Centrale Maths-Info 2025

Séance du 5 Juin

Corrigés des exercices :

Exercice 1 (Oral Centrale 2 24, Raphaël)

1) Pour $h > -1$, il vient $\varphi(1+h) = \dfrac{1}{\sqrt{1+h}}\left(\dfrac{\ln(1+h)}{h}\right)^2$. Or $\dfrac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{h} = 1$.

Donc $\varphi(1+h) \underset{h\to 0}{\to} 1$ et $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } \varphi(1)=1}$.

2) Montrons que $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ est convergente.

- φ est maintenant continue sur $\mathbb{R}_+^{*-}$.
- $x^{3/4}\varphi(x) = x^{1/4}\ln^2(x)\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$ par croissance comparée. Donc $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable en 0, donc φ aussi.
- $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{\ln^2(x)}{x^2}$, donc $x^2\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$, donc $x^2\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc φ aussi.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ est convergente. On pose $\boxed{I_2 = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$

3) Pour $x > 0$, $\int_x^1 \ln(t)\,dt = \left[t\ln(t) - t\right]_x^1 = -1 + x\ln(x) - x \underset{x\to 0}{\to} -1$.

Donc par définition, $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et $\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$.

Pour $\int_0^1 \ln^2(t)\,dt$, on effectue une intégration par parties et on pose $u(t) = \ln^2(t)$ et $v(t) = t$.

Alors $u'(t) = 2\dfrac{\ln(t)}{t}$ et $v'(t) = 1$. Alors $u(t)v(t) = t\ln^2(t) \underset{t\to 0}{\to}$ et $u(t)v(t) = t\ln^2(t) \underset{t\to 1}{\to} 0$.

Donc comme $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge, $\boxed{\int_0^1 \ln^2(t)\,dt \text{ converge aussi et } \int_0^1 \ln^2(t)\,dt = -2\int_0^1 \ln(t)\,dt = 2}$

4) Soit $a > -1$. On prend $\beta > 0$ et on pose $x = t^\beta$. Alors $dx = \beta t^{\beta-1}dt$.
$\ln^2(x) = \beta^2\ln^2(t)$

$\int_0^1 x^a \ln^2(x)\,dx$ a donc même nature que $\int_0^1 t^{\beta a}\beta^2\ln^2(t)\beta t^{\beta-1}dt = \beta^3\int_0^1 t^{\beta a+\beta-1}\ln^2(t)dt$.

On résout $\beta a + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \dfrac{1}{1+a}$. On prend $\boxed{\beta = \dfrac{1}{1+a} > 0}$

Par changement de variable, comme $\int_0^1 \ln^2(t)\,dt$ converge, $\int_0^1 x^a\ln^2(x)\,dx$ converge aussi.

De plus, $\boxed{\int_0^1 x^a \ln^2(x)\,dx = \frac{2}{(1+a)^3}}$

5) Voir par ailleurs.
6) Voir par ailleurs.
7) On veut calculer $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{1-x}\right)^2 dx$.

On sait que pour $x \in [0,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

On peut dériver terme à terme (c'est une série entière de rayon $R = 1$) : $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

Donc $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)x^{n-1/2}\ln^2(x)\right)dx$.

On cherche à utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
On note $U_n(x) = (n+1)x^{n-1/2}\ln^2(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$.

Alors avec 4), chaque U_n est intégrable sur $[0,1[$.

De plus, $\sum U_n$ converge vers simplement sur $[0,1[$ (sa somme est φ).

On calcule $\int_0^1 |U_n(x)|\,dx = (n+1)\int_0^1 x^{n-1/2}\ln^2(x)\,dx = \frac{2(n+1)}{(n+\frac{1}{2})^3}$ d'après 4).

Or $\frac{2(n+1)}{(n-\frac{1}{2})^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} > 0$, et donc $\sum \int_0^1 |U_n(x)|\,dx$ converge. Donc $\boxed{\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 16\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)^3}}$

8) Il reste à calculer $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{1-x}\right)^2 dx$. On effectue un changement de variable et on pose

$x = \frac{1}{u}$. Ainsi, $dx = -\frac{1}{u^2}du$ et $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{u^2}\left(\frac{-\ln(u)}{1-\frac{1}{u}}\right)^2 du = \int_0^1 \sqrt{u}\left(\frac{\ln(u)}{1-u}\right)^2 du$.

