5-Réduction

Objectif :

- Pour un endomorphisme, trouver une base dans laquelle la matrice est la plus simple possible (diagonale, voire triangulaire)
- Pour une matrice, trouver une matrice la plus simple possible (diagonale, voire triangulaire), à laquelle elle est semblable.
- On aimerait ainsi trouver des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = \lambda u$, avec $\lambda \in K$.

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ comme d'habitude.
E est un K-espace vectoriel.

La théorie spectrale constitue la base mathématique de la mécanique quantique. Les vecteurs propres trouvent donc d'innombrables applications dans ce domaine. Par exemple en chimie, l'étude de l'atome d'hydrogène montre que les états stables des électrons sont modélisés par des vecteurs propres dont les valeurs propres correspondent à des états d'énergie.

Les solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps sont des vecteurs propres. Les théories physiques de la fin du XX^e siècle comme les supercordes utilisent largement les notions de spectre dans des cadres mathématiques avancés, par exemple les géométries non commutatives. Les sciences de l'ingénieur ne sont pas en reste, même si elles se cantonnent en général à une approche de dimension finie. Elles utilisent quantité d'algorithmes issus des calculs de valeurs propres et vecteurs propres. Cette approche permet de résoudre de multiples problèmes tirés par exemple de la mécanique statique ou dynamique, des systèmes électriques et même dans d'autres secteurs comme l'économie.

Un exemple d'application est celui de la corde vibrante, par exemple celle d'une guitare. Chaque point de la corde oscille autour de sa position au repos. Pour chaque point de la corde, son mouvement peut être considéré comme une dimension d'un espace vectoriel ; l'espace vectoriel ainsi obtenu regroupe les mouvements de tous les points de la corde, il est de dimension infinie. À partir d'une position initiale obtenue par le doigt du guitariste, le mouvement de la corde suit une équation aux dérivées partielles et qui est linéaire. Les vecteurs propres sont dans ce cas des vibrations qui laissent quelques points fixes, on les appelle des ondes stationnaires.

Exemple : on s'intéresse aux solutions de $\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 5y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = 2x_n + 2y_n \end{cases}$

Si on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $U_{n+1} = AU_n$.

Ce serait mieux si A était diagonale pour résoudre. Cela permettrait de « découpler les variables ».

A) Valeurs propres, vecteurs propres.

1) Valeurs propres d'un endomorphisme :

Définition : Une droite vectorielle de E est un sous-espace vectoriel D de E tel que $\dim(D)=1$.
En particulier, si $x \in D$ et $x \neq 0_E$, alors (x) est une base de D et $D = Vect(x)$.

Rappel : soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f \in L(E)$. F est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.
L'endomorphisme induit par f sur F est alors $f_F : \begin{matrix} F \to F \\ x \to f(x) \end{matrix}$. On a ainsi $f_F \in L(F)$

Propriété : soit $f \in L(E)$. Soit $D = Vect(x)$ une droite vectorielle, avec $x \neq 0_E$. Alors D est stable par f si et seulement si $\exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x$.

Définition (*) : soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in K$. Alors λ est **valeur propre** de f si seulement si il existe $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Tout vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et noté $Sp(f)$.

Propriété (*) : soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in K$. Alors λ est valeur propre de f si et seulement si $\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ (ou encore $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective).

Définition (*) : soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in K$, une valeur propre de f. Alors **le sous-espace propre** associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f)$

Exemples :

- soit $\Phi : \begin{matrix} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \to f' \end{matrix}$. Alors $Sp(f) = \mathbb{R}$
- soit $\Psi : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \to P' \end{matrix}$. Alors $Sp(f) = \{0\}$.
- si $f = \lambda Id_E$, alors $Sp(f) = \{\lambda\}$

Rappel : soit $u, v \in L(E)$. Soit $\lambda \in K$. On suppose $u \circ v = v \circ u$. Alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Remarques : soit $f \in L(E)$

- 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective. Alors $E_0(f) = \ker(f)$
- Si $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2) <u>Valeurs propres d'une matrice carrée :</u>

Définition (*) : soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors λ est **valeur propre** de A si seulement si il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.
Tout vecteur $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A et noté $Sp(A)$.

