

DM 3 : corrigé

Problème 1 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

On lui associe la suite (p_n) définie par $p_n = \prod_{k=1}^n a_k$.

On dit que le produit $\prod_{k \geq 1} a_k$ converge si et seulement si la suite (p_n) converge vers une limite finie **non nulle**.

Dans le contraire, on dit que $\prod_{k \geq 1} a_k$ diverge.

En cas de convergence de la suite (p_n) , sa limite est notée $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ et s'appelle valeur du produit $\prod_{k \geq 1} a_k$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $p_n = \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = \prod_{p=1}^n \left(\frac{p}{p+1}\right) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Donc $p_n = \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\prod_{p \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)$ diverge.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $p_n = \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \prod_{p=1}^n \left(\frac{p^2 + 2p}{(p+1)^2}\right) = \prod_{p=1}^n p \prod_{p=1}^n (2+p) \left(\prod_{p=1}^n \frac{1}{1+p}\right)^2$.

Donc $p_n = \frac{1}{2} \frac{n!(n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{2} \frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq 0$.

Donc $\prod_{p \geq 1} \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right)$ converge. De plus, $\prod_{p=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{1}{2}$

3) On suppose que $\prod_{k \geq 1} a_k$ converge. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \prod_{k=1}^n a_k$. Alors $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n$. Il vient alors

$p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c \in \mathbb{R}^*$, donc $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{c} = 1$ et $\boxed{a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$.

La réciproque est fausse : on prend $a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et pourtant avec 1), $\prod_{p \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)$ diverge.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right) = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \prod_{k=1}^n (2k-1) \prod_{k=1}^n (2k+1)$.

Or $\prod_{k=1}^n (2k-1) = 1 * 3 * \dots * (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $\prod_{k=1}^n (2k+1) = 3 * \dots * (2n-1) * (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ en multipliant

dans chacun de ces deux cas en haut et en bas par les termes pairs.

Donc $\boxed{p_n = \frac{1}{2^{4n} (n!)^4} (2n+1) ((2n)!)^2}$

La formule de Stirling donne $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$, et ainsi $(2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}$

$$\text{Donc } p_n = \frac{1}{2^{4n} (n!)^4} (2n+1) ((2n)!)^2 = \frac{(2n+1)(4n\pi)}{(2n\pi)^2} \sim \frac{8n^2\pi}{4n^2\pi^2}.$$

$$\text{Donc } (p_n) \text{ converge et } \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

5) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs

a) On procède par double implication. On suppose que le produit $\prod_{k=1}^N a_k$ est convergent. Soit $N \geq 1$. Alors

$$\sum_{k=1}^N \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^N a_k\right), \text{ avec } \prod_{k=1}^N a_k \geq 0. \text{ On sait que le produit est convergent, et en passant les}$$

$$\text{inégalités à la limite, } \prod_{k=1}^{+\infty} a_k \geq 0. \text{ De plus, par définition, } \prod_{k=1}^{+\infty} a_k \neq 0, \text{ donc } \prod_{k=1}^{+\infty} a_k > 0$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^N \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^N a_k\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{+\infty} a_k\right), \text{ donc } \sum \ln(a_k) \text{ converge.}$$

$$\text{Réciproquement, si } \sum \ln(a_k) \text{ converge, alors } \prod_{k=1}^N a_k = \exp\left(\sum_{k=1}^N \ln(a_k)\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(a_k)\right). \text{ Donc}$$

$$\prod_{k=1}^N a_k \text{ est convergent et on a bien } \prod_{k=1}^N a_k \text{ est convergent si et seulement si la série } \sum \ln(a_k) \text{ converge.}$$

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a bien $a_p = \sqrt[p]{p} = p^{1/p} > 0$. Alors $\ln(a_p) = \frac{1}{p} \ln(p)$.

