Centrale Maths-Info 2025

Séance du 5 Juin

Exercice 1 (Oral Centrale 2 24, Raphaël) :

1) On considère $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{1-x}\right)^2$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 1. On note encore φ le prolongement.
2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ est convergente. On note I_2 sa valeur.
3) Montrer que $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ et $\int_0^1 \ln^2(t)\,dt$ convergent et calculer leurs valeurs.
4) Soit $a > -1$. En posant $x = t^\beta$ (où β est à déterminer), montrer que $\int_0^1 x^a \ln^2(x)\,dx$ est convergente et calculer sa valeur.
5) Pour tout $s > -1$, on définit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{10^4} \frac{1}{n^s}$. Ecrire en Python une fonction qui permet de calculer $\zeta(s)$.

   On estimera dans la suite que $\sum_{n=1}^{10^4} \frac{1}{n^s}$ est une bonne approximation de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

   Calculer $\sqrt{6\zeta(2)}$ et conjecturer la valeur de $\zeta(2)$.

6) Ecrire la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^{*-}$ et déterminer une valeur approchée de $\frac{I_2}{\zeta(2)}$ et de I_2 à l'aide de l'instruction interg(phi,0,np.inf)$[0]$.
7) Démontrer que $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 16\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)^3}$.
8) Justifier la conjecture établie au 6)

Exercice 2 (Oral Centrale 2 24,Sandra) :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n X^n, Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\deg(Q)} b_n X^n$,on note $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

On pose aussi $\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

1) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ définit bien un produit scalaire sur E et que φ est une forme linéaire sur E. On munit E de la norme euclidienne usuelle associée à ce produit scalaire.
2) Soit ψ une forme linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\ker(\psi)$ est un fermé de E.
3) Ecrire une fonction python $q(L)$ qui prend en argument une liste $L = [a_0, ..., a_n]$, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et qui renvoie $\frac{\varphi(P)}{\|P\|}$.
4) Générer aléatoirement plusieurs listes de longueurs différentes pour calculer $\frac{\varphi(P)}{\|P\|}$.

   Conjecturer que $\frac{\varphi(P)}{\|P\|}$ est borné pour $P \in K[X] \setminus \{0\}$.

5) Démontrer cette conjecture. On pourra utiliser $Q_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} X^n$ pour $N \in \mathbb{N}$.
6) En déduire que $H = \ker(\varphi)$ est un fermé de E .
7) Soit A une partie de E, monter que $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E.

Séance du 10 Juin

Exercice 1 (Oral Centrale 2 24, Léo) :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in L(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $r_k = \dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)$ et $s_k = \dim\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right)\right)$

1) Etudier la monotonie des suites (r_k) et (s_k).
2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel p_1 et un plus petit entier naturel p_2 tels que $\forall k \geq p_1, r_k = r_{k+1}$ et $\forall k \geq p_2, s_k = s_{k+1}$
3) Montrer que $p_1 = p_2$. On pose $p = p_1 = p_2$.
4) Ecrire deux fonctions $suite - r(A,n)$ et $suite - s(A,n)$ qui étant donnés une matrice $A \in M_p(\mathbb{C})$ et un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ renvoient respectivement $[r_0, ..., r_n]$ et $[s_0, ..., s_n]$.
5) Tracer en nuage de points les suites $(r_{k+1} - r_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(s_{k+1} - s_k)_{0 \leq k \leq n}$ pour une matrice aléatoire de taille $n = 10$ puis $n = 15$. Conjecturer la monotonie de ces deux suites.
6) Montrer que $\ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p) = E$.
7) Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère $g_k : \begin{array}{l} \ker\left(u^{k+1}\right) \to E \\ x \mapsto u^k(x) \end{array}$. Déterminer $\mathrm{Im}(g_k)$ et $\ker(g_k)$ en fonction de u.

   En déduire que $r_{k+1} - r_k = \dim\left(u^k\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right)\right)$.
8) Démontrer la conjecture établie au 5).

Exercice 2 (oral Centrale 2 2023, Raphaël) :

Une fonction Python permettant de calculer $I(x)$ est donnée

On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1) Montrer que $S(x)$ existe pour tout $x > 0$.
2) Déterminer l'intervalle de définition de I et montrer que I est continue sur cet intervalle.
3) Ecrire un programme Python permettant de calculer la valeur de $S(x)$ pour $x > 0$. On considèrera que l'on obtient la somme infinie en ajoutant les 100000 premiers termes. Evaluer $\exp(S(1))$ et émettre une hypothèse sur la valeur de $S(1)$
4) Démontrer la conjecture précédente.
5) Evaluer le rapport $\frac{I(x)}{S(x+1)}$ pour $x \in [\![1,10]\!]$ et conjecturer sur $\frac{I(p)}{S(p+1)}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
6) En déduire un équivalent de $I(p)$ quand p tend vers $+\infty$.
7) Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} t^p e^{-kt} dt$ pour $p, k \in \mathbb{N}^*$.
8) Démontrer alors la conjecture de la question 5.

Séance du 12 Juin

Exercice 1 (oral Centrale 2 2023, Samuel) : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'une commande Python calculant aléatoirement les $X_i(\omega)$ pour $1 \le i \le k$).

Pour $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k(\omega) = card\left(\{X_1(\omega),...,X_k(\omega)\}\right)$. On pose aussi $S_0 = 0$.

1) Déterminer les lois de S_1, S_2 et préciser leurs espérances.
2) On fixe $n = 10$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, écrire une fonction en Python qui calcule les valeurs prises par S_k pour 100 simulations de l'expérience, et renvoie la moyenne des S_k obtenue sur ces 100 itérations.
3) Justifier que l'on peut considérer que cette fonction renvoie approximativement $E(S_k)$.
4) Tracer à l'aide de python $\ln\left(1-\frac{E(S_k)}{n}\right)$ pour $k \in [\![1,20]\!]$. Conjecturer alors une expression de $E(S_k)$.
5) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n}P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n}P(S_k = j-1)$.
6) Démontrer l'expression de $E(S_k)$ conjecturée au 4).

Reprise d'un des exercices précédents ou au choix :

Exercice 2 (oral Centrale 2 2023, Eloi) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \ge 0$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - 1$

On dispose d'une fonction **x(n)** renvoie le terme d'indice n de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où n est un entier strictement positif.

1) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Tracer les termes pour n allant jusqu'à 50.
3) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement monotone. Proposer une valeur approchée de sa limite l.
4) Montrer $\exists \alpha \in [0,1[, \forall n \ge 2, x_n \le \alpha$.
5) Montrer qu'il existe $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R}), \forall x \in [0,1[, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} f(x)$. Donner l'expression explicite de f. En déduire la valeur de l.
6) Montrer qu'on peut construire une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n \in]l, x_n[$ et $-f_n(l) = f_n'(c_n)(x_n - l)$
7) En déduire $x_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} (l-1)f_n(l)$.
8) Démontrer $f_n(l) = \int_0^l \frac{t^n}{t-1}dt$.
9) En déduire un équivalent de $x_n - l$ lorsque n tend vers l'infini.