Probabilités

Probabilités 1 : jeudi 22 Mai

Cours = réviser le Chapitre 8.

Exercice 1 (oral IMT 24, Victor,2) : soient A,B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres respectifs $p_A, p_B \in \left]0,1\right[$.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\{-1,0,1\}$ et $X=0$ si $A=B$, $X=1$ si $A>B$ et $X=-1$ si $A<B$.

1) Déterminer $P(X=0)$.
2) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que $P(B>k)=(1-p_B)^k$. Déterminer $P(X=-1)$.
3) Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 2 (Oral CCINP 24, Pauline,3) :

Soit $a>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_n(a)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a^k}{a^k+1}$

1) Donner un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.
2) a) Montrer que la suite $(U_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   b) On suppose $a\in\left]0,1\right]$. Etudier la limite de $(U_n(a))$ quand n tend vers l'infini.
3) a) Etudier la convergence de la suite $(-\ln(U_n(a)))$ quand n tend vers l'infini.

   b) Trouver les valeurs de a telles que la limite de $(U_n(a))$ n'est pas nulle.
4) On prend une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On tire aléatoirement une boule. Si on pioche une boule blanche, on la remet et on double le nombre de boules blanches dans l'urne.
   Si on pioche la boule noire, on s'arrête.
   On note B_i : « on tire une boule blanche au i-ème tour »
   On pose C_n : « on n'a tiré que des boules blanches jusqu'au n-ème tour », et $\pi_n=P(C_n)$.
   Pour quelle valeur de a a-t-on $U_n(a)=\pi_n$?
5) Quelle est la probabilité que l'on ne pioche jamais la boule noire ?

Exercice 3 (oral Mines 24, Andréa,3) : On considère une roue découpée en six cadrans de portions égales numérotées de 1 à 6. On la fait tourner deux fois de manière indépendante et on note les résultats obtenus. Peut-on truquer la roue pour obtenir une loi uniforme quant à la somme des résultats des deux lancers ?

Exercice 4 (oral Centrale 24, Victor,3) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On réalise n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On note N_n le nombre de séries obtenues après ces n lancers.

Ainsi, pour $n=6$, si on obtient $F-F-F-P-P-F$, il vient $N_6=3$.

1) Déterminer $N_n(\Omega)$ et calculer $P(N_n=1)$ et $P(N_n=n)$.
2) Soit $n\geq 2$ et $k\in[\![1,n]\!]$. Exprimer $P(N_n=k)$ en fonction des $P(N_{n-1}=i)$ pour $i\leq k$.
3) On note G_n la fonction génératrice de N_n. Expliciter $G_n(t)$ et en déduire le nombre moyen de séries obtenu après n lancers.

Exercice 5 (oral IMT 24, Sybille,4) : on lance simultanément N dés à 6 faces. Après chaque lancer, on relance les dés qui n'ont pas donné un 6 et on note S_n le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.

1) Déterminer la loi de S_1 et de S_2.
2) Déterminer la loi et l'espérance de S_n.
3) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $a_n=P(S_n=N)$.

Exercice 6 (oral Mines 24, Angel,4) :

1) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Caractériser les événements A indépendants de tout événement B.
2) Sur $(\Omega, P(\Omega))$, au plus dénombrable, existe-il une probabilité telle que tous les événements de $P(\Omega)$ soient (mutuellement) indépendants ? Si oui, caractériser toutes ces probabilités.

Probabilités 2 : jeudi 5 Juin

Cours = réviser le Chapitre 12.

Exercice 7 (oral IMT24, Marie,2) : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 8 (oral IMT 24, Pauline,2) : soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_k = 1) = P(Z_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, E(\cos(tS_n)) = \cos^n t$.