$$\text{Pour } p \geq 3, \frac{1}{p} \ln(p) \geq \frac{1}{p} \geq 0, \text{ et comme } \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \text{ diverge, } \sum_{p \geq 1} \ln(a_p) \text{ diverge.}$$

$$\text{Donc avec 5a), } \prod_{p \geq 1} \sqrt[p]{p} \text{ diverge.}$$

6) On considère une suite (U_n) de réels strictement supérieurs à -1 .

a) On procède par double implication.

$$\text{On suppose (P1). Alors le produit infini } \prod_{n \geq 1} (1 + U_n) \text{ converge.}$$

$$\text{On en déduit avec 5a) que } \sum \ln(1 + U_n) \text{ converge.}$$

$$\text{En particulier, } \ln(1 + U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } 1 + U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Donc } \ln(1 + U_n) \sim U_n. \text{ Comme } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0, \text{ on en déduit que la série } \sum_{n \geq 1} U_n \text{ converge et (P2)}$$

est vérifiée.

$$\text{On suppose (P2). Alors } \sum_{n \geq 1} U_n \text{ converge, donc } U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \ln(1 + U_n) \sim U_n. \text{ Comme}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0, \sum \ln(1 + U_n) \text{ converge et } \prod_{n \geq 1} (1 + U_n) \text{ converge.}$$

$$\text{On a bien } (P1) \text{ et } (P2) \text{ équivalentes si } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$$

- b) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$. On sait déjà que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge. De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée, et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est décroissante et tend vers 0. Donc avec le théorème spécial sur les séries alternées,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} U_n \text{ diverge.}}$$

De plus, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} > 0$ (en effet $1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq 0$). On sait avec 5a) que

$$\prod_{n \geq 1} a_n \text{ est convergent si et seulement si la série } \sum \ln(a_n) \text{ converge.}$$

$$\text{On étudie donc } V_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \right).$$

$$\text{On sait que } \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3).$$

$$\text{Ici, } u = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}, \quad u^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad u^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

$$\text{Donc } V_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge, et comme } \frac{3}{2} > 1, \sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ est absolument convergente, donc convergente.}$$

$$\text{Donc } \sum \ln(1+U_n) \text{ converge et } \boxed{\prod_{n \geq 1} (1+U_n) \text{ converge.}}$$

Le résultat du 5a) devient faux si on ne suppose plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$.

- 7) On suppose dans cette question que la série $\sum U_n$ converge.

- a) On procède par double implication.

$$\text{On suppose que } \prod_{n \geq 1} (1+U_n) \text{ converge.}$$

$$\text{On en déduit avec 5a) que } \sum \ln(1+U_n) \text{ converge.}$$

$$\text{En particulier, } \ln(1+U_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, \text{ donc } 1+U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \text{ et } U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

$$\text{Donc } \ln(1+U_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} U_n - \frac{1}{2}(U_n)^2 + o((U_n)^2). \text{ On note } W_n = \ln(1+U_n) - U_n = -\frac{1}{2}(U_n)^2 + o((U_n)^2).$$

$$\text{Alors } \sum \ln(1+U_n) \text{ converge et } \sum U_n \text{ converge, donc } \sum W_n \text{ converge aussi.}$$

$$\text{Or } W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}(U_n)^2, \text{ et } \left(-\frac{1}{2}(U_n)^2 \right) \text{ est de signe fixe. Donc } \sum U_n^2 \text{ converge.}$$

$$\text{Réciproquement, si } \sum U_n^2 \text{ converge, alors } \sum W_n \text{ converge. Comme } \sum U_n \text{ converge, } U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \text{ et}$$

$$\ln(1+U_n) = U_n + W_n, \text{ donc } \sum \ln(1+U_n) \text{ converge et } \prod_{n \geq 1} (1+U_n) \text{ converge.}$$

Ainsi, le produit $\prod_{n \geq 1} (1 + U_n)$ converge si et seulement si la série $\sum U_n^2$ converge.

