Mines - Ponts PC II 2021 : corrigé

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $a_k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Pour $1 \leq k \leq n-1$, on note $b_k = \dfrac{a_k^2}{a_{k+1}a_{k-1}}$.

Il vient $b_k = \dfrac{1}{(k!)^2((n-k)!)^2} \times \dfrac{(k+1)!\,(k-1)!\,(n-k+1)!\,(n-k-1)!}{1}$

donc $b_k = \dfrac{k+1}{k} \times \dfrac{(n-k+1)}{n-k} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{n-k}\right) \geqslant 1$.

Donc comme tous les termes sont positifs, $a_k^2 \geqslant a_{k+1}a_{k-1}$.

$\boxed{\text{La suite } \left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est log-concave}}$

2) On suppose que $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est ultra log-concave.

On pose $b_k = \dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$ pour $0 \leq k \leq n$. $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est log-concave

Alors pour $1 \leq k \leq n-1$, $b_k^2 \geqslant b_{k-1}b_{k+1}$

Donc $\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} b_k^2 \geqslant \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} b_{k-1}b_{k+1} = a_{k-1}a_{k+1}$

Or $\underline{b_k^2 \geqslant 0}$ et d'après 1), $\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} \leqslant \binom{n}{k}^2$

Donc $a_k^2 = \binom{n}{k}^2 b_k^2 \geqslant \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} b_k^2 \geqslant a_{k-1}a_{k+1}$

Donc $\boxed{\text{si } (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est ultra log-concave, elle est log-concave}}$

3) On suppose $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ strictement positive et log-concave

Alors pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, $a_k^2 \geqslant a_{k+1}a_{k-1}$.

Donc comme $a_{k+1}>0$ et $a_k>0$: $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} \geqslant \dfrac{a_{k-1}}{a_k}$

Ainsi, $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \geqslant \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \geqslant \dots \geqslant \dfrac{a_1}{a_2} \geqslant \dfrac{a_0}{a_1}$.

On distingue trois cas :

→ si $\dfrac{a_0}{a_1} \geqslant 1$, alors $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \dots \geqslant a_n$ et en prenant $j=0$, la suite $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est unimodulaire.

→ si $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1$, alors $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \dots \leq a_n$ et on conclut de même avec $j=n$

→ Sinon : $\dfrac{a_0}{a_1} < 1$ et $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} > 1$. On prend alors

$j = \min\left(\left\{i\in[\![0,n-1]\!],\ \dfrac{a_j}{a_{j+1}} \geqslant 1\right\}\right)$. On a un ensemble non vide d'entiers qui a un plus petit élément.

Donc $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{j-1} \leq a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \dots \geqslant a_n$.

Dans tous les cas, $\boxed{(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est unimodulaire}}$

4) P est de degré n donc possède n racine comptées avec leur multiplicité. On note $x_1 < \dots < x_k$ ses racines distinctes réelles

Pour $i \in [\![1,k]\!]$, la multiplicité de x_i comme racine de P est α_i. On note $\alpha_i = \text{mult}(x_i, P)$ et ici $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$ (2

Alors pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\text{mult}(x_i, P') = \alpha_i - 1$

De plus, P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ à valeurs réelles : avec Rolle, $\exists c_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $P'(c_i) = 0$ (avec $i \in [\![1, k-1]\!]$). On note β_i la multiplicité de chaque c_i

et il vient $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - k + (k-1) \geqslant n-1$

Or $\deg P' = n-1$; donc on a toutes les racines de P' qui sont toutes réelles. (Remarque : ici $n \geqslant 1$ pour éviter $P' = 0$ qui ne répond pas aux hypothèses de l'énoncé)

$\boxed{\text{Si } P \text{ est à racines toutes réelles, } P' \text{ l'est aussi}}$

5) On suppose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$

donc avec un changement d'indice, $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$.