On procède de même : $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)u^{n+1/2}\ln^2(u)\right)du$.

Donc, de même, $\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 16\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{(2n+3)^3}}$

On a donc $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 16\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)^3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)^3}\right)$ en changeant d'indice dans la seconde somme.

Donc $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 16\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = 16\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$.

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 2\pi^2 = 12\frac{\pi^2}{6}}$. Ceci valide bien la conjecture obtenue au 5).

Exercice 2 (Oral Centrale 2 24,Sandra) :

1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P,Q,R \in \mathbb{R}[X]$, avec $P=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $Q=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, $R=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$. On remarque tout d'abord que $\langle P,Q\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est en fait une somme finie puisque pour n assez grand, $a_n b_n=0$. Il n'y a donc aucun problème de convergence de série.
   - $\langle P,Q\rangle=\langle Q,P\rangle$ et $\langle,\rangle$ est symétrique.
   - $\langle P,Q+\lambda R\rangle=\langle P,Q\rangle+\lambda\langle P,R\rangle$ et par symétrie, $\langle,\rangle$ est bilinéaire.
   - $\langle P,P\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}^2 \geq 0$ et si $\langle P,P\rangle=\sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n{}^2=0$, alors $\forall n\leq \deg(P), a_n=0$ et finalement $P=0$.

   Donc $\langle,\rangle$ est défini positif : $\boxed{\text{c'est un produit scalaire}}$.

   En outre, on a bien $\varphi : E \to \mathbb{R}$ et $\varphi(P+\lambda Q)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a_n+\lambda b_n)}{2^n}=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)$.

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien une forme linéaire}}$.

2) Soit ψ une forme linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$. On a alors $\ker(\psi)=\{P\in E, \psi(P)=0\}$.
   Soit (P_n) une suite d'éléments de $\ker(\psi)$ qui converge vers $P\in E$.
   On a alors pour $n\in\mathbb{N}$: $\psi(P_n)=0$. Comme $P_n \underset{n\to+\infty}{\to} P$, il vient par caractérisation séquentielle de la continuité : $\psi(P_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\psi(P)$. Donc $\psi(P)=0$ et $P\in\ker(\psi)$. Donc $\boxed{\ker(\psi) \text{ est un fermé de } E}$.

3) Voir par ailleurs.
4) Voir par ailleurs.
5) Soit $P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E\setminus\{0\}$, fixé. On considère $N\in\mathbb{N}$ tel que $N\geq\deg(P)$. On pose $Q_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}X^n$.

On a alors $\varphi(P)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{2^n}=\langle P,Q_N\rangle$. On utilise Cauchy-Schwarz et il vient :

$|\varphi(P)|=|\langle P,Q_N\rangle|\leq\|P\|\|Q_N\|$. Or $\|Q_N\|=\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4^n}}\leq\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$, donc $\|Q_N\|\leq\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Donc $\frac{|\varphi(P)|}{\|P\|}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\boxed{\frac{\varphi(P)}{\|P\|} \text{ est borné pour } P\in K[X]\setminus\{0\}}$

6) On prouve que φ est continue sur E.

Pour $P\in E$, il vient $|\varphi(P)|\leq\frac{2}{\sqrt{3}}\|P\|\leq 2\|P\|$ (cela reste vrai pour $P=0$).

Donc par linéarité, si $P,Q\in E$, $|\varphi(P)-\varphi(Q)|=|\varphi(P-Q)|\leq 2\|P-Q\|$.

$\boxed{\varphi \text{ est ainsi lipschitzienne, donc continue sur } E}$. Donc avec 2), $\boxed{\ker(\varphi) \text{ est un fermé de } E}$.

7) Soit A une partie de E. On sait que $A^\perp=\{P\in E,\forall Q\in A,\langle P,Q\rangle=0\}=\bigcap_{Q\in A}\{P\in E,\langle P,Q\rangle=0\}$.

Pour $Q\in A$, on considère φ_Q définie sur E par $\varphi_Q(P)=\langle P,Q\rangle$.

