Probabilités

Probabilités 1 : jeudi 22 Mai

Cours = réviser le Chapitre 8.

Exercice 1 (oral IMT 24, Victor,2) : soient A, B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres respectifs $p_A, p_B \in]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1,0,1\}$ et $X = 0$ si $A = B$, $X = 1$ si $A > B$ et $X = -1$ si $A < B$.

1) Déterminer $P(X = 0)$.
2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(B > k) = (1 - p_B)^k$. Déterminer $P(X = -1)$.
3) Déterminer la loi et l'espérance de X .

Ind :

1) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$
2) Faire le calcul de $\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(B = i)$.
3) Utiliser $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

1) On calcule $P(X = 0) = P(A = B)$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Il vient $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((A = B) \cap (A = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((B = k) \cap (A = k))$. .

   Donc par indépendance, $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_A p_B (1 - p_A)^{k-1} (1 - p_B)^{k-1}$.

   Donc $\boxed{P(X = 0) = p_A p_B \frac{1}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)} = \frac{p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}}$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $P(B > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(B = i) = p_B \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1 - p_B)^{i-1}$.

   Donc $P(B > k) = p_B \sum_{i=k}^{+\infty} (1 - p_B)^i = p_B \frac{(1 - p_B)^k}{(1 - 1 + p_B)} = (1 - p_B)^k$. On a donc bien $\boxed{P(B > k) = (1 - p_B)^k}$

   On déduit que $P(X = -1) = P(A < B)$.

   On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

   Il vient $P(X = -1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((A < B) \cap (A = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((B > k) \cap (A = k))$.

   Donc par indépendance, $P(X = -1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_A (1 - p_A)^{k-1} (1 - p_B)^k$.

   Donc $\boxed{P(X = -1) = p_A (1 - p_B) \frac{1}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)} = \frac{p_A - p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}}$

3) Il reste à calculer $\boxed{P(X = 1) = 1 - P(X = -1) - P(X = 0) = \frac{p_B - p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}}$.

On a ainsi la loi de X. Puis $\boxed{E(X) = P(X=1) - P(X=-1) = \dfrac{p_B - p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}}$

Exercice 2 (Oral CCINP 24, Pauline,3) :

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{a^k}{a^k+1}$

1) Donner un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.
2) a) Montrer que la suite $(U_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   b) On suppose $a \in]0,1]$. Etudier la limite de $(U_n(a))$ quand n tend vers l'infini.
3) a) Etudier la convergence de la suite $(-\ln(U_n(a)))$ quand n tend vers l'infini.

   b) Trouver les valeurs de a telles que la limite de $(U_n(a))$ n'est pas nulle.
4) On prend une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On tire aléatoirement une boule. Si on pioche une boule blanche, on la remet et on double le nombre de boules blanches dans l'urne.
   Si on pioche la boule noire, on s'arrête.
   On note B_i : « on tire une boule blanche au i-ème tour »
   On pose C_n :« on n'a tiré que des boules blanches jusqu'au n-ème tour », et $\pi_n = P(C_n)$.
   Pour quelle valeur de a a-t-on $U_n(a) = \pi_n$?
5) Quelle est la probabilité que l'on ne pioche jamais la boule noire ?

Ind :

1) Immédiat.
2) a) Montrer que la suite est décroissante et minorée.
   b) Traiter le cas $a=1$ à part et utiliser une majoration.
3) a) Se ramener à la nature d'une série.
   b) Utiliser 2) et 3a) en séparant les cas.
4) Utiliser la formule des probabilités composées.
5) Déterminer $P\left(B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$.

1) On a directement $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{a^k}{a^k+1} > 0$ et la suite $(U_n(a))$ est minorée.

   De plus, $U_{n+1}(a) = \dfrac{a^n}{a^n+1} U_n(a) \leq U_n(a)$.

   Donc $\boxed{(U_n(a)) \text{ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers } l(a) \geq 0}$.

   b) On suppose $a \in]0,1[$. Alors $0 \leq U_n(a) \leq \prod_{k=0}^{n-1} a^k$, donc $0 \leq U_n(a) \leq a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

   Or $a^{\frac{n(n+1)}{2}} = \exp\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(a)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   Donc par encadrement, $U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

   Si $a=1$, $U_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc $U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   $\boxed{\text{Donc si } a \in]0,1],\ U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$.

3) a) $-\ln(U_n(a)) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\dfrac{a^k}{a^k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{a^k}\right)$.

Si $a \in \left]0,1\right]$, $\left(\ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)\right)$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)$ diverge grossièrement et la suite $\left(-\ln(U_n(a))\right)$ est divergente.

Si $a>1$, $\ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^k}$. Or $\sum_k \frac{1}{a^k}$ converge et c'est une série à termes positifs. Donc la série $\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)$ converge et la suite $\left(-\ln(U_n(a))\right)$ est convergente.

Donc $\boxed{\left(-\ln(U_n(a))\right) \text{ converge si et seulement si } a>1}$

b) On a vu au 2) que si $a \in \left]0,1\right]$, alors $(U_n(a))$ converge vers une limite nulle.

De plus, avec 3a), si $a>1$, $-\ln(U_n(a)) \underset{n\to+\infty}{\to} c \in \mathbb{R}$ et $U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-c}>0$.

Donc $\boxed{(U_n(a)) \text{ converge vers une limite non nulle si et seulement si } a>1}$.

4) Il vient directement $C_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$.

Avec la formule des probabilités composées, $P(C_n) = P(B_1)P(B_2/B_1)\ldots P(B_n/B_1\cap..\cap B_{n-1})$

Pour $k \in [\![2,n]\!]$, on calcule $P(B_k/B_1\cap..\cap B_{k-1})$.

Si on a pioché $k-1$ boules blanches dans l'urne, il y a $2.2....2=2^{k-1}$ boules blanches dans l'urne, et 1 boule noire, donc $2^{k-1}+1$ boules au total.

Donc $P(B_k/B_1\cap..\cap B_{k-1}) = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}+1}$. En outre, $P(B_1)=\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\pi_n = P(C_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^k+1} = U_n(2)}$

5) On note B l'événement : « on ne pioche jamais la boule noire ».

Alors $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$. Donc $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n)$

On a vu au 3a) que $-\ln(U_n(2)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Donc $\boxed{P(B) = \lim_{n\to+\infty} U_n(2) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) > 0}$

On a vu que cette série était convergente, mais je ne vois pas trop comment calculer sa somme.

Exercice 3 (oral Mines 24, Andréa,3) : On considère une roue découpée en six cadrans de portions égales numérotées de 1 à 6. On la fait tourner deux fois de manière indépendante et on note les résultats obtenus. Peut-on truquer la roue pour obtenir une loi uniforme quant à la somme des résultats des deux lancers ?

Ind : supposer qu'il est possible d'obtenir une telle loi uniforme, et déterminer $P(X=1)$ et $P(X=6)$ d'abord, puis $P(X=2)$ et $P(X=5)$.

On note X le résultat obtenu lors premier lancer de la roue, et Y celui obtenu lors du second.

On pose $Z=X+Y$ et on suppose que Z suit un loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

Alors $P(Z=2) = P\left((X=1)\cap(Y=1)\right) = \frac{1}{11}$.

Donc par indépendance, $P(X=1)^2 = \frac{1}{11}$ et $P(X=1) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

On calcule de même $P(Z=12)$ et on conclut $\boxed{P(X=1)=P(X=6)=\dfrac{1}{\sqrt{11}}}$

Puis si on note $a=P(X=2)$, il vient $P(Z=3)=P\big((X=1)\cap(Y=2)\big)+P\big((X=2)\cap(Y=1)\big)=\dfrac{2a}{\sqrt{11}}$.

On déduit que $\dfrac{1}{11}=\dfrac{2a}{\sqrt{11}}$, donc $a=\dfrac{1}{2\sqrt{11}}$ et $\boxed{P(X=2)=P(X=5)=\dfrac{1}{2\sqrt{11}}}$

(On obtient de même $P(X=5)$ à l'aide de $P(Z=11)$).

On calcule maintenant $b=P(X=3)=P(X=10)$ à l'aide de $P(Z=4)$ ou $P(Z=10)$

Il vient $P(Z=4)=P\big((X=1)\cap(Y=3)\big)+P\big((X=2)\cap(Y=2)\big)+P\big((X=3)\cap(Y=1)\big)$.