Exercice 9 (Oral CCINP24, Sandra,2) : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, T, P), à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X vérifie la condition (C) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) > 0$.
On suppose dans cet exercice que X vérifie la condition (C).
On appelle taux de défaillance la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = P(X = n / X \geq n)$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \dfrac{P(X = n)}{P(X \geq n)}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - x_n = \dfrac{P(X \geq n+1)}{P(X \geq n)}$
2) Déterminer deux réels a, b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
3) On prend Y une variable aléatoire sur (Ω, T, P) telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Déterminer le taux de défaillance y_n de Y. $\sum y_n$ est-elle convergente ?
4) Montrer que $\forall n \geq 2, \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k) = P(X \geq n)$, puis déterminer $P(X = n)$ en fonction des x_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5) Montrer que le taux de défaillance x_n de X est constant égal à $p \in [0,1[$ si et seulement si X suit une loi géométrique de paramètre p.
6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [0,1[$ et que $\sum \ln(1 - x_n)$ diverge. En déduire la nature de $\sum x_n$.

Exercice 10 (oral Mines 24, Matthias,3) : Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires uniformes, indépendantes, à valeur dans $\{-1, 1\}$. On note $X_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$.
Etudier le comportement asymptotique des suites $(E(\sin(X_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(E(\cos(X_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 11 (oral Centrale 1 24, Raphaël,3) :
Deux joueurs jouent à Pile ou Face. Chacun des joueurs dispose de sa propre pièce. Chaque pièce a une probabilité $p \in]0,1[$ de retomber sur Pile.

On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une première fois Pile pour le premier joueur, et Y celui pour obtenir Face pour le second joueur. On pose $Z = \frac{X}{Y}$.

1) Déterminer les lois de X, Y et calculer $P(X = Y)$.
2) Trouver la loi et l'espérance de Z.
3) Montrer qu'il existe p tel que la moyenne du nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile soit deux fois inférieure à celle pour obtenir Face.
4) *En plus à la fin :* Donner la loi de $\min(X, Y)$. Que reconnait-on ?

Exercice 12 (oral Centrale 24, Antoine,5) Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.

On pose $X = \sum_{k=1}^{N} X_k$ et $Y = \sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$. On note aussi $G(t,u) = E\left(t^X u^Y\right)$ pour $t, u \in [-1,1]$.

1) Exprimer $G(t,u) = E\left(t^X u^Y\right)$ en fonction de la fonction génératrice de N.
2) Montrer que si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

Exercices en plus :

Exercice 13 (Oral IMT 24, Diégo,2) : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $U_0, U_1, ..., U_p$ des urnes. Pour $0 \leq k \leq p$, on suppose que l'urne U_k contient k boules blanches et $(p-k)$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on prend des boules dans cette urne avec remise.

1) Quelle est la probabilité q_n pour que la $(n+1)-$ème boule soit blanche sachant qu'on a déjà tiré n boules blanches dans l'urne ?
2) Déterminer la limite de q_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 14 (Oral IMT 24, Gabrielle,2) : On considère un train qui fait des allers-retours entre les stations 0,1,2,3. Le train part ainsi de 0, puis repart dans l'autre sens quand il atteint la station 3 et ainsi de suite.
Un passager s'endort à la station 0. On note T le temps passé dans le train (si $T = 0$, le passager est à la station 0, si $T = 1$, il est à la station 1 et ainsi de suite).
On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire qui donne la position du passager. Déterminer le loi de X.

Exercice 15 (oral IMT 24, Charline,2) : une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires.
Un joueur tire 5 boules dans l'urne, avec remise.
Le joueur gagne deux points par boule blanche tirée et perd trois points dès qu'il pioche une boule noire.
X compte le nombre de boules blanches obtenues.
Y compte le nombre de points obtenus.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2) Mêmes questions pour Y.
3) Répondre aux mêmes questions lorsque le joueur tire 5 boules dans l'urne, sans remise.

Exercice 16 (Oral Mines 23, Ali,3) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $P(\llbracket 1, n \rrbracket)$ (ensemble des sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$) de l'équiprobabilité. Calculer $P\left(\left\{(A,B) \in P(\llbracket 1, n \rrbracket)^2, A \cap B = \varnothing\right\}\right)$.

Exercice 17 (Oral Mines 23, Maxime,4) : Une urne contient p boules. On effectue des tirages successifs avec remise. On note X_n le nombre de boules distinctes ayant été tirées après n tirages.

1) Montrer que $P(X_n = p) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
2) Déterminer l'espérance de X_n.

Exercice 18 (oral ENS 24, Angel,4) :

On dit que Y majore stochastiquement X si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, P(Y > t) \geq P(X > t)$. On note $X \leq Y$.

1) Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $Y \geq X$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée, on a $E(f(X)) \leq E(f(Y))$. Pour le sens retour, on pourra montrer que $P(X \geq t) = E(1_{X\geq t})$.
2) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $X \leq Y$, alors $P(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$. On pourra considérer $\widetilde{X}$, de même loi que X et indépendante de X, et montrer que $P(X \leq Y) \geq P(X \leq \widetilde{X})$.

Exercice 19 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que X_k suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose aussi que les (X_k) sont indépendantes. En cas de convergence, on pose $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$ pour $z \in [0,1[$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{z\to1^-} P(|(1-z)f(z)-1| > \varepsilon) = 0$.

Exercice 20 (Oral ENS 23, Maxime,5) : soient $n \geq 3$ points $M_1, ..., M_n$ dans le plan. Pour chaque couple de points, on lance une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Si on obtient Pile, on trace une arête entre les deux points et si on obtient Face, on ne fait rien. On note T_n la nombre de triangles ainsi formés.
Pour $i \neq j$, on pose $X_{i,j} = 1$ si les points M_i et M_j sont reliés, et $X_{i,j} = 0$ sinon.
On pose $a_n = \binom{n}{3} p^3$.

1) Déterminer l'espérance de T_n.
2) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Indications :

Exercice 1 (oral IMT 24, Victor,2) :
1) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$
2) Faire le calcul de $\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(B = i)$.
3) Utiliser $\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Exercice 2 (Oral CCINP 24, Pauline,3) :
1) Immédiat.
2) a) Montrer que la suite est décroissante et minorée.
   b) Traiter le cas $a = 1$ à part et utiliser une majoration.
3) a) Se ramener à la nature d'une série.
   b) Utiliser 2) et 3a) en séparant les cas.
4) Utiliser la formule des probabilités composées.

5) Déterminer $P\left(B=\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)=\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$.

Exercice 3 (oral Mines 24, Andréa,3) : supposer qu'il est possible d'obtenir une telle loi uniforme, et déterminer $P(X=1)$ et $P(X=6)$ d'abord, puis $P(X=2)$ et $P(X=5)$.

Exercice 4 (oral Centrale 24, Victor,3) :

1) Déterminer les événements $N_n=1$ et $N_n=n$.
2) Utiliser le système complet d'événements $(N_{n-1}=i)_{1\le i\le n-1}$.
3) Exprimer $G_n(t)$ en fonction de t et de $G_{n-1}(t)$.

Exercice 5 (oral IMT 24, Sybille,4) :

1) Noter pour $1\le i\le N$, D_i le temps d'attente du premier 6 pour le i-ème dé et utiliser les indicatrices de Bernoulli $1_{D_i\le n}$ pour exprimer S_n.
2) Utiliser ce qui précède.
3) On peut raisonner directement en traduisant l'événement $S_n=N$ à l'aide des D_i. On peut aussi utiliser la définition de l'espérance pour montrer $E(S_n)\le (N-1)\sum_{k=0}^{N-1} P(S_n=k)+NP(S_n=N)$

Exercice 6 (oral Mines 24, Angel,4) :

1) Procéder par analyse et synthèse. Traduire que A est indépendant de A.
2) Utiliser 1) et les événements $\{c\}$ pour $c\in\Omega$.

Exercice 7 (oral IMT24, Marie,2) : Ecrire la probabilité conditionnelle cherchée. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 8 (oral IMT 24, Pauline,2) :

1) Poser $X_k=\dfrac{1+Z_k}{2}$ et exprimer S_n en fonction des X_k.
2) Procéder par récurrence.

Exercice 9 (Oral CCINP24, Sandra,2) :

1) Constater que $(X=n)\cap(X\ge n)=(X\ge n)$.
2) Décomposer en éléments simples.
3) Utiliser ce qui précède.
4) Reconnaître un produit télescopique.
5) Procéder par double implication. Dans le sens retour, utiliser $x_n=\dfrac{P(X=n)}{P(X\ge n)}$.
6) Exploiter $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-x_k)=\ln(P(X\ge n))$.

Exercice 10 (oral Mines 24, Matthias,3) : utiliser que $e^{iX_n}=\cos(X_n)+i\sin(X_n)$.