Alors si $P,R\in E$, $|\varphi_Q(P)-\varphi_Q(R)|=|\langle P-R,Q\rangle|\leq\|P-R\|\|Q\|$ d'après Cauchy-Schwarz.

Donc φ_Q est lipschitzienne, donc continue sur E. Donc avec 2), $H=\ker(\varphi_Q)$ est un fermé de E.

Donc $\boxed{A^\perp=\bigcap_{Q\in A}\ker(\varphi_Q) \text{ est un fermé de } E.}$ C'est en effet une intersection de fermés.

Centrale Maths-Info 2025

Séance du 10 Juin

Corrigés des exercices :

Exercice 1 (Oral Centrale 2 24, Léo) :

1) Soit k un entier naturel. Soit $x \in Ker\,(u^k)$. On a alors $u^k(x) = 0_E$, donc $u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$, et ainsi $x \in Ker\,(u^{k+1})$. On a donc bien $Ker\,(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$, et ainsi $r_k \leq r_{k+1}$, donc $\boxed{(r_k) \text{ est croissante}}$.

   De plus, soit $x \in \mathrm{Im}\,(u^{k+1})$. Alors il existe $a \in E$ tel que $u^{k+1}(a) = x$. Alors $u^k(u(a)) = x$ et $x \in \mathrm{Im}\,(u^k)$. Donc $\mathrm{Im}\,(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(u^k)$ et $\boxed{(s_k) \text{ est décroissante.}}$

2) La suite (r_k) est croissante et majorée par $n = \dim(E)$ (puisque $\forall k \in \mathbb{N}, \ker\left(u^k\right) \subset E$).
   Elle est donc convergente. En particulier, $r_k - r_{k+1} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$.
   Avec la définition de limite, $\exists p \in \mathbb{N}, \forall k \geq p, \left|r_k - r_{k+1}\right| < 1$.
   Pour $k \geq p$, comme $r_k - r_{k+1} \in \mathbb{Z}$, on a $r_k - r_{k+1} = 0$, donc $r_k = r_{k+1}$, donc $\left\{p \in \mathbb{N}, \forall k \geq p_1, r_k = r_{k+1}\right\}$ est un ensemble non vide d'entiers naturels qui possède donc un minimum. Donc $\boxed{p_1 = p \text{ existe}}$.

   De plus, (s_k) est décroissante et minorée par 0, donc de même, $\boxed{p_2 \text{ existe}}$.

3) Montrons que $p_1 \leq p_2$. On sait que $\forall k \geq p_2, s_k = s_{k+1}$. Donc par théorème du rang, pour $k \geq p_2$ $r_k = n - s_k = n - s_{k+1} = r_{k+1}$ et $p_1 \leq p_2$ (puisque p_1 est le plus petit entier naturel tel que $\forall k \geq p_1, r_k = r_{k+1}$).
   De même, $p_1 \geq p_2$ et on a bien $\boxed{p = p_1 = p_2}$.

4) Voir par ailleurs.
5) Voir par ailleurs.
6) Montrons $\ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p) = E$. On sait déjà que $\dim\left(\ker(u^p)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(u^p)\right) = n = \dim(E)$ par théorème du rang. Montrons que $\ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \left\{0_E\right\}$. Soit $y \in \ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$. Alors
   $\exists x \in E, u^p(x) = y$ et $u^{2p}(x) = u^p(y) = 0_E$.
   Donc $x \in \ker(u^{2p})$. Or $d_p = d_{2p}$ et $\ker(u^p) \subset \ker(u^{2p})$, donc $\ker(u^p) = \ker(u^{2p})$, donc $x \in \ker(u^p)$.
   Donc $u^p(x) = y = 0_E$ et $\ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \left\{0_E\right\}$, donc $\boxed{\ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p) = E}$

7) Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(g_k) = \left\{g_k(x), x \in \ker\left(u^{k+1}\right)\right\}$, donc $\boxed{\mathrm{Im}(g_k) = \left\{u^k(x), x \in \ker\left(u^{k+1}\right)\right\} = u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right)}$.