Donc $\dfrac{1}{11}=2\dfrac{b}{\sqrt{11}}+\dfrac{1}{4*11}$, donc $\dfrac{3}{4}=2b\sqrt{11}$ et $b=\dfrac{3}{8\sqrt{11}}$, donc $\boxed{P(X=3)=P(X=4)=\dfrac{3}{8\sqrt{11}}}$

On sait de plus qu'on doit avoir $\sum_{k=1}^{6}P(X=k)=1$, donc ici $\dfrac{2}{\sqrt{11}}+\dfrac{1}{\sqrt{11}}+\dfrac{3}{4\sqrt{11}}=1$. Ce n'est pas le cas.

Il est donc impossible de truquer la roue pour obtenir une loi uniforme pour la somme des deux lancers.

Exercice 4 (oral Centrale 24, Victor,3) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On réalise n lancers indépendants d'une pièce équilibrée.
On note N_n le nombre de séries obtenues après ces n lancers.

Ainsi, pour $n=6$, si on obtient $F-F-F-P-P-F$, il vient $N_6=3$.

1) Déterminer $N_n(\Omega)$ et calculer $P(N_n=1)$ et $P(N_n=n)$.
2) Soit $n\geq 2$ et $k\in[\![1,n]\!]$. Exprimer $P(N_n=k)$ en fonction des $P(N_{n-1}=i)$ pour $i\leq k$.
3) On note G_n la fonction génératrice de N_n. Expliciter $G_n(t)$ et en déduire le nombre moyen de séries obtenu après n lancers.

Ind :

1) Déterminer les événements $N_n=1$ et $N_n=n$.
2) Utiliser le système complet d'événements $(N_{n-1}=i)_{1\leq i\leq n-1}$.
3) Exprimer $G_n(t)$ en fonction de t et de $G_{n-1}(t)$.

1) On note F_k : « la $k-$ème lancer donne Face », et P_k : « la $k-$ème lancer donne Pile »,

Alors on obtient au minimum une seule série (avec $F_1\cap...\cap F_n$) et au maximum n si le résultat du lancer change à chaque fois. Donc $\boxed{N_n(\Omega)=[\![1,n]\!]}$.

De plus, $P(N_n=1)=P(F_1\cap...\cap F_n)+P(P_1\cap...\cap P_n)=\dfrac{2}{2^n}$ par indépendance et puisque la pièce est équilibrée.

Ainsi, $\boxed{P(N_n=1)=\dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

De même, $P(N_n=n)=P(F_1\cap P_2\cap F_3\cap...)+P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap...)=\dfrac{2}{2^n}$. Donc $\boxed{P(N_n=n)=\dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

2) Soit $n\geq 2$ et $k\in[\![1,n]\!]$. On considère le système complet d'événements $(N_{n-1}=i)_{1\leq i\leq n-1}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(N_n=k)=\sum_{i=1}^{n-1}P(N_n=k,N_{n-1}=i)$.

Si on a i séries après $(n-1)$ lancers, on peut en avoir i ou $i+1$ après n lancers (suivant que le n-ème lancer commence une nouvelle série ou pas).

Donc pour $i \notin \{k-1,k\}$, $P(N_n = k, N_{n-1} = i) = 0$.

Donc $P(N_n = k) = P(N_n = k / N_{n-1} = k)P(N_{n-1} = k) + P(N_n = k / N_{n-1} = k-1)P(N_{n-1} = k-1)$.

On déduit que $\boxed{P(N_n = k) = \frac{1}{2}\left(P(N_{n-1} = k) + P(N_{n-1} = k-1)\right)}$

La formule reste vraie pour $k = n$ avec $P(N_{n-1} = n) = 0$.

3) Par définition, pour cette variable aléatoire à valeur dans un ensemble fini, $G_n(t) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)t^k$.

Donc $G_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(P(N_{n-1} = k) + P(N_{n-1} = k-1)\right)t^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)t^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(N_{n-1} = k)t^{k+1}$.

Donc pour $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t) = \frac{1+t}{2}G_{n-1}(t)$ avec $P(N_{n-1} = 0) = 0$.

C'est une suite géométrique et $G_n(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} G_1(t)$. Or $G_1(t) = P(N_1 = 1)t^1 = t$.

On obtient donc $\boxed{G_n(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} t \text{ pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*}$.

On conclut avec $G_n'(1) = E(N_n)$.

Ici, $G_n'(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{2}t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}$, donc $G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$

$\boxed{\text{Donc le nombre moyen de séries obtenu après } n \text{ lancers vaut } E(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}}$.

Exercice 5 (oral IMT 24, Sybille,4) : on lance simultanément N dés à 6 faces. Après chaque lancer, on relance les dés qui n'ont pas donné un 6 et on note S_n le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.

1) Déterminer la loi de S_1 et de S_2.
2) Déterminer la loi et l'espérance de S_n.
3) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $a_n = P(S_n = N)$.

Ind :

1) Noter pour $1 \leq i \leq N$, D_i le temps d'attente du premier 6 pour le i-ème dé et utiliser les indicatrices de Bernoulli $1_{D_i \leq n}$ pour exprimer S_n.
2) Utiliser ce qui précède.
3) On peut raisonner directement en traduisant l'événement $S_n = N$ à l'aide des D_i. On peut aussi utiliser la définition de l'espérance pour montrer $E(S_n) \leq (N-1)\sum_{k=0}^{N-1} P(S_n = k) + NP(S_n = N)$

1) On a pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(\Omega) = [\![0, N]\!]$.

   De plus, on note, pour $1 \leq i \leq N$, D_i le temps d'attente du premier 6 pour le i-ème dé. Alors D_i suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

   Il vient alors $S_n = 1_{D_1 \leq n} + 1_{D_2 \leq n} + .. + 1_{D_N \leq n} = \sum_{i=1}^{N} 1_{D_i \leq n}$. On compte ainsi le nombre de dés ayant donné au moins un 6 avant le n-ème lancer.

   Pour $1 \leq i \leq N$, $1_{D_1 \leq n}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = P(D_i \leq n) = P(D_1 \leq n)$

   Comme les D_i sont indépendantes, les $1_{D_1 \leq n}$ le sont aussi, et elles ont même loi

Donc $\boxed{S_n \sim B(N, p_n),\text{ avec } p_n = P(D_i \leq n) = P(D_1 \leq n)}$

En particulier, $p_1 = P(D_1 = 1) = \dfrac{1}{6}$, donc $\boxed{S_1 \sim B(N, \frac{1}{6})}$

Puis $p_2 = P(D_1 \leq 2) = 1 - P(D_1 > 2) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{11}{36}$. Donc $\boxed{S_2 \sim B(N, \frac{11}{6})}$

2) Avec ce qui précède, on calcule $p_n = P(D_1 \leq n) = 1 - P(D_1 > n) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

Donc $S_n \sim B\left(N, 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)$ et $\boxed{E(S_n) = N\left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)}$

3) On sait par définition que $E(S_n) = \sum_{k=0}^{N} kP(S_n = k) \leq (N-1)\sum_{k=0}^{N-1} P(S_n = k) + NP(S_n = N)$.

Il vient donc $E(S_n) \leq (N-1)(1 - P(S_n = N)) + NP(S_n = N)$.

Donc $E(S_n) \leq (N-1) + P(S_n = N)$ et $E(S_n) - (N-1) \leq P(S_n = N) \leq 1$.

Or avec 2), $E(S_n) \underset{n\to+\infty}{\to} N$, donc $\boxed{a_n = P(S_n = N) \underset{n\to+\infty}{\to} 1}$

Cela signifie qu'au bout d'un moment, tous les dés auront donné un 6.

Exercice 6 (oral Mines 24, Angel,4) :

1) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Caractériser les événements A indépendants de tout événement B.
2) Sur $(\Omega, P(\Omega))$, au plus dénombrable, existe-il une probabilité telle que tous les événements de $P(\Omega)$ soient (mutuellement) indépendants ? Si oui, caractériser toutes ces probabilités.

Ind :

1) Procéder par analyse et synthèse. Traduire que A est indépendant de A.
2) Utiliser 1) et les événements $\{c\}$ pour $c \in \Omega$.