On suppose ici que $\sum U_n^2$ diverge. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\sum W_n$ diverge, et comme $W_n \sim -\frac{1}{2}(U_n)^2$, on a $W_n \leq 0$ à partir d'un certain rang N . Pour

$n \geq N$, la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n W_k$ est décroissante et diverge. Donc $S_n = \sum_{k=1}^n W_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc $\ln \left(\prod_{k=1}^n (1 + U_k) \right) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + U_k) = \sum_{k=1}^n U_k + \sum_{k=1}^n W_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + U_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

b) On suppose que la série $\sum U_n$ est absolument convergente. Alors $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $U_n^2 = o(|U_n|)$.

Or $(|U_n|)$ est de signe fixe et $\sum |U_n|$ converge, donc $\sum U_n^2$ converge.

Avec 7a), $\prod_{n \geq 1} (1 + U_n)$ converge.

c) On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \geq -\frac{1}{2} > -1$.

Avec le théorème spécial sur les séries alternées, $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge.

Pourtant, $(U_n)^2 = \frac{1}{4n}$ et $\sum U_n^2$ diverge, donc avec 7a), $\prod_{n \geq 1} (1 + U_n)$ diverge.

Finalement, si on ne suppose pas $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$, on n'a ni $(P1) \Rightarrow (P2)$, ni $(P2) \Rightarrow (P1)$

Problème 2 (BECEAS 21) : pour toute suite réelle (U_n) , on notera $\sum_{n \geq 0} U_n$ la série de terme général U_n

et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ la somme de cette série lorsqu'elle converge.

Partie A : Exemples de calcul explicite de reste.

1) On suppose que $\sum_{n \geq 0} U_n$ est convergente. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

Alors, lorsque n tend vers l'infini, $\sum_{k=0}^{n-1} U_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ par définition de la convergence d'une série.

Donc $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2) x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

a) On utilise la règle de d'Alembert en posant $V_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0$. Alors $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\text{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ est convergente.}$

De plus, on sait que pour tout réel t , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$.

$$\text{Dès lors, } ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (1 + (-1)^n)}{n!} = 2 \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

On a donc bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = ch(x)$

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on prouve $P(n): " \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} sh(t) dt "$.

• Pour $n=1$, on calcule $\int_0^x sh(t) dt = ch(x) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, donc $P(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$.

$$\text{On sait que } \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} sh(t) dt.$$

On effectue deux intégrations par parties successives (les fonctions concernées sont de classe C^∞).

$$\text{On note } \begin{cases} a'(t) = \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \\ b(t) = sh(t) \end{cases} \text{ et on prend } \begin{cases} a(t) = -\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ b'(t) = ch(t) \end{cases}.$$

$$\text{Alors } \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} sh(t) dt = 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} ch(t) dt.$$

$$\text{Puis } \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} sh(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} ch(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} sh(t) dt = \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} sh(t) dt.$$

$$\text{On a donc bien } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} sh(t) dt \text{ et } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

3)

a) On sait que $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$.

Or $\left(\frac{2}{n^3}\right)$ est de signe fixe, $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^3}$ converge d'après Riemann, donc $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente.

b) On cherche P, Q sous la forme $P(X) = X^2 + bX + c$ et $Q(X) = X^2 + dX + e$.

$$\text{Alors } P(X)Q(X) = (X^2 + bX + c)(X^2 + dX + e) = X^4 + (b+d)X^3 + (c+e+bd)X^2 + (be+cd)X + ce.$$

$$\text{On veut donc } \begin{cases} b-d=2 \\ b+d=0 \end{cases}, \text{ soit } b=-d=1, \text{ puis } \begin{cases} c+e-1=1 \\ e=c \end{cases}, \text{ soit } e=c=1.$$

On prend ainsi $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 - X + 1$. Réciproquement, ils conviennent.

c) On fixe $y \in \mathbb{R}_+$.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) - \arctan(x) + \arctan(y)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = \frac{1+xy-y(x-y)}{(1+xy)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{1+y^2}{(1+xy)^2 + (x-y)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2) + y^2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0$.