Propriété (*) : soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible (ou encore $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$).

Définition : soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in K$, une valeur propre de A. Alors **le sous-espace propre** associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$.

Exemples :

- Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Soit a la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dans le plan, définie dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$ par $a(e_1) = e_2$ et $a(e_2) = -e_1$. Donner la matrice A de a dans B. Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

Propriété (*) : soit $A \in M_n(K)$, une matrice triangulaire. Alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A.

Preuve : c'est clair.

Remarque : c'est faux en général si A n'est pas triangulaire en prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) <u>Polynôme caractéristique</u>

Définition (*) : soit $A \in M_n(K)$. Le polynôme caractéristique de A est χ_A défini par $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

Propriété : soit $A, B \in M_n(K)$. Alors $\det(xB - A)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Preuve : par récurrence sur la taille de la matrice.

Proposition (*) : Soit $A \in M_n(K)$. Alors χ_A est un polynôme unitaire, de degré n, tel que $\chi_A = X^n - Tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$

Preuve : à faire. On procède par récurrence et on développe par rapport à la dernière ligne et on constate qu'on a $(X-A_{nn})\left(X^{n-1}-\left(\sum_{k=1}^{n-1}A_{kk}\right)X^{n-1}+...+c\right)+R$, où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-2)$ en utilisant la propriété précédente.

Proposition (*) : soit $A\in M_n(K)$. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. A possède donc au maximum n valeurs propres distinctes dans K.

Définition (*) : soit $A\in M_n(K)$ et soit $\lambda\in Sp(A)$. La multiplicité de λ comme valeur propre de A est la multiplicité de λ comme racine de χ_A. On la note $mult(\lambda)$.

Exemple : soit $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Calculer χ_A, déterminer $Sp(A)$ et les multiplicités des valeurs propres de A.

Propriété : soit $A,B\in M_n(K)$. On suppose que A et B sont semblables.
Alors elles ont même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Preuve : comme A et B sont semblables. λI_n-A et λI_n-B le sont aussi et deux matrices semblables ont même déterminant.

Définition : soit $u\in L(E)$, B une base de E. Soit $A=M_B(u)$. Le polynôme caractéristique de u est χ_u défini par $\chi_u(\lambda)=\det\left(\lambda Id_E-u\right)=\det\left(\lambda I_n-A\right)=\chi_A(\lambda)$.
Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u. Ce sont aussi celles de A.

Proposition (*) : soit $A\in M_n(K)$ et soit $\alpha\in Sp(A)$. Alors $1\leq\dim\left(E_\alpha(A)\right)\leq mult(\alpha)$. En particulier, si $mult(\alpha)=1$, alors $\dim\left(E_\alpha(A)\right)=mult(\alpha)=1$.

Preuve : on se place dans une base adaptée à $E_\alpha(A)$. La matrice de u est égale à $\begin{pmatrix}\alpha I_r & C\\ 0 & D\end{pmatrix}$ et on utilise le déterminant par blocs.

Remarque : si A est triangulaire, la multiplicité d'une valeur propre est égale au nombre de fois où elle apparaît sur la diagonale.

Méthode (*) : pour trouver les valeurs propres de $u\in L(E)$ et les sous-espaces propres associés, on peut :

- Utiliser le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base (à privilégier en dimension 2 et 3).

- Chercher les $\lambda \in K$ tels qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ (on peut procéder par équivalence ou si nécessaire par analyse et synthèse).

Remarque : soit $A \in M_n(K)$. Pour déterminer la dimension de $E_\lambda(A) = \ker\left(A - \lambda I_n\right)$, il suffit de trouver $rg\left(A - \lambda I_n\right)$ et d'utiliser le théorème du rang.

Exemples :

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres et la multiplicité des valeurs propres associées.

- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ pour $n \geq 3$. Trouver les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de B .On trouve $Sp(B) = \left\{0, 1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}\right\}$.

- Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \to X P' \end{matrix}$. Déterminer ses éléments propres (avec un équivalent en $+\infty$ pour justifier que si $P(x) = Ax^\lambda$, avec $A \neq 0$, P est un polynôme si et seulement si $\lambda \in \mathbb{N}$).

Définition : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in M_n(\mathbb{C})$ et le spectre complexe de A est l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

Exemple : on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver son spectre réel et son spectre complexe.

B) <u>Réduction en dimension finie.</u>

Dans la suite, E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L(E)$.

1) <u>Diagonalisation</u>

Définition (*) : f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Remarques : si on note $B = (e_1, ..., e_n)$ cette base, on a pour $1 \leq i \leq n$ $f(e_i) = \lambda_i e_i$, donc $e_1, ..., e_n$ sont des vecteurs propres de f. Diagonaliser f revient donc à trouver une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Définition (*) : soit $A \in M_n(K)$. Alors A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Propriété (*) : soit B une base de E et $A = M_B(f)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si A diagonalisable.

Preuve : à faire. Si $A = PDP^{-1}$, on définit la base C telle que $P = P_{B,C}$

Remarque : on peut donc étudier le caractère diagonalisable sur un endomorphisme ou sur la matrice de cet endomorphisme dans une base.

Rappels :

- On note $Sp(f) = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p\right\}$ et on pose pour $1 \le i \le k$: $E_{\lambda_k}(f) = \ker\left(f - \lambda_k Id_E\right)$. Alors la somme des $E_{\lambda_k}(f)$ est directe.
- soit $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$, et que pour $1 \le i \le p$, B_i est une base de F_i. On note B la famille de vecteurs obtenue en juxtaposant les vecteurs des bases $B_1, B_2, ..., B_p$. Alors B est une base de E.
- Si $F_1, F_2, ..., F_p$ sont en somme directe, alors $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(F_i\right)$.

Propriété : toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Preuve : à faire.

Proposition (*,PV) : les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$. On sait déjà que la somme des sous-espaces propres est directe. Soit $B = (e_1, .., e_n)$ une base de vecteurs propres. Alors pour $1 \le i \le n, e_i \in \left(E_\lambda(f)\right) \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$, donc par CL,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f).$$

$2 \Rightarrow 1$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f et pour $1 \le k \le p$, soit B_k une base de $E_{\lambda_k}(f)$. Alors comme $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$, la famille B obtenue en juxtaposant les vecteurs des bases $B_1, B_2, ..., B_p$ est une base B de E. Dans cette base, la matrice de f est diagonale.

Propriété : Soit $A \in M_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est diagonalisable.
- $K^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$

Preuve : non faite. Avec l'endomorphisme canoniquement associé et $E_\lambda(A) = E_\lambda(a)$

Proposition (*) : les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = \dim(E)$

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$. On a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$, d'où l'égalité des dimensions.

$2 \Rightarrow 1$. Clair. L'égalité des dimensions donne celle des ensembles.

Proposition (*) : soit $A \in M_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est diagonalisable.
- $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = n$

Preuve : non faite.

Rappel : soit $P \in K[X]$. On suppose $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. On note $x_1,..,x_k$ les racines de P, deux à deux distinctes, de multiplicités respectives égales à $\alpha_1,...,\alpha_k$. Alors :

- La somme des multiplicités des racines de P est inférieure ou égale à n (P ne peut pas avoir plus de racines que son degré, donc $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq n$).
- Si on trouve n racines distinctes de P, alors ce sont les seules et elles sont toutes simples.
- P est scindé si et seulement si P possède n racines réelles comptées avec leur multiplicité ($\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$)

Proposition (*, PV) : soit $A \in M_n(K)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est diagonalisable.
- χ_A est scindé sur K et pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(A)$, $mult(\lambda) = \dim\left(E_\lambda(A)\right)$.