1) On procède par analyse et synthèse. Soit un événement $A \in T$ indépendant de tout événement B. Alors pour tout $B \in T$, il vient $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

En particulier, pour $A \in T$, $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, donc $P(A)(1 - P(A)) = 0$. Donc $P(A) \in \{0,1\}$.

Réciproquement (synthèse), on suppose $P(A) \in \{0,1\}$.

Si $P(A) = 0$, alors pour $B \in T$, $P(A)P(B) = 0$. De plus, $A \cap B \subset A$, donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$. Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0$ et A est indépendant de tout événement B.

Si $P(A) = 1$, alors pour $B \in T$, $P(A)P(B) = P(B)$. On veut donc montrer que $P(A \cap B) = P(B)$.

On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, avec ici $A \subset A \cup B$, donc $P(A \cup B) \geq P(A) = 1$ donc $P(A \cup B) = P(A) = 1$ et on a bien $P(A \cap B) = P(B)P(A)$ et A est indépendant de tout événement B

Finalement, $\boxed{A \text{ est indépendant de tout événement } B \text{ si et seulement si } P(A) \in \{0,1\}}$

2) On se place sur $(\Omega, P(\Omega))$. On suppose qu'il existe une probabilité P telle que tous les événements de $P(\Omega)$ soient (mutuellement) indépendants. Alors comme Ω est au plus dénombrable,

$\sum_{c\in\Omega} P(\{c\}) = P\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}\right) = P(\Omega) = 1$ et $\forall c \in \Omega, P(\{c\}) \in \{0,1\}$ grâce à 1). Donc il existe $a \in \Omega$, $P(\{a\}) = 1$ (et $\forall c \in \Omega \setminus \{a\}, P(\{c\}) = 0$. On a donc nécessairement $P(A) = 1$ si $a \in A$ et $P(A) = 0$ sinon.

Réciproquement, on considère $a \in \Omega$ et on définit l'application P sur $P(\Omega)$ par $P(A)=1$ si $a \in A$ et $P(A)=0$ sinon.

Vérifions que P est une probabilité.

- $a \in \Omega$, donc $P(\Omega)=1$
- Si on prend une famille $(A_i)_{i\in I}$, finie ou dénombrable d'événements incompatibles (c'est-à-dire deux à deux disjoints), alors on pose $A=\bigcup_{i\in I} A_i$. Si $\forall i \in I, a \notin A_i$, alors $a \notin A$ et $P(A)=\sum_{i\in I} P(A_i)=0$.

  Sinon, $\exists! i \in I, a \in A_i$, alors $a \in A$ et $P(A)=\sum_{i\in I} P(A_i)=1$.

  Dans tous les cas, on a bien $P(\bigcup_{i\in I} A_i)=\sum_{i\in I} P(A_i)$

  $\boxed{\text{Donc avec 1) } P \text{ est une probabilité sur } \Omega \text{ telle que tous les événements de } P(\Omega) \text{ sont indépendants}}$

Donc les probabilités sur $P(\Omega)$ telles que tous les événements de $P(\Omega)$ soient (mutuellement) indépendants sont $\boxed{\text{les } P_a \text{ définies par } P_a(A)=1 \text{ si } a \in A \text{ et } P_a(A)=0 \text{ sinon, avec } a \in \Omega}$.

On peut aussi caractériser P_a par $P_a(\{a\})=1$ et $\forall c \in \Omega \setminus \{a\}, P_a(\{c\})=0$.

<u>Probabilités 2 : jeudi 5 Juin</u>

Cours = réviser le Chapitre 12.

Exercice 7 (oral IMT24, Marie,2) : Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X+Y=n$.

Ind : Ecrire la probabilité conditionnelle cherchée. Déterminer la loi de $X+Y$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on calcule $P(X=k / X+Y=n)=\dfrac{P\big((X=k)\cap(X+Y=n)\big)}{P(X+Y=n)}=\dfrac{P\big((X=k)\cap(Y=n-k)\big)}{P(X+Y=n)}$.

Par indépendance, $P(X=k / X+Y=n)=\dfrac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$.

On cherche la loi de $X+Y$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X+Y=n)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n}\big((X=k)\cap(Y=n-k)\big)\right)$.

C'est une union disjointe, donc $P(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n} P\big((X=k)\cap(Y=n-k)\big)=\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)$ puisque X et Y sont indépendantes.

Il vient donc $P(X+Y=n)=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}=\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}$.

Donc $P(X+Y=n)=\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n$. On retrouve que $(X+Y)$ suit une loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$.

On déduit que $P(X=k / X+Y=n)=\dfrac{\lambda^k\mu^{n-k}n!}{k!(n-k)!(\lambda+\mu)^n}=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\binom{n}{k}$.

$\boxed{\text{On conclut que la loi conditionnelle de } X \text{ sachant } X+Y=n \text{ est une loi binomiale } B(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu})}$.

Exercice 8 (oral IMT 24, Pauline,2) : soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour $k\in\mathbb{N}^*$, $P(Z_k=1)=P(Z_k=-1)=\frac{1}{2}$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
2) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}, E(\cos(tS_n))=\cos^n t$.

Ind :

1) Poser $X_k=\frac{1+Z_k}{2}$ et exprimer S_n en fonction des X_k .
2) Procéder par récurrence.

1) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $X_k=\frac{1+Z_k}{2}$ Alors $P(Z_k=1)=P(X_k=1)=\frac{1}{2}$ et $P(Z_k=-1)=P(X_k=0)=\frac{1}{2}$.

Donc $X_k\sim B\left(\frac{1}{2}\right)$. De plus, $S_n=\sum_{k=1}^{n} Z_k=2\sum_{k=1}^{n} X_k-n$.

Si on pose $T_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, alors $T_n\sim B(n,\frac{1}{2})$ (T_n est la somme de variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc suit une loi binomiale). On a $S_n=2T_n-n$

Donc $\boxed{E(S_n)=2\frac{n}{2}-n=0}$ et $\boxed{V(S_n)=4n\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=n}$

2) On prouve par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété $H(n):$"$\forall t\in\mathbb{R}, E(\cos(tS_n))=\cos^n t$".

Pour $n=1$, on fixe $t\in\mathbb{R}$. Alors par théorème de transfert :

$E(\cos(tS_1))=E(\cos(tZ_1))=\frac{1}{2}(\cos t+\cos(-t))=\cos t$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ est vraie. On fixe $t\in\mathbb{R}$.

Alors $E(\cos(tS_{n+1}))=E(\cos(tS_n+tZ_{n+1}))=E(\cos(tS_n)\cos(tZ_{n+1}))-E(\sin(tS_n)\sin(tZ_{n+1}))$.

D'après le lemme des coalitions, S_n et Z_{n+1} sont indépendantes, donc $\cos(tS_n)$ et $\cos(tZ_{n+1})$ le sont aussi, ainsi que $\sin(tS_n)$ et $\sin(tZ_{n+1})$.

Donc $E(\cos(tS_{n+1}))=E(\cos(tS_n))E(\cos(tZ_{n+1}))-E(\sin(tS_n))E(\sin(tZ_{n+1}))$

Or par théorème de transfert, $E(\sin(tZ_{n+1}))=\frac{1}{2}(\sin(t)+\sin(-t))=0$

De plus, avec $H(n)$, $E(\cos(tS_n))=\cos^n t$, et $E(\cos(tZ_{n+1}))=E(\cos(tZ_1))=\cos t$.

On a donc bien $E(\cos(tS_{n+1}))=\cos^{n+1}t$ et $H(n+1)$ est vraie. $\boxed{\text{On a donc bien } \forall t\in\mathbb{R}, E(\cos(tS_n))=\cos^n t}$

Exercice 9 (Oral CCINP24, Sandra,2) : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω,T,P), à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X vérifie la condition (C) si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X\geq n)>0$.

On suppose dans cet exercice que X vérifie la condition (C).

On appelle taux de défaillance la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n=P(X=n/X\geq n)$.

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n=\frac{P(X=n)}{P(X\geq n)}$, puis que $\forall n\in\mathbb{N}^*, 1-x_n=\frac{P(X\geq n+1)}{P(X\geq n)}$

2) Déterminer deux réels a,b tels que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

3) On prend Y une variable aléatoire sur (Ω,T,P) telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$. Déterminer le taux de défaillance y_n de Y. $\sum y_n$ est-elle convergente ?

