# Programme de colles PCC :

La colle commence obligatoirement par une question de cours. Cela peut être au choix :

- Deux énoncés parmi ceux qui sont proposés sans démonstration (pour au moins un élève du groupe)
- Un énoncé avec sa démonstration (uniquement parmi ceux qui sont exigibles).

Ensuite, le colleur propose un ou plusieurs exercices de son choix.

# Du 13/10 au 18/10 (semaine 5)

## Les questions de cours :

**1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :**

- Définition de l'absolue convergence. Intégrabilité.
- Lien entre absolue convergence et convergence. Majoration de $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$.
- Cas d'une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $I$.
- Exemples de référence : intégrabilité de $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ en $0^+$ et en $+\infty$, de $t \to \ln(t)$ en $0^+$ et de $t \to e^{-at}$ en $+\infty$.
- Critères de convergence par comparaison : cas où $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, où $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$
- Vocabulaire des séries : convergence, somme, reste.
- Lien logique entre $\sum U_n$ converge et $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- Critère de majoration pour les séries à termes positifs.
- Pratique de la comparaison série-intégrale pour obtenir l'équivalent d'un reste ou d'une somme partielle.
- Séries de référence : séries géométriques, séries de Riemann, série exponentielle.
- Théorème spécial sur les séries alternées avec signe et majoration du reste en valeur absolue.
- Séries absolument convergentes. Lien avec la convergence.
- Produit de Cauchy.
- Critères pour étudier la nature d'une série : critères d'équivalence, de domination et de négligeabilité.
- Comparaison aux séries de Riemann avec l'utilisation pratique de $n^\alpha U_n$.
- Formule de Stirling.
- Règle de d'Alembert pour une série à termes strictement positifs.
- Lien suite-série.

**2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :**

- Etude de la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
- Etude de l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
- Développement asymptotique à la précision $o(1)$ de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

## Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur la convergence et le calcul des intégrales généralisées.
Tout exercice raisonnable sur les séries numériques (on commence les exercices lundi mais on a vu des exemples en cours).

# Du 03/11 au 07/11 (semaine 6)

## Les questions de cours :

**Reprise de la totalité du programme de la semaine précédente sur les séries.**

**<u>En plus :</u>**

1) **Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :**
   - Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice : Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre.
   - Valeurs propres d'une matrice triangulaire.
   - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice : degré, terme en $X^{n-1}$ et terme constant si $A \in M_n(K)$.
   - Lien entre racines du polynôme caractéristique et valeurs propres. Majoration du nombre de valeurs propres distinctes d'une matrice.
   - Multiplicité d'une valeur propre.
   - Polynôme caractéristique, spectre et multiplicité des valeurs propres de deux matrices semblables.
   - Encadrement de la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre $\lambda$ à l'aide de sa multiplicité.
   - Définition d'endomorphisme et de matrice diagonalisable. Lien entre les deux.
   - $f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de $E$. Enoncé analogue pour une matrice.

2) **Un des résultats suivants, avec la démonstration :**
   - Développement asymptotique à la précision $o(1)$ de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   - $f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $f$.

## Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur les séries numériques.

**Attention : il n'y aura pas de colle la semaine du 11 Novembre.**