Preuve :

$\Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = n$ et si $\alpha \in Sp(A)$. Alors $1 \leq \dim\left(E_\alpha(A)\right) \leq mult(\alpha)$, avec $\sum_{\lambda \in Sp(A)} mult(\lambda) \leq n$, donc $\sum_{\lambda \in Sp(A)} mult(\lambda) = n$ et χ_A est scindé sur K.

$\Leftarrow \sum_{\lambda \in Sp(A)} mult(\lambda) = n$ et A est diagonalisable.

Corollaire : soit $f \in L(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- χ_f est scindé sur K et pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(f)$, $mult(f) = \dim\left(E_\lambda(f)\right)$.

Remarques :

- si $A \in M_n(K)$ est diagonalisable, et si on note $Sp(A) = \{\lambda_1, .., \lambda_k\}$, où $\lambda_1, .., \lambda_k$ sont deux à deux distinctes. Pour $1 \le i \le k$, on note α_i la multiplicité de λ_i. On a donc $\alpha_1 + .. + \alpha_k = n$. A est alors semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_{\alpha_k} \end{pmatrix}$, en se plaçant dans la B obtenue en juxtaposant les vecteurs des bases des sous-espaces propres.
- soit $A \in M_n(K)$. On a toujours $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \le \sum_{\lambda \in Sp(A)} mult(\lambda) \le n$. Si on trouve des valeurs propres $\lambda_1, .., \lambda_k$ de A, deux à deux distinctes, telles que $\sum_{i=1}^{k} \dim\left(E_{\lambda_k}(A)\right) \ge n$, alors ce sont les seules valeurs propres de A et A est diagonalisable.

Proposition (*) : soit $A \in M_n(K)$. On suppose que A admet une unique valeur propre $\lambda \in K$. Alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.

Proposition (*) : soit $A \in M_n(K)$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes. Alors A est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Corollaire : soit $f \in L(E)$. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes. Alors f est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Exemples : ces matrices sont-elles diagonalisables ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : si A est diagonalisable, il existe D diagonale et $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. On a alors $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Exemple (*) : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.
2) Trouver D diagonale et $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
3) Calculer A^n en fonction de P, P^{-1}.

On trouve $Sp(A) = \{1,2\}$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base de $\ker(A - 2I_3)$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ base de $\ker(A - I_3)$.

D'où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a ensuite On a $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

2) Polynômes annulateurs

Soit E un K espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappels : soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K[X]$. Soient $u, v \in L(E)$ et $A, B \in M_n(K)$.

- On définit $P(u) \in L(E)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u \circ u + ... + a_p u^p$.
- $P\,Q(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$
- P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0_{L(E)}$.
- On définit $P(A) \in M_n(K)$ par $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$.
- P est un polynôme annulateur de A si et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle.

Propriété : soit $P \in K[X]$. Soit $f \in L(E)$. On suppose que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors $P(f)(x) = P(\lambda)(x)$.

Propriété (*,PV) : soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in K[X]$. Soit $f \in L(E)$. On suppose que P est un polynôme annulateur de f. Si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.

Preuve : facile avec un vecteur propre. Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors $P(f)(x) = P(\lambda)(x) = 0_E$

Remarque : les valeurs propres de $f \in L(E)$ font ainsi partie de l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f. La réciproque est fausse en général.
On prend $P = X(2-X) = 2X - X^2$ et $u = 0_{L(E)}$.

Théorème (Cayley-Hamilton, admis, *) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\dim(E) = n$. Soit $f \in L(E)$ et $A \in M_n(K)$. Alors $\chi_A(A) = (0)$ et $\chi_f(f) = 0_{L(E)}$. Le polynôme caractéristique est ainsi un polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Remarque : le polynôme caractéristique de $A \in M_n(K)$ est ainsi un polynôme annulateur dont les racines sont exactement les valeurs propres de A.