4) Montrer que $\forall n\geq 2, \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)=P(X\geq n)$, puis déterminer $P(X=n)$ en fonction des x_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

5) Montrer que le taux de défaillance x_n de X est constant égal à $p\in[0,1[$ si et seulement si X suit une loi géométrique de paramètre p.

6) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n\in[0,1[$ et que $\sum\ln(1-x_n)$ diverge. En déduire la nature de $\sum x_n$.

Ind :

1) Constater que $(X=n)\cap(X\geq n)=(X\geq n)$.
2) Décomposer en éléments simples.
3) Utiliser ce qui précède.
4) Reconnaître un produit télescopique.
5) Procéder par double implication. Dans le sens retour, utiliser $x_n=\dfrac{P(X=n)}{P(X\geq n)}$.
6) Exploiter $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-x_k)=\ln(P(X\geq n))$.

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $x_n=P(X=n/X\geq n)=\dfrac{P((X=n)\cap(X\geq n))}{P(X\geq n)}$. Or $(X=n)\subset(X\geq n)$, do $(X=n)\cap(X\geq n)=(X\geq n)$. On a bien $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n=\dfrac{P(X=n)}{P(X\geq n)}}$

De plus, $1-x_n=1-\dfrac{P(X=n)}{P(X\geq n)}=\dfrac{P(X\geq n)-P(X=n)}{P(X\geq n)}$ .Or $(X\geq n)=(X=n)\cup(X\geq n+1)$.

Comme l'union est disjointe, $P(X\geq n)=P(X=n)+P(X\geq n+1)$. Donc $\boxed{1-x_n=\dfrac{P(X\geq n+1)}{P(X\geq n)}}$

2) On constate que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{(n+1)}$. Donc par somme télescopique :

$$P(Y\geq n)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(N+1)}\right)=\frac{1}{n}.$$

Le taux de défaillance est donc égal à $\boxed{y_n=\dfrac{P(Y=n)}{P(Y\geq n)}=\dfrac{1}{n+1}}$

Dès lors, $y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}>0$, et comme $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, $\boxed{\sum y_n \text{ est divergente.}}$

4) Soit $n\geq 2$. $\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)=\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{P(X\geq k+1)}{P(X\geq k)}$ avec 1).

C'est un produit télescopique : il vient $\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)=\frac{P(X\geq n)}{P(X\geq 1)}$. Or X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $P(X\geq 1)=1$.

On a donc bien $\boxed{\forall n\geq 2, \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)=P(X\geq n)}$

On calcule alors $P(X=n)=P(X\geq n)-P(X\geq n+1)$.

On obtient $P(X=n)=\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)-\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)=(1-(1-x_n))\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)$.

On conclut que $\boxed{P(X=n)=x_n\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)}$

5) On procède par double implication. On suppose que le taux de défaillance x_n de X est égal à $p\in[0,1[$.
Alors avec la question précédente, pour $n\in\mathbb{N}^*$, il vient $P(X=n)=x_n\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)$.
Donc $P(X=n)=p\prod_{k=1}^{n-1}(1-p)=p(1-p)^{n-1}$.
Donc X suit une loi géométrique de paramètre p.
Réciproquement, on suppose que X suit une loi géométrique de paramètre p. Alors pour $n\in\mathbb{N}^*$,
$x_n=\frac{P(X=n)}{P(X\geq n)}=\frac{P(X=n)}{P(X>n-1)}=\frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^{n-1}}=p$.
$\boxed{\text{On a donc bien montré l'équivalence}}$.

6) On a vu au 1) que si $n\in\mathbb{N}^*$, $1-x_n=\frac{P(X\geq n+1)}{P(X\geq n)}$. Comme X vérifie (C), on déduit que $1-x_n>0$.
De plus, $x_n=\frac{P(X=n)}{P(X\geq n)}\geq 0$. On a donc bien $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n\in[0,1[}$
Avec 4), on déduit que pour $n\geq 2$, il vient $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-x_k)=\ln(P(X\geq n))$.
Or $P(X\geq n)=\sum_{k=n}^{+\infty}P(X=k)$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}P(X=n)$ converge (sa somme vaut 1), le reste tend vers 0 et $P(X\geq n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Donc $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-x_k)=\ln(P(X\geq n))\underset{n\to+\infty}{\to}-\infty$. Donc $\boxed{\sum\ln(1-x_n)\text{ diverge}}$.
Enfin, $\ln(1-x_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-x_n<0$. Donc par théorème sur les équivalents pour les séries à termes de signe constant, $\boxed{\sum x_n\text{ diverge}}$.

Exercice 10 (oral Mines 24, Matthias,3) : Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires uniformes, indépendantes, à valeur dans $\{-1,1\}$. On note $X_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$.
Etudier le comportement asymptotique des suites $(E(\sin(X_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(E(\cos(X_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$

Ind : utiliser que $e^{iX_n}=\cos(X_n)+i\sin(X_n)$.

On remarque que pour $n\in\mathbb{N}^*$, il vient $e^{iX_n}=\cos(X_n)+i\sin(X_n)$.
Par linéarité de l'espérance, il vient alors $E(e^{iX_n})=E(\cos(X_n))+i\,E(\sin(X_n))$.

Donc $E(\cos(X_n)) = \mathrm{Re}\left(E\left(e^{iX_n}\right)\right)$ et $E(\sin(X_n)) = \mathrm{Im}\left(E\left(e^{iX_n}\right)\right)$.

On calcule ainsi $E\left(e^{iX_n}\right) = E\left(\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)\right) = E\left(\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Comme les $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes, les $\left(\exp\left(\frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right)_{1\leq k\leq n}$ le sont aussi.

Donc $E\left(e^{iX_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(\exp\left(\frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\right) + \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$, avec le théorème de transfert.

En particulier, $\boxed{E(\sin(X_n)) = 0}$

$$E(\cos(X_n)) = \mathrm{Re}\left(E\left(e^{iX_n}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

Or $n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, donc $n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2}$

Dès lors, $\boxed{E(\cos(X_n)) = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{e}}}$

Exercice 11 (oral Centrale 1 24, Raphaël,3) :

Deux joueurs jouent à Pile ou Face. Chacun des joueurs dispose de sa propre pièce. Chaque pièce a une probabilité $p \in]0,1[$ de retomber sur Pile.

On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une première fois Pile pour le premier joueur, et Y celui pour obtenir Face pour le second joueur. On pose $Z = \frac{X}{Y}$.

1) Déterminer les lois de X, Y et calculer $P(X = Y)$.
2) Trouver la loi et l'espérance de Z.
3) Montrer qu'il existe p tel que la moyenne du nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile soit deux fois inférieure à celle pour obtenir Face.
4) *En plus à la fin :* Donner la loi de $\min(X,Y)$. Que reconnait-on ?

Ind :

1) Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(X = Y)$.
2) Calculer $P\left(Z = \frac{a}{b}\right)$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $PGCD(a,b) = 1$. Utiliser de nouveau la formule des probabilités totales. Pour l'espérance, utiliser l'indépendance et le théorème de transfert.
3) Exprimer le résultat attendu à l'aide d'espérances.
4) Calculer $P(U \geq k)$ si $U = \min(X,Y)$.

1) X est le temps d'attente d'un premier Pile : $\boxed{X \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

De même, $\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } q = 1-p}$

On calcule $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = n)$ (car $(X = Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(X = Y = k)$, avec une union disjointe).

On obtient donc par indépendance : $P(X=Y)=pq\sum_{n=1}^{+\infty}(1-q)^{n-1}(1-p)^{n-1}=\dfrac{pq}{1-(1-q)(1-p)}$.

Donc $\boxed{P(X=Y)=\dfrac{p(1-p)}{1-p(1-p)}=\dfrac{p-p^2}{1-p+p^2}}$

2) Tout d'abord, comme $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $Z(\Omega)=\left\{r=\dfrac{a}{b},a,b\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Pour $r\in Z(\Omega)$, on l'écrit sous forme de fraction irréductible : $r=\dfrac{a}{b}$, avec $a,b\in\mathbb{N}^*$ et $PGCD(a,b)=1$.