Exercice 11 (oral Centrale 1 24, Raphaël,3)

1) Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(X=Y)$.
2) Calculer $P\left(Z=\dfrac{a}{b}\right)$, avec $a,b\in\mathbb{N}^*$ et $PGCD(a,b)=1$. Utiliser de nouveau la formule des probabilités totales. Pour l'espérance, utiliser l'indépendance et le théorème de transfert.
3) Exprimer le résultat attendu à l'aide d'espérances.
4) Calculer $P(U\ge k)$ si $U=\min(X,Y)$.

Exercice 12 (oral Centrale 24, Antoine,5)

1) Appliquer le théorème de transfert à $Z=(N,X)$ en prenant $f(n,k)=t^k u^{n-k}$. Reconnaître une loi binomiale quand on conditionne.
2) Montrer que $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=E\left(t^X\right)E\left(u^Y\right)$. Ecrire cette égalité à l'aide de doubles sommes et utiliser deux fois l'unicité du développement en série entière.

Exercices en plus :

Exercice 13 (Oral IMT 24, Diégo,2) :

1) Utiliser la formule des probabilités totales. Ne pas chercher à simplifier le résultat obtenu.
2) Prendre un équivalent du numérateur et du dénominateur.

Exercice 14 (Oral IMT 24, Gabrielle,2) : Exprimer l'événement $(X=0)$ à l'aide de T puis calculer sa probabilité. Procéder de même avec $(X=k)$ pour $k\in X(\Omega)$

Exercice 15 (oral IMT 24, Charline,2) :

1) Reconnaître une loi binomiale.
2) Exprimer Y à l'aide de X.
3) Calculer les différentes probabilités à l'aide de la formule des probabilités composées pour déterminer la loi de X.

Exercice 16 (Oral Mines 23, Ali,3) :

Poser $F_k=\left\{(A,B)\in P\left([\![1,n]\!]\right)^2, A\cap B=\varnothing, card(A)=k\right\}$ et calculer $card(F_k)$.

Exercice 17 (Oral Mines 23, Maxime,4) :

Utiliser $E_{n,k}$: « la $k-ème$ boule a été prise au moins une fois lors des n premiers tirages » et écrire l'événement $X_n=p$ à l'aide des $E_{n,k}$, puis utiliser l'événement contraire.

Utiliser les $1_{E_{n,k}}$ et la linéarité de l'espérance.

Exercice 18 (oral ENS 24, Angel,4) :

Dans le sens direct, utiliser le théorème de transfert. Ecrire $P(X=n)$ avec les $P(X>n-1)-P(X>n)$. Revenir aux sommes partielles pour pouvoir séparer la somme en deux et utiliser l'hypothèse de majoration stochastique. Utiliser la formule des probabilités totales pour exploiter l'hypothèse. La première question ne m'a pas servi.

Exercice 19 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : Je n'ai trouvé qu'une solution très difficile avec la définition de limite en posant $\alpha>0$. Noter $U=(1-z)f(z)-1=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(X_k-1)z^k\right)$ et $U_N=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{N}(X_k-1)z^k\right)$.

Montrer d'abord $P\left(|(1-z)f(z)-1|>\varepsilon\right)\leq P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Majorer $P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$ avec Bienaymé-Tchebychev.

Pour $M\geq 2$ et $r>1$, considérer $A(M,r)=\left\{\omega\in\Omega, \forall k\in\mathbb{N}, X_k\leq M\,r^k\right\}$ et montrer qu'il existe $M\geq 2$ tel que $P\left(A(M,r)\right)\geq 1-\frac{\alpha}{2}$. Montrer que si $rz<1$, que $\omega\in E(A,r)$ et N est assez grand, alors $\left|(U-U_N)(\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Exercice 20 (Oral ENS 23, Maxime,5) :

1) Poser pour $1\leq i<j<k\leq n$ $Y_{i,j,k}=X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$ et utiliser la linéarité de l'espérance.
2) Majorer à l'aide de la variance de T_n. Expliciter cette dernière, et remarquer que de nombreux termes sont nuls, et que les autres sont majorés par 1. En déduire une majoration de $V\left(T_n\right)$.