Proposition (*) : On suppose $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- f possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Preuve : non exigible et non faite.
Pour le sens $\Rightarrow$, on prend $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ qui annule u sur une base de vecteurs propres donc partout.
Pour le sens $\Leftarrow$, on prouve que si $P = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f, alors $\bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i Id_E) = E$ en partant de $x = x_1 + \ldots + x_k$, puis avec $P_1 = \prod_{i=2}^{k} \frac{(X-\lambda_i)}{(\lambda_1 - \lambda_i)}$, $P_1(f)(x) = x_1$ et ils conviennent car on a bien $f(x_1) = \lambda_1 x_1$ par exemple
Si un des $\ker(f - \lambda_i Id_E)$ est réduit à 0_E, on peut ensuite l'enlever de la somme.

Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$. A est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples.

Exemples fondamentaux (*) :

- Soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors p est diagonalisable. Si $p \neq Id_E$ et $p \neq 0_{L(E)}$, alors $Sp(p) = \{0,1\}$ et $E_0(p) = \ker(p)$ et $E_1(p) = \ker(p - Id_E) = \mathrm{Im}(p)$.
- Soit $s \in L(E)$ une symétrie. Alors s est diagonalisable. On suppose $s \neq Id_E$ et $s \neq -Id_E$. Alors $Sp(s) = \{-1,1\}$ et $E_{-1}(s) = \ker(s + Id_E)$ et $E_1(s) = \ker(s - Id_E)$.

Corollaire (*) : On suppose $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

Preuve : le sens $\Leftarrow$ est clair. Dans l'autre sens, $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ annule u sur une base de vecteurs propres donc partout.

Proposition (*) : On suppose $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$, diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel de E non nul, stable par f. Alors f_F est diagonalisable.

Preuve : f possède un polynôme annulateur scindé à racines simples qui annule aussi f_F.

3) Trigonalisation :

Définition (*) : Soit $f \in L(E)$. Alors f est trigonalisable si et seulement il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

Définition (*) : soit $A \in M_n(K)$. Alors A est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque : soit B une base de E et $A = M_B(f)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si A trigonalisable.

Proposition admise :

- Soit $u \in L(E)$. Alors u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur K.
- Soit $A \in M_n(K)$. Alors A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur K.

Preuve : on prend une valeur propre et on écrit la matrice dans une base adaptée, puis on procède par récurrence.

Proposition (*) : on suppose que $K = \mathbb{C}$, donc que E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

- Soit $u \in L(E)$. Alors u est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ (et admet au moins une valeur propre complexe).
- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable (et $Sp(A) \neq \varnothing$).

Preuve : avec le théorème de d'Alembert Gauss, tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve $\chi_A = (X-1)^2$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : si $A \in M_n(\mathbb{R})$. A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Propriété : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in Sp(A)$. On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$ de A. Alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A de multiplicité p.

Propriété (*) : soit $A \in M_n(K)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose A trigonalisable (c'est notamment le cas si $K = \mathbb{C}$). Soient $x_1,..,x_p \in K$, les valeurs propres complexes de A, deux à deux distinctes, de multiplicités respectives égales à $\alpha_1,...,\alpha_k$.

Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = Tr(A)$ et $\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} = \det(A)$

Remarque : la somme des valeurs propres complexes comptées avec leur multiplicité d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est donc égale à sa trace, et leur produit à son déterminant.
Si on a toutes les valeurs propres d'une matrice sauf une, on trouve la dernière avec la trace.

Exemples :

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Trouver sans calcul les valeurs propres de A.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que $Tr(A) \leq 0$.
  Les valeurs propres sont parmi $i, -i, -1$.
  $\chi_A = (X-i)^b (X+i)^b (X+1)^{n-2b}$ et $Tr(A) = -(n-2b) \leq 0$

Etude : matrices nilpotentes. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.

1) Déterminer les valeurs propres de M.
2) Quelles sont les matrices nilpotentes qui sont diagonalisables ?
3) Justifier que $M^n = 0$.