Dès lors, $P\left(Z=\dfrac{a}{b}\right)=P\left(\dfrac{X}{Y}=\dfrac{a}{b}\right)=P\left(X=\dfrac{a}{b}Y\right)$.

Avec la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(Y=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, il vient :

$$P\left(Z=\frac{a}{b}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}P\left(\left(X=\frac{a}{b}k\right)\cap(Y=k)\right)=q\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k-1}P\left(X=\frac{a}{b}k\right).$$

Or si k n'est pas un multiple de b, $\dfrac{a}{b}k\notin\mathbb{N}^*$ (en effet, si $\dfrac{a}{b}k=n\in\mathbb{N}^*$, alors $ak=bn$ et si on écrit la décomposition de b en produit de facteurs premiers, alors tous ces facteurs doivent apparaître dans k puisqu'ils ne sont pas dans a, et donc k est un multiple de b). Dans ce cas, $P\left(X=\dfrac{a}{b}k\right)=0$.

Il ne reste donc dans la somme que les termes pour lesquels $k=bs$, avec $s\in\mathbb{N}^*$.

Donc $P\left(Z=\dfrac{a}{b}\right)=q\sum_{s=1}^{+\infty}p^{bs-1}P(X=as)=qp\sum_{s=1}^{+\infty}p^{bs-1}q^{as-1}$.

Donc $\boxed{P\left(Z=\dfrac{a}{b}\right)=\sum_{s=1}^{+\infty}\left(p^bq^a\right)^s=\dfrac{p^bq^a}{1-p^bq^a}=\dfrac{p^b(1-p)^a}{1-p^b(1-p)^a}\text{, si } a,b\in\mathbb{N}^* \text{ et } PGCD(a,b)=1}$.

On calcule ensuite $E(Z)=E\left(X.\dfrac{1}{Y}\right)$. Comme X et Y sont indépendantes, X et $\dfrac{1}{Y}$ le sont aussi. On utilise le théorème de transfert : la famille $\left(\dfrac{1}{k}P(Y=k)\right)_{k\geq1}$ est sommable car $\forall k\in\mathbb{N}^*, 0\leq\dfrac{1}{k}P(Y=k)\leq P(Y=k)$.

Donc $\dfrac{1}{Y}$ est d'espérance finie et :

$$E\left(\frac{1}{Y}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}P(Y=k)=q\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-q)^{k-1}=\frac{q}{1-q}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}p^k=\frac{-q}{p}\ln(1-p)=\frac{-q\ln(q)}{p}.$$

Donc Z est d'espérance finie et $\boxed{E(Z)=E(X).E\left(\dfrac{1}{Y}\right)=-\dfrac{q\ln(q)}{p^2}=-\dfrac{(1-p)\ln(1-p)}{p^2}}$

3) On cherche ici p tel que $2E(X)=E(Y)$, ce qui équivaut à $\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{1-p}$. On résout : $2(1-p)=p\Leftrightarrow p=\dfrac{2}{3}$.

Si $\boxed{\text{on prend } p=\dfrac{2}{3}}$, alors la moyenne du nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile est deux fois inférieure à celle pour obtenir Face.

4) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On note $U=\min(X,Y)$. Alors $P(U\geq k)=P((X\geq k)\cap(Y\geq k))=P(X\geq k)P(Y\geq k)$ par indépendance. Donc $P(U\geq k)=q^{k-1}p^{k-1}=(qp)^{k-1}$ et $P(U=k)=P(U\geq k)-P(U\geq k+1)=(qp)^{k-1}(1-qp)$.

Donc $\boxed{U=\min(X,Y)\sim G(1-pq)}$

Exercice 12 (oral Centrale 24, Antoine,5) Soit $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.

On pose $X=\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $Y=\sum_{k=1}^{N}(1-X_k)$. On note aussi $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)$ pour $t,u\in[-1,1]$.

1) Exprimer $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)$ en fonction de la fonction génératrice de N.
2) Montrer que si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

Ind :

1) Appliquer le théorème de transfert à $Z=(N,X)$ en prenant $f(n,k)=t^k u^{n-k}$. Reconnaître une loi binomiale quand on conditionne.
2) Montrer que $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=E\left(t^X\right)E\left(u^Y\right)$. Ecrire cette égalité à l'aide de doubles sommes et utiliser deux fois l'unicité du développement en série entière.

1) Soient $t,u\in[-1,1]$. On remarque que $X+Y=N$, donc $t^X u^Y = t^X u^{N-X}$.

On constate que X et N sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose pour $n,k\in\mathbb{N}$: $f(n,k)=t^k u^{n-k}$

On applique le théorème de transfert à $Z=(N,X)$.

$(f(n,k)P((N,X)=(n,k)))=\left(t^k u^{n-k}P\left(N=n,X=k\right)\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$ est bien sommable car

$\left|t^k u^{n-k}P\left(N=n,X=k\right)\right|\leq P\left(N=n,X=k\right)$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=n,X=k)=1$.

Donc par théorème de transfert, $E\left(f(N,X)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P\left(N=n,X=k\right)t^k u^{n-k}$ (1).

On calcule $P\left(N=n,X=k\right)=P\left(N=n\right)P\left(X=k/N=n\right)$

Or $P\left(X=k/N=n\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=k/N=n\right)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ si $k\in[\![0,n]\!]$ (en effet, les X_i sont indépendantes et la loi conditionnelle de X sachant $N=n$ est ainsi une loi binomiale), et $P\left(X=k/N=n\right)=0$ si $k>n$.

Donc $G(t,u)=E\left(f(N,X)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(N=n\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k u^{n-k}\right)$.

Donc $\boxed{G(t,u)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(N=n\right)\left(pt+(1-p)u\right)^n=G_N\left(\left(pt+(1-p)u\right)\right)}$

2) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Alors soient $t,u\in[-1,1]$. $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=G_N\left(\left(pt+(1-p)u\right)\right)=\exp\left(\lambda\left(pt+(1-p)u-1\right)\right)$

Si on prend $u=1$: $E\left(t^X\right)=\exp\left(\lambda\left(pt-p\right)\right)$. Pour $t=1$: $E\left(u^Y\right)=\exp\left(\lambda\left(p-1+(1-p)u\right)\right)$.

Donc on constate que $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=E\left(t^X\right)E\left(u^Y\right)$

Or, de nouveau avec le théorème de transfert, $E\left(t^X u^Y\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P\left(X=k,Y=n\right)t^k u^n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P\left(X=k,Y=n\right)t^k u^n=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}P\left(X=k\right)t^k\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(Y=n\right)u^n\right)$$

Il vient donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)u^n\right)t^k=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k)P(Y=n)u^n\right)\right)t^k\right)$ (les familles sont sommables donc on peut sommer dans l'ordre qu'on veut).
Par unicité du développement en série entière, il vient
$\forall k\in\mathbb{N},\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)u^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k)P(Y=n)u^n\right)$.
Puis de nouveau par unicité du développement en série entière,
$\forall k,n\in\mathbb{N},P(X=k,Y=n)=P(X=k)P(Y=n)$. $\boxed{\text{Donc } (X,Y) \text{ sont indépendantes}}$.

Exercices en plus :

Exercice 13 (Oral IMT 24, Diégo,2) : soit $p\in\mathbb{N}^*$. Soit $U_0,U_1,...,U_p$ des urnes. Pour $0\le k\le p$, on suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $(p-k)$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on prend des boules dans cette urne avec remise.

1) Quelle est la probabilité q_n pour que la $(n+1)-$ème boule soit blanche sachant qu'on a déjà tiré n boules blanches dans l'urne ?
2) Déterminer la limite de q_n lorsque n tend vers l'infini.

Ind :

1) Utiliser la formule des probabilités totales. Ne pas chercher à simplifier le résultat obtenu.
2) Prendre un équivalent du numérateur et du dénominateur.

1) On note pour $n\in\mathbb{N}^*$: B_n : "la n-ème boule tirée est blanche".

On veut donc ici calculer $P(B_{n+1}/B_1\cap...\cap B_n)=\dfrac{P(B_1\cap...\cap B_n\cap B_{n+1})}{P(B_1\cap...\cap B_n)}$

On note pour $k\in[\![0,p]\!]$: U_k : "les boules sont prises dans l'urne k".