Soit $i = \min(\{k \in [\![0,n]\!], a_k \neq 0\})$. Alors $\forall k > i$, $a_{n-k} = 0$

donc $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-i} a_{n-k} X^k$, avec $a_{n-(n-i)} = a_i \neq 0$.

Donc $\underline{\deg(Q) = n - i}$

De plus, soit x une racine non nulle de P, de multiplicité α

Alors $P(X) = (X-x)^\alpha R$, avec $R(x) \neq 0$. et $\deg R = n - \alpha$

Donc $Q(X) = X^\alpha \left(\frac{1}{X} - x\right)^\alpha X^{n-\alpha} R\left(\frac{1}{X}\right) = (-x)^\alpha \left(-\left(\frac{1}{xX} - 1\right)X\right)^\alpha X^{n-\alpha} R\left(\frac{1}{X}\right)$

donc $Q(X) = (-x)^\alpha \left(X - \frac{1}{x}\right)^\alpha X^{n-\alpha} R\left(\frac{1}{X}\right) = \left(X - \frac{1}{x}\right)^\alpha S(X)$, où

$S(X) = (-x)^\alpha X^{n-\alpha} R\left(\frac{1}{X}\right)$ est un polynôme car $\deg R = n - \alpha$

(si $R(X) = \sum_{k=0}^{n-\alpha} b_k X^k$, $X^{n-\alpha} R\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n-\alpha} b_{n-\alpha-k} X^k$).

Donc $\underline{\text{mult}(x, Q) \geq \alpha}$

Or $P = a_i X^i + \dots + a_n X^n = X^i (a_i + \dots + a_n X^{n-i})$

et comme $a_i \neq 0$, $\text{mult}(0, P) = i$ et $\sum_{x \neq 0} \text{mult}(x, P) = n - i$

Donc $\sum_{x \neq 0} \text{mult}(x, Q) \geq n - i = \deg(Q)$

On a donc trouvé $(n-i)$ racines réelles de Q (au moins),

avec $\deg Q = n - i$.

Donc $\boxed{Q \text{ est un polynôme à racines toutes réelles}}$

6) On a $\deg P = n$ donc en dérivant $(k-1)$ fois,

$\deg Q_1 \leq n - (k-1) = n - k + 1$ (si une des dérivées est nulle, on n'a pas égalité)

Puis avec le même raisonnement qu'au 5), (3

si $i = \min(\{k, b_k \neq 0\})$, où $Q_1 = \sum_{k=0}^{\deg Q_1} b_k X^k$, alors

$\deg Q_2 = n-k+1-i \leq n-k+1$.

Enfin, en dérivant $n-k-1$ fois, $\boxed{\deg(Q) \leq 2}$

Avec 4) et 5), les racines de Q_1, Q_2 et Q sont toutes réelles

On a $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ donc $Q_1(X) = \sum_{k \geq k-1}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{i-k+1}$

Donc $Q_2(X) = X^{n-k+1} \sum_{i=k-1}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{-i+k-1} = \sum_{i \geq k-1}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{n-i}$

Donc $Q(X) = \sum_{i=k-1}^{k+1} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} \frac{(n-i)!}{(n-i-(n-k-1))!} X^{n-i-(n-k-1)}$

donc $Q(X) = \sum_{i=k-1}^{k+1} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} \times \frac{(n-i)!}{(k+1-i)!} X^{k+1-i}$

donc $Q(X) = a_{k-1} \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{2!} X^2 + a_k\, k!\,(n-k)!\, X$

$+ a_{k+1} \frac{(k+1)!}{2} \frac{(n-k-1)!}{1}$

Comme Q est à racines toutes réelles, son discriminant est positif : $\Delta = a_k^2 \frac{(n!)^2}{\binom{n}{k}^2} - a_{k-1} a_{k+1} \frac{(n!)^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} \geq 0$

Donc $\left(\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)^2 \geq \left(\dfrac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\right)\left(\dfrac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right)$

et $\boxed{(a_0, \ldots, a_n) \text{ est ultra log-concave}}$

7) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $R(x) = e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$.