   De plus, $\ker(g_k) = \left\{x \in \ker\left(u^{k+1}\right), g_k(x) = 0_E\right\} = \left\{x \in \ker\left(u^{k+1}\right), u^k(x) = 0_E\right\} = \ker\left(u^{k+1}\right) \cap \ker\left(u^k\right)$.
   Donc comme $Ker\,(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$, $\boxed{\ker(g_k) = \ker\left(u^k\right)}$.

   On applique le théorème du rang à g_k : $\begin{array}{l} \ker\left(u^{k+1}\right) \to E \\ x \mapsto u^k(x) \end{array}$.

   Il vient $r_{k+1} = r_k + \dim\left(u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right)\right)$, donc $\boxed{r_{k+1} - r_k = \dim\left(u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right)\right)}$

8) On veut montrer que $(r_{k+1} - r_k)$ est décroissante.
   Montrons que si $k \geq 1$, alors $u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) \subset u^{k-1}\left(\ker\left(u^k\right)\right)$.

Soit $y \in u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right)$. Alors $\exists x \in \ker\left(u^{k+1}\right), u^k(x) = y$. Donc on a $u^{k-1}(u(x)) = y$. De plus, $u^k(u(x)) = u^{k+1}(x) = 0_E$ car $x \in \ker\left(u^{k+1}\right)$. Donc $u(x) \in \ker\left(u^k\right)$ et $y \in u^{k-1}\left(\ker\left(u^k\right)\right)$.

On déduit $u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) \subset u^{k-1}\left(\ker\left(u^k\right)\right)$, donc $\dim\left(u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right)\right) \leq \dim\left(u^{k-1}\left(\ker\left(u^k\right)\right)\right)$.

Donc avec 7), $r_{k+1} - r_k \leq r_k - r_{k-1}$ et $\boxed{(r_{k+1} - r_k) \text{ est décroissante}}$.

Enfin, $s_{k+1} - s_k = \left(\dim(E) - r_{k+1}\right) - \left(\dim(E) - r_k\right) = r_k - r_{k+1}$.

Donc $\boxed{(s_{k+1} - s_k) \text{ est croissante}}$.

Exercice 2 (oral Centrale 2 2023, Raphaël) :

Partie mathématique :

1) Soit $x > 0$. La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est une série alternée. En effet, $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ est décroissante et converge vers 0. Donc d'après le théorème spécial sur les séries alternées, $\boxed{S(x) \text{ existe pour tout } x > 0}$.

2) On pose pour $t \in \left]0, +\infty\right[$ et $x \in \mathbb{R}$: $f(x,t) = \frac{t^x}{1+e^t} = \frac{e^{x\ln(t)}}{1+e^t}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $f(x,t) = \frac{t^x}{1+e^t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{2t^{-x}}$. Or $t \mapsto \frac{1}{2t^{-x}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $x > -1$. Donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $x > -1$
- $f(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto f(x,t)$ est toujours intégrable en $+\infty$. Donc $\boxed{D_I = \left]-1, +\infty\right[}$
- Pour tout $t \in \left]0, +\infty\right[$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soient $a, b \in \left]-1, +\infty\right[$, avec $a \leq b$. Alors pour $t \in \left]0, +\infty\right[$ et $x \in [a,b]$, il vient :
  - Si $t \leq 1$, $\ln(t) \leq 0$ et $|f(x,t)| = \frac{e^{x\ln(t)}}{1+e^t} \leq \frac{e^{a\ln(t)}}{1+e^t} \leq \frac{t^a}{1+e^t} + \frac{t^b}{1+e^t} = \varphi(t)$.
  - Si $t \geq 1$, $\ln(t) \geq 0$ et $|f(x,t)| = \frac{e^{x\ln(t)}}{1+e^t} \leq \frac{e^{b\ln(t)}}{1+e^t} \leq \frac{t^a}{1+e^t} + \frac{t^b}{1+e^t} = \varphi(t)$

  On a donc toujours $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$

  De plus, φ est intégrable en $+\infty$ car $a, b \in \left]-1, +\infty\right[$.

  $\boxed{\text{Donc } I \text{ est continue sur tout segment de } \left]-1, +\infty\right[\text{, donc sur } \left]-1, +\infty\right[}$.

3) $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On conjecture que $\boxed{S(1) = \ln(2)}$. Voir par ailleurs.