$(U_0,...,U_p)$ forme un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1\cap...\cap B_n)=\sum_{k=0}^{p}P(B_1\cap...\cap B_n/U_k)P(U_k)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{k}{p}\right)^n=\frac{1}{(p+1)p^n}\sum_{k=0}^{p}k^n$$

De même, $P(B_1\cap...\cap B_{n+1})=\sum_{k=0}^{p}P(B_1\cap...\cap B_{n+1}/U_k)P(U_k)=\dfrac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\left(\dfrac{k}{p}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{(p+1)p^{n+1}}\sum_{k=0}^{p}k^{n+1}$

On obtient donc $\boxed{q_n=P(B_{n+1}/B_1\cap...\cap B_n)=\dfrac{1}{p}\dfrac{\sum_{k=1}^{p}k^{n+1}}{\sum_{k=1}^{p}k^n}}$

2) $\sum_{k=1}^{p}k^n=1+2^n+...+p^n=p^n\left(\left(\frac{1}{p}\right)^n+\left(\frac{2}{p}\right)^n+...+\left(\frac{p-1}{p}\right)^n+1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}p^n$.

De même, $\sum_{k=1}^{p}k^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}p^{n+1}$, donc $q_n\underset{n\to+\infty}{\sim}1$ et ainsi $\boxed{q_n\underset{n\to+\infty}{\to}1}$

Exercice 14 (Oral IMT 24, Gabrielle,2) : On considère un train qui fait des allers-retours entre les stations 0,1,2,3. Le train part ainsi de 0, puis repart dans l'autre sens quand il atteint la station 3 et ainsi de suite.
Un passager s'endort à la station 0. On note T le temps passé dans le train (si $T=0$, le passager est à la station 0, si $T=1$, il est à la station 1 et ainsi de suite).

On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire qui donne la position du passager. Déterminer le loi de X.

Ind : Exprimer l'événement $(X=0)$ à l'aide de T puis calculer sa probabilité. Procéder de même avec $(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$

On a $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$. Il vient $(X=0)=(\exists k \in \mathbb{N}^*, T=6k)$.

Donc par union disjointe, $P(X=0)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(T=6k)=p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{6k-1}=p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{6k+5}$.

Donc $\boxed{P(X=0)=p(1-p)^5\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-p)^6\right)^k=\dfrac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6}}$

Puis $P(X=3)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(T=6k+3)=p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{6k+2}$, Donc $\boxed{P(X=3)=p(1-p)^2\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-p)^6\right)^k=\dfrac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^6}}$

En outre, $(X=1)=(\exists k \in \mathbb{N}, T=6k+1)\cup(\exists k \in \mathbb{N}, T=6k+5)$.

Par union disjointe, $P(X=1)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(T=6k+1)+\sum_{k=0}^{+\infty} P(T=6k+5)=p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{6k}+p(1-p)^4\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{6k}$.

Donc $\boxed{P(X=1)=\dfrac{p\left(1+(1-p)^4\right)}{1-(1-p)^6}}$. De même, $\boxed{P(X=2)=\dfrac{p\left(1-p+(1-p)^3\right)}{1-(1-p)^6}}$

On peut vérifier que la somme de ces probabilités est bien égale à 1.

Exercice 15 (oral IMT 24, Charline,2) : une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.
Un joueur tire 5 boules dans l'urne, avec remise.
Le joueur gagne deux points par boule blanche tirée et perd trois points dès qu'il pioche une boule noire.
X compte le nombre de boules blanches obtenues.
Y compte le nombre de points obtenus.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2) Mêmes questions pour Y.
3) Répondre aux mêmes questions lorsque le joueur tire 5 boules dans l'urne, sans remise.

Ind :
1) Reconnaître une loi binomiale.
2) Exprimer Y à l'aide de X.
3) Calculer les différentes probabilités à l'aide de la formule des probabilités composées pour déterminer le loi de X

1) On a tout d'abord $X(\Omega)=[\![0,5]\!]$. On reconnait une expérience de Bernoulli, répétée 5 fois de manière indépendante, avec une probabilité de succès (prendre une boule blanche) égale à $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ à chaque fois.

   Donc X suit une loi binomiale : $\boxed{X \sim B\left(5,\frac{1}{5}\right)}$. Dès lors, $\boxed{E(X)=5.\frac{1}{5}=1 \text{ et } V(X)=5\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}}$

2) On remarque que $\boxed{Y=2X-3(5-X)=5(X-3)}$

   Donc $\boxed{Y(\Omega)=\{-15,-10,-5,0,5,10\}=\{5(k-3), k\in[\![0,5]\!]\}}$.

En outre, pour $k \in [\![0,5]\!]$, $P\left(Y = 5(k-3)\right) = P(X = k) = \binom{5}{k}\frac{1}{5^k}\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$

Enfin, par linéarité de l'espérance, $\boxed{E(Y) = 5\left(E(X) - 3\right) = -10}$ et $\boxed{V(Y) = 5^2 V(X) = 20}$

3) Le tirage se faisant sans remise, le joueur pioche au maximum deux boules blanches.
Il vient donc $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.

On note pour $k \in [\![0,5]\!]$ B_k : « la k-ème boule prise est une boule blanche »

On pose aussi N_k : « la k-ème boule prise est une boule noire »

Avec la formule des probabilités composées :

$P(X = 0) = P(N_1 \cap .. \cap N_5) = P(N_1)P(N_2 / N_1)...P(N_5 / N_1 \cap .. \cap N_4)$

Donc $\boxed{P(X = 0) = \frac{8}{10}.\frac{7}{9}.\frac{6}{8}.\frac{5}{7}.\frac{4}{6} = \frac{2}{9}}$

De même, $P(X = 1) = P(B_1 \cap N_2 \cap .. \cap N_5) + ... + P(N_1 \cap .. \cap N_4 \cap B_5)$

$\boxed{P(X=1) = 5.\frac{2}{10}.\frac{8}{9}.\frac{7}{8}.\frac{6}{7}.\frac{5}{6} = \frac{5}{9}}$ et $\boxed{P(X=2) = 1 - \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}}$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{5}{9} + 2.\frac{2}{9} = 1}$ et $\boxed{V(X) = E\left((X - EX)^2\right) = E\left((X-1)^2\right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}}$

Puis de même, $\boxed{Y(\Omega) = \{-15, -10, -5\} = \{5(k-3), k \in [\![0,2]\!]\}}$

$\boxed{E(Y) = 5\left(E(X) - 3\right) = -10}$ et $\boxed{V(Y) = 5^2\frac{4}{9} = \frac{100}{9}}$

Exercice 16 (Oral Mines 23, Ali,3) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $P([\![1,n]\!])$ (ensemble des sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$) de l'équiprobabilité. Calculer $P\left(\left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing\right\}\right)$.

Ind : Poser $F_k = \left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing, card(A) = k\right\}$ et calculer $card(F_k)$.

On note $F = \left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing\right\}$

On sait que $card\left(P([\![1,n]\!])\right) = 2^n$, donc $card\left(P([\![1,n]\!])^2\right) = 2^{2n} = 4^n$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, il vient $P(F) = \dfrac{card(F)}{4^n}$.

On pose pour $k \in [\![0,n]\!]$ $F_k = \left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing, card(A) = k\right\}$

On a alors directement $F = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$, et les F_k sont deux à deux incompatibles.

Donc $card(F) = \sum_{k=0}^{n} card(F_k)$.

On fixe $k \in [\![0,n]\!]$. Pour construire les éléments de F_k, on prend une partie A de $[\![1,n]\!]$ avec k éléments (il y a $\binom{n}{k}$ manières de la choisir), puis une partie B de $\overline{A}$ (complémentaire de A dans $[\![1,n]\!]$). Il y a 2^{n-k} choix possibles de la partie B pour une partie A donnée.

Donc $card(F) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ et $\boxed{P\left(\left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing\right\}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

Exercice 17 (Oral Mines 23, Maxime,4) : Une urne contient p boules. On effectue des tirages successifs avec remise. On note X_n le nombre de boules distinctes ayant été tirées après n tirages.

1) Montrer que $P(X_n = p) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$
2) Déterminer l'espérance de X_n.