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(y) = 0$, donc f est constante, nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y)$.

d) On reprend 3b) pour $n \in \mathbb{N} : a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}\right) = \arctan\left(\frac{P(n) - Q(n)}{1 + P(n)Q(n)}\right)$.

Donc avec 3c), $a_n = \arctan(P(n)) - \arctan(Q(n))$.

Or $Q(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1 = P(n)$ et $a_n = \arctan(Q(n+1)) - \arctan(Q(n))$

Donc pour $N \geq n$, $\sum_{k=n}^N a_k = \sum_{k=n}^N (\arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k))) = \arctan(Q(N+1)) - \arctan(Q(n))$.

Donc en passant à la limite quand N tend vers l'infini : $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1)$

e) On sait que si $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \arctan\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Or $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est de signe fixe, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann, donc $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right)$ est convergente

Partie B : Exemples d'évaluation asymptotique du reste

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas.

- Si $x > 1$. Alors soit $y \in]1, x[$. Il vient $n^y \frac{\ln(n)}{n^x} = \frac{\ln(n)}{n^{x-y}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\frac{\ln(n)}{n^x} = o\left(\frac{1}{n^y}\right)$. Or $\left(\frac{1}{n^y}\right)$ est de signe fixe, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^y}$ converge car $y > 1$.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^x}$ est convergente.

- Si $x \leq 1$, alors pour $n \geq 3$, $\frac{\ln(n)}{n^x} \geq \frac{1}{n^x} \geq 0$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^y}$ diverge, $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^x}$ est divergente.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^x}$ est convergente si et seulement si, $x > 1$.

2)

a) Soit $x > 1$. On veut calculer $\int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt$. On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t^{-x} \end{cases}$, avec $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{1-x}}{1-x} \end{cases}$.

On constate que $u(t)v(t) = \frac{1}{1-x} \frac{\ln(t)}{t^{x-1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (et que $u(t)v(t) = \frac{1}{1-x} \frac{\ln(t)}{t^{x-1}} \xrightarrow{t \rightarrow a} \frac{1}{1-x} \frac{\ln(a)}{a^{x-1}}$

Donc par intégration par parties : $\int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \frac{\ln(a)}{a^{x-1}} + \frac{1}{x-1} \int_a^{+\infty} t^{-x} dt$.

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \frac{\ln(a)}{a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2} \frac{1}{a^{x-1}}$. On a donc bien $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{a^{1-x} (1 + (x-1) \ln a)}{(x-1)^2}}$

b) On effectue une comparaison série-intégrale. On pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$ pour $t \in [3, +\infty[$.

Alors $f'(t) = \frac{\frac{1}{t}(t^x) - xt^{x-1} \ln(t)}{t^{2x}} = \frac{1}{t^{x+1}} (1 - x \ln(t)) \leq 0$ car $x \ln(t) \geq x \ln(e) \geq 1$.

Donc f est décroissante sur $[3, +\infty[$.

On fixe $N \geq 4$. Pour $4 \leq n \leq N$, il vient pour $k \in \llbracket n, N \rrbracket$: $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$.

Donc en sommant $\int_n^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^N f(k) \leq \int_{n-1}^N f(t) dt$ (1).

Or f est continue sur $[3, +\infty[$ et si $y \in]1, x[$, $t^y \frac{\ln(t)}{t^x} = \frac{\ln(t)}{t^{x-y}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^y}\right)$, donc f est intégrable en $+\infty$.

Dès lors, en passant l'inégalité (1) quand N tend vers l'infini, il vient $\boxed{\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt}$

c) On sait avec 2a) que $\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{n^{1-x} (1 + (x-1) \ln n)}{(x-1)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-x} \ln n}{(x-1)}$

De même, $\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{(n-1)^{1-x} (1 + (x-1) \ln(n-1))}{(x-1)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-x} \ln(n-1)}{(x-1)}$.