4) Montrons cette conjecture. Pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.

   Si on pose pour $x \in [0,1]$ $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ avec $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ alors avec le théorème spécial sur les séries alternées, h est définie sur $[0,1]$. De plus, pour $x \in [0,1]$, $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, alors avec la majoration du reste du théorème sur les séries alternées, il vient $|R_N(x)| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1}$.

   Donc $0 \leq \|R_N\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{N+1}$ et (R_N) converge uniformément vers 0.

Donc $\sum a_n$ converge **uniformément** sur $[0,1]$ et comme chaque a_n est continue sur $[0,1]$, h l'est aussi.

Donc $\boxed{S(1) = h(1) = \lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln(2)}$

5) On conjecture que $\boxed{I(p) = (p!)S(p+1)}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Voir par ailleurs

6) En admettant la conjecture précédente, $I(p) = (p!)S(p+1) = p!\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}$, avec $\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}\right| \le \frac{1}{2^{p+1}}$,avec de nouveau la majoration du reste du théorème sur les séries alternées. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $\boxed{I(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} p!}$

7) On note $J(p,k) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-kt}\,dt$ pour $p,k \in \mathbb{N}^*$ et $g(t) = t^p e^{-kt}$

g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc g est intégrable en $+\infty$ et $J(p,k)$ existe bien.

De plus, on pose $\begin{cases} u(t) = t^p \\ v'(t) = e^{-kt} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t) = pt^{p-1} \\ v(t) = -\frac{1}{k}e^{-kt} \end{cases}$. Alors $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc par intégration par parties, $J(p,k) = \frac{p}{k}\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-kt}\,dt$.

On itère le procédé et il vient $\boxed{J(p,k) = \frac{p!}{k^p}\int_0^{+\infty} e^{-kt}\,dt = \frac{p!}{k^{p+1}}}$

8) A l'aide d'un développement en série entière,

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{1+e^t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^p e^{-t} e^{-kt}(-1)^k\right)dt.$$

Donc $I(p) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^p e^{-kt}(-1)^{k+1}\right)dt$.

On admet pour le moment qu'on peut échanger série et intégrale. Alors on obtient bien :

$$I(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\int_0^{+\infty} t^p e^{-kt}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{p!}{k^{p+1}} = p!S(p+1).$$

On justifie l'interversion : on note $h_k(t) = t^p e^{-kt}(-1)^{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

- Chaque h_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sum h_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (et sa somme $t \mapsto \frac{t^p}{1+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).
- $\sum_k \int_0^{+\infty} |h_k(t)|\,dt$ converge car $\int_0^{+\infty} |h_k(t)|\,dt = \frac{p!}{k^{p+1}}$ et $p+1>1$ (avec Riemann).

Donc on a bien $\boxed{I(p) = p!S(p+1)}$

Centrale Maths-Info 2025

<u>Séance du 12 Juin</u>

Corrigé des exercices :

Exercice 1 (oral Centrale 2 2023, Samuel) :

1) Il vient $\boxed{S_1(\Omega)=\{1\},\ P(S_1=1)=1 \text{ et } E(S_1)=1}$.

   De plus, $S_2(\Omega)=\{1,2\}$, $P(S_2=1)=P(X_1=X_2)=\dfrac{1}{n}$, donc $P(S_2=2)=1-\dfrac{1}{n}$

   $\boxed{E(S_2)=\dfrac{1}{n}+2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=2-\dfrac{1}{n}}$

3) Pour $p\in[\![1,100]\!]$, on note $S_{k,p}$ le résultat obtenu pour S_k lors de la $p-ème$ expérience aléatoire. On utilise **la loi faible des grands nombres** : on sait que pour tout $\varepsilon>0$, $P\left(\left|\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{q}S_{k,p}}{q}-E(S_k)\right|\geq\varepsilon\right)\underset{q\to+\infty}{\to}0$.

   Ici, on peut considérer que $q=100$ est grand et que la moyenne des S_k obtenue sur ces 100 itérations est une bonne estimation de $E(S_k)$.

4) On obtient que $\ln\left(1-\dfrac{E(S_k)}{n}\right)=k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, donc que $E(S_k)=n\left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k\right)$.