Ind :

1) Utiliser $E_{n,k}$: « la $k-ème$ boule a été prise au moins une fois lors des n premiers tirages » et écrire l'événement $X_n = p$ à l'aide des $E_{n,k}$, puis utiliser l'événement contraire.
2) Utiliser les $1_{E_{n,k}}$ et la linéarité de l'espérance.

1) On note $E_{n,k}$: « la $k-ème$ boule a été prise au moins une fois lors des n premiers tirages ».

   Alors $P(X_n = p) = P\left(\bigcap_{k=1}^{p} E_{n,k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{p} \overline{E_{n,k}}\right)$.

   Or $P\left(\bigcup_{k=1}^{p} \overline{E_{n,k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{p} P\left(\overline{E_{n,k}}\right)$, avec $P\left(\overline{E_{n,k}}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$ (en effet, à chaque tirage, on ne doit pas prendre la boule numéro k).

   Donc $P(X_n = p) \geq 1 - p\left(\frac{p-1}{p}\right)^n$ et par encadrement, $\boxed{P(X_n = p) \underset{n \to +\infty}{\to} 1}$

2) X_n est le nombre de boules ayant été tirées après n tirages. Donc si on note $1_{E_{n,k}}$ la fonction indicatrice de $E_{n,k}$, il vient $X_n = \sum_{k=1}^{p} 1_{E_{n,k}}$.

   Donc par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \sum_{k=1}^{p} E\left(1_{E_{n,k}}\right) = \sum_{k=1}^{p} P\left(E_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right)$.

   On conclut que $\boxed{E(X_n) = p\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right)}$

Exercice 18 (oral ENS 24, Angel,4) :

On dit que Y majore stochastiquement X si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, P(Y > t) \geq P(X > t)$. On note $X \leq Y$.

1) Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $Y \geq X$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée, on a $E(f(X)) \leq E(f(Y))$. Pour le sens retour, on pourra montrer que $P(X \geq t) = E(1_{X \geq t})$.

2) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $X \leq Y$, alors $P(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$. On pourra considérer $\widetilde{X}$, de même loi que X et indépendante de X, et montrer que $P(X \leq Y) \geq P(X \leq \widetilde{X})$.

Ind :

1) Dans le sens direct, utiliser le théorème de transfert. Ecrire $P(X = n)$ avec les $P(X > n-1) - P(X > n)$. Revenir aux sommes partielles pour pouvoir séparer la somme en deux et utiliser l'hypothèse de majoration stochastique.
2) Utiliser la formule des probabilités totales pour exploiter l'hypothèse. La première question ne m'a pas servi.

1) On procède par double implication. $\boxed{\text{On suppose } Y \geq X}$. Comme f est à valeurs positives, et bornée, la famille $\big(P(X = n) f(n)\big)$ est sommable (avec $0 \leq |P(X = n) f(n)| \leq \|f\|_\infty P(X = n)$). Dès lors, par théorème de transfert, $E\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(P(X > n-1) - P(X > n)\big) f(n)$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{N} \big(P(X > n-1) - P(X > n)\big) f(n) = f(0) + \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n) f(n+1) - \sum_{n=0}^{N} P(X > n) f(n)$.

Donc $\sum_{n=0}^{N} \big(P(X > n-1) - P(X > n)\big) f(n) = f(0) - P(X > N) f(N+1) + \sum_{n=0}^{N} P(X > n)\big(f(n+1) - f(n)\big)$.

Or $P(X > N) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} P(X = k) \underset{N \to +\infty}{\to} 0$ (c'est le reste d'une série convergente).

Donc la série $\sum P(X > n)\big(f(n+1) - f(n)\big)$ converge et

$E\big(f(X)\big) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)\big(f(n+1) - f(n)\big) \leq f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)\big(f(n+1) - f(n)\big)$ (en effet, f est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) - f(n) \geq 0$).

On conclut bien que $\boxed{E\big(f(X)\big) \leq E\big(f(Y)\big)}$

On prouve l'autre implication : on suppose que pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée, on a $E\big(f(X)\big) \leq E\big(f(Y)\big)$.

On pose pour $t \in \mathbb{R}$ fixé : $f(u) = 1_{u > t}$. Elle est bien bornée, à valeurs positives et croissante.

Il vient alors $E\big(f(X)\big) = E\big(1_{X > t}\big) = 1.P(X > t) + 0 = P(X > t)$, et de même $E\big(f(Y)\big) = P(Y > t)$

Donc on obtient bien $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, P(Y > t) \geq P(X > t)}$

2) Comme suggéré, soit $\widetilde{X}$, de même loi que X et indépendante de X. On suppose $X \leq Y$. Alors on considère le système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X < Y) \cap (X = n)\big)$

Donc par indépendance, $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((n \leq Y) \cap (X = n)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n)$.

Comme $X \leq Y$, pour $x \in X(\Omega)$, $P(Y > x) \geq P(X > x) = P(\widetilde{X} > x)$ puisque X et $\widetilde{X}$ ont même loi.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$: $P(Y \geq n) = P(Y > n-1) \geq P(\widetilde{X} > n-1) = P(\widetilde{X} \geq n)$

Il vient $P(X \leq Y) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(\widetilde{X} \geq n)$, donc $P(X \leq Y) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X = n) \cap (\widetilde{X} \geq n)\big)$.

On a donc bien, toujours avec la formule des probabilités totales, $\boxed{P(X \leq Y) \geq P(X \leq \widetilde{X})}$.

Or $P\left(X \leq \widetilde{X}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(n \leq \widetilde{X}\right) P(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leq X) P\left(\widetilde{X}=n\right)=P\left(X \geq \widetilde{X}\right)$ puisque X et $\widetilde{X}$ ont même loi. Donc $P\left(X \leq \widetilde{X}\right)=P\left(X \geq \widetilde{X}\right) \geq P\left(X>\widetilde{X}\right)$. Donc $P\left(X \leq \widetilde{X}\right) \geq 1-P\left(X \leq \widetilde{X}\right)$.

Donc $P\left(X \leq \widetilde{X}\right) \geq \frac{1}{2}$ et finalement on obtient bien $\boxed{P(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}}$

Exercice 19 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que X_k suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose aussi que les (X_k) sont indépendantes. En cas de convergence, on pose $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$ pour $z \in [0,1[$. Montrer que $\forall \varepsilon>0, \lim_{z \to 1^-} P(|(1-z) f(z)-1|>\varepsilon)=0$.

Ind : je n'ai trouvé qu'une solution très difficile avec la définition de limite en posant $\alpha>0$.

Noter $U=(1-z) f(z)-1=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(X_k-1) z^k\right)$ et $U_N=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{N}(X_k-1) z^k\right)$.

Montrer d'abord $P(|(1-z) f(z)-1|>\varepsilon) \leq P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Majorer $P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$ avec Bienaymé-Tchebychev.

Pour $M \geq 2$ et $r>1$, considérer $A(M, r)=\left\{\omega \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, X_k \leq M r^k\right\}$ et montrer qu'il existe $M \geq 2$ tel que $P(A(M, r)) \geq 1-\frac{\alpha}{2}$. Montrer que si $rz<1$, que $\omega \in E(A, r)$ et N est assez grand, alors $\left|\left(U-U_N\right)(\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\varepsilon>0$. Soit $\alpha>0$. Soit $z \in [0,1[$.

Alors en cas de convergence $(1-z) f(z)-1=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k-\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\right)=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(X_k-1) z^k\right)=U$

On pose alors pour $N \in \mathbb{N}$: $U_N=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{N}(X_k-1) z^k\right)$ et on a donc $U-U_N=(1-z)\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty}(X_k-1) z^k\right)$.

On remarque que $(|U|>\varepsilon) \subset\left(\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

En effet, $|U|=|U-U_N+U_N| \leq|U-U_N|+|U_N|$, donc si $|U|>\varepsilon$, nécessairement $|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}$ ou $|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}$.

Dès lors, $\boxed{P(|(1-z) f(z)-1|>\varepsilon)=P(|U|>\varepsilon) \leq P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (1)}$.

Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, comme $E(U_N)=0$ et $V(U_N)=(1-z)^2\left(\sum_{k=0}^{N} 1 z^{2k}\right) \leq \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$, il vient

$\boxed{P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{(1-z)}{1+z} \leq \frac{4}{\varepsilon^2}(1-z)}$. Pour z assez proche de 1, on aura $\frac{4}{\varepsilon^2}(1-z) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Il reste à étudier $P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Pour $M \geq 2$ et $r>1$, on note $A(M, r)=\left\{\omega \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, X_k \leq M r^k\right\}$.

Alors $P(A(M, r))=P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty}(X_k \leq M r^k)\right)=\lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \leq M r^k)\right)$.

Or par indépendance, $P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \leq M\,r^k)\right) = \prod_{k=0}^{n} P(X_k \leq M\,r^k)$

Pour $k \in \mathbb{N}$, par inégalité de Markov (X_k est bien à valeurs positives), il vient $P(X_k > M\,r^k) \leq \frac{1}{M\,r^k}$.

Donc $P(X_k \leq M\,r^k) \geq \left(1 - \frac{1}{M\,r^k}\right)$ et $\ln\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \leq M\,r^k)\right)\right) \geq \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{M\,r^k}\right)$.

Or pour $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\ln(1-u) \geq -2u$ (on étudie $g(u) = \ln(1-u) + 2u$ et il vient $g'(u) = -\frac{1}{1-u} + 2 = \frac{1-2u}{1-u} \geq 0$,

avec $g(0) = 0$). Donc $\ln\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \leq M\,r^k)\right)\right) \geq -\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{r^k} \geq -\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^k$

Donc $P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \leq M\,r^k)\right) \geq \exp\left(-\frac{2}{M}\frac{r}{r-1}\right)$, donc en passant à la limite, $1 \geq P\big(A(M,r)\big) \geq \exp\left(-\frac{2}{M}\frac{r}{r-1}\right)$.

Par encadrement, $P\big(E(A,r)\big) \underset{M\to+\infty}{\to} 1$, donc il existe $M \geq 2$ tel que $P\big(A(M,r)\big) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$. Soit un tel M (qui dépend de r).

Or si $z \in [0,1[$ est fixé et si $\omega \in E(A,r)$, alors $0 \leq \left|X_k(\omega) - 1\right| z^k \leq M(rz)^k + z^k$.

Donc on fixe r tel que $1 < r < \frac{1}{z}$, on aura $0 < rz < 1$ et par majoration, $\sum_{k\geq 0}(X_k(\omega)-1)z^k$ est absolument convergente, donc convergente. De plus, $\left|(U - U_N)(\omega)\right| = (1-z)\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty}(X_k(\omega)-1)z^k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty}\left|X_k(\omega)-1\right| z^k$.

Donc $\left|(U - U_N)(\omega)\right| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(M(rz)^k + z^k\right) \leq \frac{M(rz)^{N+1} + z^{N+1}}{1-z}$.

$z \in [0,1[$ étant donné, on choisit dans cet ordre $r > 1$ tel que $0 < rz < 1$. Ensuite, on prend $M \geq 2$ tel que $P\big(A(M,r)\big) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$. Enfin, on choisit N (qui dépend de z) tel que $\frac{M(rz)^{N+1} + z^{N+1}}{1-z} < \frac{\varepsilon}{2}$ (cette dernière quantité tendant vers 0 lorsque N tend vers l'infini).

On a prouvé que si $\omega \in A(M,r)$, alors $\left|(U - U_N)(\omega)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\left(\left|U - U_N\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \overline{A(M,r)}$

Donc $P\left(\left|U - U_N\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq P\left(\overline{A(M,r)}\right) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Donc avec (1) pour z assez proche de 1, $0 \leq P\big(\left|(1-z)f(z) - 1\right| > \varepsilon\big) \leq P\left(\left|U - U_N\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|U_N\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \alpha$.

Donc par définition de limite, $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \lim_{z\to 1^-} P\big(\left|(1-z)f(z) - 1\right| > \varepsilon\big) = 0}$

Exercice 20 (Oral ENS 23, Maxime,5) : soient $n \geq 3$ points $M_1, ..., M_n$ dans le plan. Pour chaque couple de points, on lance une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Si on obtient Pile, on trace une arête entre les deux points et si on obtient Face, on ne fait rien. On note T_n la nombre de triangles ainsi formés.
Pour $i \neq j$, on pose $X_{i,j} = 1$ si les points M_i et M_j sont reliés, et $X_{i,j} = 0$ sinon.

On pose $a_n = \binom{n}{3} p^3$.

1) Déterminer l'espérance de T_n.
2) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ind :

1) Poser pour $1 \leq i < j < k \leq n$ $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$ et utiliser la linéarité de l'espérance.
2) Majorer à l'aide de la variance de T_n. Expliciter cette dernière, et remarquer que de nombreux termes sont nuls, et que les autres sont majorés par 1. En déduire une majoration de $V(T_n)$.

1) On pose $F = \left\{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, 1 \leq i < j < k \leq n\right\}$. Pour $(i,j,k) \in F$, on pose $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$.
Ainsi, il y a un triangle entre les points M_i, M_j, M_k si et seulement si $Y_{i,j,k} = 1$.
De plus, $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$, donc $Y_{i,j,k}(\Omega) = \{0,1\}$ et
$P\left(Y_{i,j,k} = 1\right) = P\left(\left(X_{i,j} = 1\right) \cap \left(X_{i,k} = 1\right) \cap \left(X_{j,k} = 1\right)\right) = p^3$ et $Y_{i,j,k} \sim B(p^3)$

On a alors $T_n = \sum_{(i,j,k) \in F} Y_{i,j,k}$
Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = \sum_{(i,j,k) \in F} E\left(Y_{i,j,k}\right) = card(F).p^3$
Or $card(F) = \binom{n}{3}$ (choisir un élément de F revient à choisir un triplet d'éléments de $[\![1,n]\!]$).
Donc $\boxed{E(T_n) = a_n = \binom{n}{3}p^3}$

2) Soit $\varepsilon > 0$. $P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|T_n - a_n\right| > \varepsilon a_n\right)$ (les deux événements sont égaux donc ont même probabilité).
Donc par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2 a_n^2}$
On cherche à majorer $V(T_n) = V\left(\sum_{(i,j,k) \in F} Y_{i,j,k}\right)$.

$$V(T_n) = E\left(\left(\sum_{(i,j,k) \in F} Y_{i,j,k}\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_{(i,j,k) \in F} Y_{i,j,k}\right)\right)^2 = \sum_{(i,j,k) \in F} \sum_{(i',j',k') \in F} \left(E\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) - E\left(Y_{i,j,k}\right)E\left(Y_{i',j',k'}\right)\right)$$

Donc $V(T_n) = \sum_{(i,j,k) \in F} \sum_{(i',j',k') \in F} \operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right)$.
Or pour $(i,j,k) \in F$ et $(i',j',k') \in F$, $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$ et $Y_{i',j',k'} = X_{i',j'}X_{i',k'}X_{j',k'}$ sont indépendantes lorsque $i', j', k' \notin \{i,j,k\}$ d'après le lemme des coalitions. Dans ce cas, $\operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) = 0$.
De plus, dans tous les cas, comme $Y_{i,j,k}(\Omega) = Y_{i',j',k'}(\Omega) = \{0,1\}$,
$\operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) = E\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) - E\left(Y_{i,j,k}\right)E\left(Y_{i',j',k'}\right) \leq E(1) = 1$
On majore donc tous les termes de la somme qui ne sont pas nuls par 1.

$$V(T_n) = \sum_{(i,j,k) \in F} \sum_{(i',j',k') \in F} \operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) \leq \sum_{(i,j,k) \in F} \sum_{\substack{(i',j',k') \in F \\ i=i'}} 1 + \sum_{(i,j,k) \in F} \sum_{\substack{(i',j',k') \in F \\ j=j'}} 1 + \sum_{(i,j,k) \in F} \sum_{\substack{(i',j',k') \in F \\ k=k'}} 1$$

Donc $V(T_n) \leq 3 \sum_{(i,j,k) \in F} n^2$ car on a moins de n choix possibles pour j' et k' lorsque $i = i'$.
Donc $V(T_n) \leq 3n^2 a_n$ et $P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{3n^2}{\varepsilon^2 a_n}$. Or $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^3}{6}$.
On a donc bien $\boxed{\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0}$