice 41 (oral X 24, Andréa,5) : revenir à la définition de limite. Majorer $\left|\frac{A_n}{B_n}-s\right|=\left|\frac{A_n-sB_n}{B_n}\right|$ en coupant la somme en deux. Montrer que $B_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et conclure avec la double détente.

Exercice 42 (oral ENS 24, Andréa,4) : poser $f(x)=\left(8-x^2\right)^{1/3}$ et étudier cette fonction sur $[0,2]$. Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 43 (oral ENS 24, Matthias,5) : on peut procéder par l'absurde et montrer qu'il existe une suite (Q_n) extraite de (P_n) qui est de degré borné. Si on a $Q_n(x)=\sum_{k=0}^{d} a_{n,k}x^k$, prendre $(\lambda_i)_{0\le i\le d}$ deux à deux distincts et étudier les limites des $Q_n(\lambda_i)$ pour montrer avec Vandermonde que $\forall k\in[\![0,d]\!], a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\to} a_k$.

Exercice 44 (oral ESPCI 24, Raphaël,5) : prendre une subdivision régulière de $[0,1]$ et écrire le résultat attendu pour des fonctions constantes par morceaux. Traduire le résultat à l'aide de de produits scalaires et de normes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en utilisant $E=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$.

Décomposer les vecteurs à l'aide de $Vect(E)\oplus\left(Vect(E)\right)^{\perp}=\mathbb{R}^n$ et montrer le rasultat attendu avec Cauchy-Schwarz et des normes de vecteurs.
Généraliser le résultat aux fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des sommes de Riemann

Exercice 45 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) :

1) Montrer tout d'abord que $g_t:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |f(x)|e^{-tx^2}\end{array}$ possède bien un maximum M_t sur $\mathbb{R}$ en exploitant la définition de limite et le théorème des bornes atteintes. Utiliser ensuite la définition de la continuité de f en 0 et obtenir le résultat avec la définition de limite.
2) Etudions sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $h_t: x\to x e^{-tx^2}$ et déterminer son maximum N_t. Exprimer g_t à l'aide de f_t et procéder de manière analogue au 1), en encadrant $\frac{M_t}{N_t}$ pour t assez grand.

Exercice 46 (Oral ENS 23, Ali,5) :

1) Utiliser une comparaison avec une intégrale.
2) Si $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} a_n+b_n+o(b_n)$, alors poser $W_n=S_n-a_n+b_n$ et faire un développement de W_n-W_{n-1} à l'ordre $o(1)$. Puis montrer que si $Y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, alors $\sum_{k=2}^{n} Y_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et conclure.

Exercice 47 (Oral X 23, Ali,5) :
Exprimer W_{m+1} à l'aide de W_m, puis établir une relation entre W_2 et W_n faisant intervenir les $a_{m,n}$ et m avec $2\le m\le n-1$. Faire le lien avec U_n et conclure à l'aide d'une minoration de $a_{m,n}$.

Exercice 48 (Oral X 23, Ali,5) :

1) Existe-t-il une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?
2) Existe-t-il une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?

Exercice 49 (Oral X 23, Eloi, ESPCI 23, Maxime,4) :
Montrer $\forall x\in[0,1], h(x)\le 0$, puis étudier $f(x_0)-Mg(x_0)$.

Exercice 50 (Oral ESPCI Bastien L,5) :

Dans le sens retour, écrire $a=\dfrac{p}{q}+ec$, avec $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $c\in\mathbb{N}$. Ecrire e comme somme d'une série et séparer les termes d'indice inférieur ou égal à n des autres. Montrer $\sum_{p=n+2}^{+\infty}\dfrac{n!}{p!}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Exercice 51 (Oral ESPCI 23, Samuel,5) : procéder par récurrence et utiliser le théorème des accroissements finis pour l'initialisation.
Pour l'hérédité, considérer $T(f):x\mapsto f(x+1)$ et calculer $(T-Id_E)^n(f)$. Remarquer ensuite que $(T-Id_E)^{n+1}(f)=(T-Id_E)^n(T(f))-(T-Id_E)^n(f)$.