   On peut remarquer que $E(S_k)\underset{k\to+\infty}{\to}n$, ce qui est logique (au bout d'un long moment, on est presque certain d'avoir obtenu toutes les valeurs possibles dans $[\![1,n]\!]$ au moins une fois).

5) On remarque $S_k(\Omega)=[\![1,k]\!]$. On considère $j\in\mathbb{N}$.

   On veut prouver que $P(S_{k+1}=j)=\dfrac{j}{n}P(S_k=j)+\dfrac{n-j+1}{n}P(S_k=j-1)$.

   Tout d'abord, c'est vrai si $j>k+1$ et si $j=0$. On prend $j\in[\![1,k+1]\!]$

   On applique la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(S_k=j)_{1\leq j\leq k}$.

   Il vient $P(S_{k+1}=j)=\sum\limits_{i=1}^{k}P(S_{k+1}=j,S_k=i)$.

   Si $i<j-1$, $P(S_{k+1}=j,S_k=i)=0$ (en effet, en ajoutant $X_{k+1}(\omega)$, on augmente au maximum de 1 le nombre d'éléments distincts dans $\{X_1(\omega),...,X_k(\omega)\}$).

   De plus, si $i>j$, $P(S_{k+1}=j,S_k=i)=0$ (ce même nombre ne peut que croître quand on ajoute un nouvel élément dans l'ensemble).

   Donc $P(S_{k+1}=j)=P(S_{k+1}=j,S_k=j-1)+P(S_{k+1}=j,S_k=j)$.

   Donc $P(S_{k+1}=j)=P(S_{k+1}=j\,/\,S_k=j-1)P(S_k=j-1)+P(S_{k+1}=j\,/\,S_k=j)P(S_k=j)$.

   Pour avoir $S_{k+1}=j$ sachant $S_k=j$, il faut et il suffit que $X_{k+1}(\omega)$ soit élément de $\{X_1(\omega),...,X_k(\omega)\}$.

   La probabilité est $\dfrac{j}{n}$.

   Donc $\boxed{P(S_{k+1}=j)=\dfrac{j}{n}P(S_k=j)+\dfrac{n-j+1}{n}P(S_k=j-1)}$

6) On calcule l'espérance :

$$E(S_{k+1})=\sum_{j=1}^{k+1} jP(S_{k+1}=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1} j^2P(S_k=j)+\sum_{j=1}^{k+1} jP(S_k=j-1)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1} j(j-1)P(S_k=j-1).$$

Donc $E(S_{k+1})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1} j^2P(S_k=j)+\sum_{j=0}^{k}(j+1)P(S_k=j)-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k} j(j+1)P(S_k=j)$

Comme $P(S_k=k+1)=0$, $E(S_{k+1})=E(S_k)+1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} jP(S_k=j)=\left(1-\frac{1}{n}\right)E(S_k)+1$.

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On résout $x=\left(1-\frac{1}{n}\right)x+1 \Leftrightarrow x=n$ et $E(S_k)-n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\left(E(S_0)-n\right)$.

On a donc bien $\boxed{E(S_k)=n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)}$

Exercice 2 (oral Centrale 2 2023, Eloi) :

1) f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (si $x<y$, $f_n(x)<f_n(y)$). Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+)=[-1,+\infty[$.

   Comme $0\in[-1,+\infty[$, $\boxed{\text{il existe un unique } x_n\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que } f_n(x_n)=0}$.

2) On trace avec Python.

3) Tout d'abord, comme $f_n(0)=-1$, on sait que pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $x_n\in\mathbb{R}_+^*$

   Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, il vient $f_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}-1=f_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n+1}>f_n(x)$.

   Donc si $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n)$. Or $f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_{n+1})$, donc $f_{n+1}(x_n)>f_{n+1}(x_{n+1})$.

   Donc par stricte croissance de f_{n+1}, $x_n>x_{n+1}$ et $\boxed{(x_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

   Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel l.

   On trouve avec Python que $l\simeq 0,63$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a nécessairement $\forall n\geq 2, x_n\leq x_2$.