Comme $\ln(n-1) = \ln\left(n(1 - \frac{1}{n})\right) = \ln(n) + o(\ln(n)) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$, $\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-x} \ln(n)}{(x-1)}$.

Par théorème d'encadrement sur les équivalents, $\boxed{r_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}}$

d) Avec ce dernier équivalent, comme $\frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}$ est de signe fixe, et avec 1), $\sum_{n \geq 1} r_n$ converge si et seulement si $x-1 > 1$.

Donc $\boxed{\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^x} \right)}$ est convergente si et seulement si $x > 2$

Partie C : Restes de séries alternées

- 1) Tout d'abord, comme f est décroissante sur $[0, +\infty[$, il vient pour $t \geq 0$: $f(t) - f(t+1) \geq 0$. Comme f est positive strictement, on a bien $0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)}$.

On applique le **théorème des accroissements finis** sur $[t, t+1]$ (f est bien continue sur $[t, t+1]$, dérivable sur $]t, t+1[$, à valeurs réelles). Il existe donc $c \in]t, t+1[$ tel que $\frac{f(t) - f(t+1)}{t - (t+1)} = f'(c)$.

Comme f est convexe, f' est croissante, donc $f'(c) \geq f'(t)$ et $f(t) - f(t+1) = -f'(c) \leq -f'(t)$.

Comme f est positive strictement, on a bien $0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)}$

2)

- a) On utilise le **théorème spécial sur les séries alternées**. La série $\sum_{n \geq 0} U_n$ est alternée puisque f est positive. De plus $(|U_n|) = (f(n))$ est décroissante et de limite nulle. Donc $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k f(k)$. On effectue un changement d'indice en posant $p = k - n$

. Il vient $r_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+n} f(p+n) = (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n)$.

Donc $|r_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p)$

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et il vient :

$$|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p) - \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p+1) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} (f(n+p-1) - f(n+p)).$$

On pose alors $V_p = f(n+p-1) - f(n+p)$ pour $p \geq 1$.

On cherche à appliquer le théorème spécial sur les séries alternées.

Comme f est décroissante, on remarque que $V_p \geq 0$. De plus, comme f est de limite nulle en $+\infty$, $V_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$. Il reste à prouver que (V_p) est décroissante.

$$V_{p+1} - V_p = 2f(n+p) - (f(n+p-1) + f(n+p+1)).$$

Or **par convexité**, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, $f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) = f\left(\frac{1}{2}a + \left(1 - \frac{1}{2}\right)b\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$.

On l'applique pour $a = n+p-1$ et $b = n+p+1$.

On obtient $V_{p+1} - V_p \leq 0$, donc (V_p) est décroissante.

Donc avec le théorème spécial sur les séries alternées, $|r_n| - |r_{n+1}|$ est du signe de V_1 , donc positif. De plus, $|r_n| - |r_{n+1}| \leq |V_1| = f(n) - f(n+1)$.

On a donc bien $0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1)$

c) On utilise de nouveau le théorème spécial sur les séries alternées. Tout d'abord, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k$ est le reste d'une série alternée : il est donc du signe de $U_n = (-1)^n f(n)$, donc $\sum_{n \geq 1} r_n$ est aussi une série alternée. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |r_n| - |r_{n+1}|$, la suite $(|r_n|)$ est décroissante et de limite nulle comme reste de série convergente. Donc $\sum_{n \geq 0} r_n$ est convergente.

d) On suppose que le quotient $\frac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini. Alors avec (1), par

encadrement, $\frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Or avec 2b), $0 \leq \frac{|r_n| - |r_{n+1}|}{f(n)} \leq \frac{f(n) - f(n+1)}{f(n)}$. Donc par

encadrement, $|r_n| - |r_{n+1}| = o(f(n))$

De plus, $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k = U_n + r_{n+1}$, donc comme r_n est du signe de $U_n = (-1)^n f(n)$, il vient $r_n = (-1)^n |r_n|$,

donc $(-1)^n |r_n| = (-1)^n f(n) + (-1)^{n+1} |r_{n+1}|$, puis $|r_n| = f(n) - |r_{n+1}|$.