$R(x) = e^{\alpha x}\left[e^{-\alpha x} P'(x) - \alpha e^{-\alpha x} P(x)\right]$

$R = P' - \alpha P$ est un polynôme

→ si $\alpha = 0$, $R = P'$ est à racines toutes réelles avec 4)

→ si $\alpha > 0$, $\deg R = \deg P = n$.

On note $x_1 < \cdots < x_k$ les racines réelles distinctes de P

et pour $1 \leq i \leq k$, $\alpha_i = \text{mult}(x_i, P)$.

Alors $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$.

On pose $g(x) = e^{-\alpha x} P(x)$. On a $g(x_1) = \cdots = g(x_k) = 0$

donc avec Rolle, pour $1 \leq i \leq k$, $\exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $g'(y_i) = 0$

et alors $R(y_i) = 0$. De plus, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ $\left(g(x) = \sum_{k \geq 0}^{n} a_k \dfrac{x^k}{e^{\alpha x}}\right)$

Dès lors, si $\forall x > x_k$, $g'(x) \neq 0$, alors par continuité de g',

On a $\forall x > x_k$, $g'(x) > 0$ ou $\forall x > x_k$, $g'(x) < 0$.

g serait alors strictement monotone sur $[x_k, +\infty[$, ce qui

est exclu si $g(x_k) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Donc $\exists y_k > x_k$, $g''(y_k)=0$ et $R(y_k)=0$

On a ainsi $y_1, - y_k$, valeurs d'annulation distinctes de R, différentes des x_i.

Enfin, si $\alpha_i = \text{mult}(x_i, P)$, $\text{mult}(x_i, P') = \alpha_i - 1$ et comme $R = P' - \alpha P$, $\text{mult}(x_i, R) \geq \alpha_i - 1$

(si $P = (X-x_i)^{\alpha_i} S$, $P' = \alpha_i (X-x_i)^{\alpha_i - 1} S + (X-x_i)^{\alpha_i} S'$

donc $(X-x_i)^{\alpha_i - 1} / R$)

Finalement, on a trouvé $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 1) + k = n$ racines réelles de R (au moins) donc $\boxed{R \text{ est à racines toutes réelles}}$

$\to$ à $\alpha < 0$, on procède de même, avec $g(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et une racine $y_n \in]-\infty, x_1[$.

8) Q est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ et toutes ses racines réelles, donc

Q est scindé dans $\mathbb{R}[X]$: $\exists x_1, --, x_n \in \mathbb{R}$, $Q = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$

Alors $Q(D) = \lambda (D - x_1 Id_E) \circ (D - x_2 Id_E) \circ \cdots \circ (D - x_n Id_E)$.

On $Q(D)(P(X)) = \lambda (D - x_1 Id_E) \circ \cdots \circ (D - x_{n-1} Id_E) (\underbrace{P' - x_n P}_{S})$

On $S(x) = e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ avec 7)

et S est à racines toutes réelles. Puis $(D - x_{n-1} Id)(S) = S' - x_{n-1} S$

est à racines toutes réelles et par récurrence,

$Q(D)(P(X))$ est à racines toutes réelles

9) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Alors par théorème spectral, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Or les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique et χ_A est à racines toutes réelles

10) On diagonalise A dans une base orthonormée : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists D$ diagonale telles que $A = PDP^T$

avec $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, où $\forall k \in [\![1, n]\!], d_k \geq 0$

(les valeurs propres de A sont $d_1, \dots, d_n$).

$\boxed{\text{On pose } C = P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^T. \text{ Alors } C^2 = A}$ car $P^T P = I_n$ ($P \in O_n(\mathbb{R})$).

11) question difficile

Soit avec 10) $C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$.

On suppose $B \in S_n(\mathbb{R})$ et soit λ valeur propre de AB.