   Or $\frac{x_2^2}{2}+x_2-1=0$, donc comme $x_2>0$, $x_2=\sqrt{3}-1\in[0,1[$. On pose $\boxed{\alpha=x_2=\sqrt{3}-1\in[0,1[}$.

   Alors $\forall n\geq 2, x_n\leq\alpha$

5) On pose $x\in[0,1[$. Alors $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-1 \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}-1=-\ln(1-x)-1$ (on sait que la série converge bien avec les développements en série entière usuels).

   On note donc $\boxed{f(x)=-\ln(1-x)-1}$ et on a bien $f\in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$ et $\forall x\in[0,1[, f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}f(x)$.

   Il vient alors $0=f_n(x_n)=f(x_n)+f_n(x_n)-f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   Comme f est continue en l, on sait que $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to}f(l)$.

   De plus, $f_n(x_n)-f(x_n)=-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x_n^k}{k}$, et $\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x_n^k}{k}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k}$ car $\forall n\geq 2, x_n\leq\alpha$.

   Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ (c'est le reste d'une série convergente).

   Donc $f_n(x_n)-f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et en passant à la limite, il vient $0=f(l)$, donc $\boxed{l=\frac{e-1}{e}}$

6) On utilise le théorème des accroissements finis.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[l, x_n]$, dérivable sur $]l, x_n[$, donc il existe $c_n \in]l, x_n[$ tel que $f_n(x_n) - f_n(l) = f_n'(c_n)(x_n - l)$.

Comme $f_n(x_n) = 0$, on conclut $\boxed{-f_n(l) = f_n'(c_n)(x_n - l)}$

7) On sait que pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - 1$. Donc $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

Donc $f_n'(c_n) = \frac{1-c_n^n}{1-c_n}$. Or $l \le c_n \le x_n$, et par encadrement, $c_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$, avec $l<1$.

Donc $c_n^n = \exp(n\ln(c_n)) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $f_n'(c_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{1-l}$ et $\boxed{f_n'(c_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-l}}$

Comme $c_n \le x_n \le \alpha < 1$, il vient $f_n'(c_n) \neq 0$ Avec le résultat du 6), $\boxed{x_n - l = -\frac{f_n(l)}{f_n'(c_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} (l-1) f_n(l)}$.

8) En outre, $f_n(l) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l^k}{k} - 1$, avec $f(l) = -\ln(1-l) - 1 = 0$, donc $f_n(l) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{l^k}{k} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{l^k}{k}$.

On pose alors $V_k(t) = \frac{t^k}{k}$ pour $k \ge n+1$ et $t \in [0,l]$. On a alors $V_k'(t) = t^{k-1}$.

On utilise le théorème de dérivation de la somme des séries de fonctions.

- Chaque V_k est C^1 sur $[0,l]$
- $\sum_{k\ge n+1} V_k$ converge simplement sur $[0,l]$.
- $\|V_k'\|_\infty = l^{k-1}$, donc $\sum_{k\ge n+1} V_k'$ converge normalement donc uniformément sur $[0,l]$.

Donc $\forall t \in [0,l]$, $f_n'(t) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^{k-1} = -\frac{t^n}{1-t}$.

On a donc bien $\boxed{f_n(l) = f_n(0) - \int_0^l \frac{t^n}{1-t}\,dt = \int_0^l \frac{t^n}{t-1}\,dt}$

9) En intégrant par parties : $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(t-1)}\right]_0^l + \frac{1}{n+1}\int_0^l \frac{t^{n+1}}{(t-1)^2}\,dt$.

Donc $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}\,dt = \frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)} + \frac{1}{n+1} J_n$, avec $J_n = \int_0^l \frac{t^{n+1}}{(t-1)^2}\,dt$.

Or $|J_n| \le \frac{1}{(1-l)^2}\int_0^l t^{n+1}dt$, donc $|J_n| \le \frac{l^{n+2}}{(n+2)(1-l)^2}$ et $\frac{1}{n+1}|J_n| \le \frac{l^{n+1}}{(n+1)^2(1-l)^2}$

Donc $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)} + o\left(\frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)}\right)$ et $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)}$

Donc en reprenant 6), $x_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} (l-1) f_n(l)$, donc $\boxed{x_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l^{n+1}}{(n+1)}}$