Donc $2|r_n| = f(n) + |r_n| - |r_{n+1}| = f(n) + o(f(n))$.

Donc $2|r_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n)$, puis $2(-1)^n |r_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n f(n)$. On a donc bien $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{U_n}{2}$

3)

a) On suppose $x \leq 0$. Alors $\left| \frac{(-1)^n \ln n}{n^x} \right| = n^{-x} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est grossièrement divergente.

On suppose $x > 0$. On pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$ pour $t \in [1, +\infty[$.

Alors $f'(t) = \frac{1}{t} \frac{(t^x) - x t^{x-1} \ln(t)}{t^{2x}} = \frac{1}{t^{x+1}} (1 - x \ln(t))$. Donc $f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \geq e^{1/x}$.

Donc f est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$, à valeurs strictement positives.

De plus, $f''(t) = \frac{1}{t^{x+1}} \left(-\frac{x}{t} \right) + (1 - x \ln(t))(-x-1) \frac{1}{t^{x+2}} = \frac{1}{t^{x+2}} (-x + (x \ln(t) - 1)(x+1))$.

Pour $t \geq e^{2/x}$, il vient $f''(t) \geq \frac{1}{t^{x+2}} (-x + (x+1)) \geq 0$.

f est convexe sur $[e^{2/x}, +\infty[$, décroissante, à valeurs strictement positives, de limite nulle en $+\infty$.

On note $N = \lfloor e^{2/x} \rfloor + 1$

Donc avec les résultats de C2), comme la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, on

conclut que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ a même nature que $\sum_{n \geq N} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ et est convergente.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

b) On utilise C2d) : $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t^x \ln(t)} (1 - x \ln(t)) = \frac{1}{t^x} \left(\frac{1}{\ln(t)} - x \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Donc pour $n \geq N$, $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{U_n}{2}$.

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \ln(n)}{2n^x}}$$

4)

a) On pose $U_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ pour $n \geq 2$. Alors

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge avec le théorème sur les séries alternées, et si $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $\sum_{n \geq 1} W_n$

converge absolument, donc converge. $\boxed{\text{Donc } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \text{ est convergente.}}$

b) On écrit $U_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n}$.

$$\text{On note } V_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } W_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{(n + (-1)^n)n}$$

Si on note pour $t > 0$: $f(t) = \frac{1}{t}$, il vient $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $f''(t) = 2\frac{1}{t^3} \geq 0$

f est strictement positive, convexe, de limite nulle, décroissante et $\frac{f'(t)}{f(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Donc avec C2d), $\sum_{k=n}^{+\infty} V_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$, donc $\sum_{k=n}^{+\infty} V_k = \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

De plus, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{(n+1)n} \leq -W_n \leq \frac{1}{(n-1)n}$, donc $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \leq -W_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

Donc par somme télescopique (ces séries convergent) : $\frac{1}{n} \leq -\sum_{k=n}^{+\infty} W_k \leq \frac{1}{n-1}$.

Par théorème d'encadrement sur les équivalents, $-\sum_{k=n}^{+\infty} W_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} W_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc en sommant, $\sum_{k=n}^{+\infty} U_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{-2 + (-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} U_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2 + (-1)^n}{2n}$

Or $\frac{-2 + (-1)^n}{2n}$ est de signe fixe (négatif), $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$ converge avec le théorème sur les

séries alternées. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{-2 + (-1)^n}{2n}$ diverge et $\boxed{\text{la série de terme général } \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k + (-1)^k} \text{ est divergente}}$