4) Point méthode et étude des matrices de rang 1

Méthode (*)

- Trouver les éléments propres d'une matrice $A \in M_n(K)$ ou d'un endomorphisme u (valeurs propres et éventuellement les vecteurs propres associés) :
  - Utiliser le polynôme caractéristique (à privilégier en dimension 2 et 3). Si on veut les vecteurs propres associés, trouver une base de chaque $E_\lambda(A)$ à l'aide de $rg(A - \lambda I_n)$ ou en résolvant $AX = \lambda X$
  - Chercher les $\lambda \in K$ tels qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ (ou $AX = \lambda X$)
  - Si on a toutes les valeurs propres de A (comptées avec leur multiplicité) sauf une, on trouve la dernière avec la trace.
- Etudier si A est diagonalisable :
  - Si elle annule un polynôme scindé à racines simples, elle est diagonalisable.
  - On peut utiliser les dimensions des sous-espaces propres (somme, comparaison avec la multiplicité pour chaque valeur propre).
  - Si A admet une unique valeur propre $\lambda \in K$ et $A \neq \lambda I_n$, alors A n'est pas diagonalisable.

- Si A possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ ou $A \in M_n(\mathbb{C})$, elle possède toujours au moins une valeur propre complexe et on peut la trigonaliser dans $\mathbb{C}$.

Exemple : Matrices de rang 1. soit $A \in M_n(\mathbb{R})$,avec $n \geq 2$. On suppose $rg(A) = 1$. Que peut-on dire de A ?

- 0 est valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n-1$.
- $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
- A est diagonalisable si et seulement si elle possède une autre valeur propre non nulle, c'est-à-dire si et seulement si $Tr(A) \neq 0$. L'autre valeur propre est forcément $Tr(A)$
- Si $Tr(A) \neq 0$, A est semblable à $\begin{pmatrix} Tr(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Sinon, à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
- On peut écrire que $A = U^T V$, avec $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

1) Eléments propres de $A = (1) \in M_n(\mathbb{R})$.
2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Nilpotente ?

C) Compléments hors programme :

Polynôme minimal :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les valeurs propres de u sont $\lambda_1,...,\lambda_d$, de multiplicités respectives $\alpha_1,...,\alpha_d$.

Le polynôme minimal est $\pi = \prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)$.

Proposition : L'ensemble des polynômes annulateurs de u est constitué des multiples du polynôme minimal. Autrement dit, si $P \in K[X]$, alors $P(u) = 0_{L(E)} \Leftrightarrow \exists Q \in K[X], P = Q\pi$.

Preuve : les racines de π sont forcément racines de P.

Proposition : Si on note $K[u] = \{P(u), P \in K[X]\}$, alors $K[u] = K_{d-1}[u]$.

Preuve : par double inclusion, avec la division euclidienne de $P \in K[X]$ par π.

Réduction simultanée :

Proposition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in L(E)$ diagonalisables.
Si $f \circ g = g \circ f$, alors il existe une base de vecteurs propres commune à f et à g.

Preuve : on part de $E = \underset{\lambda \in Sp(f)}{\oplus} E_\lambda(f)$ et on sait que les $E_\lambda(f)$ sont stables par g. Comme g est diagonalisable, $g_{E_\lambda(f)}$ l'est aussi et on considère une base B_λ dans laquelle la matrice de $g_{E_\lambda(f)}$ est diagonale. Dans cette base, la matrice de $f_{E_\lambda(f)}$ est λI_d, où $d = \dim\left(E_\lambda(f)\right)$.
On considère une base de E obtenue en concaténant les bases B_λ. Dans cette base, les matrices de f et g sont diagonales.

Sous-espaces stables :

Proposition : soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$. Soit $F \subset E$, stable par f. On note $g = f_F$ l'endomorphisme induit par f sur F. Alors χ_G / χ_F.

Preuve : on écrit la matrice de f dans une base adaptée à F et on utilise la formule du déterminant par blocs.

Proposition : lorsque f est diagonalisable, $F \subset E$ est stable par f si et seulement s'il est engendré par une famille finie de vecteurs propres de f.

Preuve : par double implication. Pour le sens direct, on utilise que $g = f_F$ est diagonalisable et qu'une base de vecteurs propres de g est aussi constituée de vecteurs propres de f. Le sens retour est rapide par stabilité par combinaisons linéaires.