6-Suites et séries de fonctions

On note $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Jouons à « qui est qui ? »

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

- f_n est une fonction.
- $f_n(x)$ est un nombre.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions.
- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique.
- $\sum f_n(x)$ est une série numérique.
- $\sum f_n$ est une série de fonctions.
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est un nombre qui n'a de sens que si $\sum f_n(x)$ converge. C'est la somme de cette série numérique.
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction lorsqu'il y a convergence.

A) Suites de fontions

1) Convergence simple

Définition : Une suite de fonctions de I dans K est la donnée de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans K.

Définition (*) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit qu'elle converge **simplement** vers une fonction f sur I si et seulement si $\forall x\in I, f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$ (on **fixe** x et on regarde la limite de la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini).

Exemples : étudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

- $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$ sur $I=\mathbb{R}$.
- $f_n(x)=\mathrm{Arctan}\,(n+x)$
- $f_n(t)=t^n$ pour $t\in I=\left[0,1\right]$.
- $f_n(x)=\dfrac{n^2x+1}{n^2x^2+2}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2) Convergence uniforme

Définition : soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et N une application de E dans $\mathbb{R}$. Alors N est une norme sur E si et seulement si :

- $\forall u \in E, N(u) \geq 0$
- $\forall u \in E, N(u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$ (séparation)
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (homogénéité)
- $\forall u, v \in E, N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire)

Rappel (*) : borne supérieure d'un ensemble et d'une fonction.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si A est un ensemble non vide et majoré, A possède une borne supérieure, notée $\sup(A)$. C'est le plus petit des majorants de A.
- Si $S = \sup(A)$, alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers S.
- Si $S = \sup(A)$ et qu'on veut montrer que $S \leq M$, on prouve $\forall x \in A, x \leq M$.
- Lorsque f est majorée sur I, $\sup\limits_I(f) = \sup\left(\{f(x), x \in I\}\right)$ est la borne supérieure de f sur I : c'est le plus petit des majorants de f sur I.
- Lorsque f possède un maximum M sur I, alors $\sup\limits_I(f) = M$. On dit alors que la borne supérieure est atteinte. Il est possible que la borne supérieure existe sans être atteinte, comme pour $f = \text{Arctan}$ sur $\mathbb{R}$.

On a le même type de propriétés pour la borne inférieure d'un ensemble ou d'une fonction.

Définition : on note $B(I,K)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I à valeurs dans K.
On définit sur $B(I,K)$ la norme infinie par $\forall f \in B(I,K), \|f\|_{\infty,I} = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$.
Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, on note $\|f\|_{\infty,I} = \|f\|_\infty$.

Remarque : $|f|$ est majorée sur I, donc $\sup\limits_{x \in I} |f(x)|$ existe.

Propriété : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. Alors $\sup(kA) = k \sup(A)$

Preuve : on montre que $k\sup(A)$ est le plus petit des majorants.

Propriété : $\| \ \|_{\infty,I}$ est une norme sur $B(I,K)$.

Preuve : avec le plus petit des majorants et des suites.

Définition (*) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit qu'elle converge **uniformément** vers une fonction f sur I si et seulement si pour n assez grand, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Explication : avec une vague de hauteur 1 sur $\mathbb{R}_+$, située sur $[n, n+1]$.

Remarques :

- On a l'équivalence : $\|f_n - f\|_\infty \le M \Leftrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \le M$
- La convergence uniforme s'écrit $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ (c'est le même N pour tous les $x \in I$).
  La convergence simple s'écrit $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ (chaque x a son N qui peut changer).

Proposition (*) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.

Preuve : avec pour $x \in I$, $0 \le |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$.

Méthode :

- Pour montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, il suffit de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité U_n qui **ne dépend pas de** x et qui tend vers 0. On aura en effet $0 \le \|f_n - f\|_\infty \le U_n$.
- On calcule parfois $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide d'une étude de fonction, mais pas toujours (notamment si les calculs sont pénibles).
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme, il suffit de trouver une suite (a_n) telle que $f_n(a_n) - f(a_n)$ ne tende pas vers 0, ou de montrer que $f_n - f$ n'est pas bornée sur I.

Exemples :

- $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$
- $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$
- $f_n(x) = \arctan(n + x)$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}$.
- $f_n(t) = t^n$ pour $t \in I = [0,1[$. (avec dessin)
- $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : dans le quatrième cas, il y a convergence uniforme sur tout intervalle $[0, a]$, avec $0 < a < 1$, mais pas sur $[0,1[$.

Propriété : soit $J \subset I$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur J.

3) Passage de la continuité à la limite

Proposition (*) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur I. Alors f est continue sur I.
Par contraposée, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues et que f n'est pas continue, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

Preuve : à faire avec la définition.

Remarques :

- On a alors pour $a \in I$: $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$
- Le résultat est faux si on a seulement la convergence simple avec $f_n(t) = t^n$ pour $t \in I = [0,1]$.

Exemple : pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

Remarques (*) :

- La continuité est une propriété locale. Il suffit d'avoir **la convergence uniforme sur tout segment de** I pour avoir la continuité sur I (car tout élément a de I est dans un segment $[a-h,a+h]\cap I$, avec $h > 0$). L'important est que tout élément de I soit « à l'intérieur » d'un sous-ensemble de I sur lequel il y a convergence uniforme.
  Par exemple, si $I = \mathbb{R}$, il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout intervalle $[-a,a]$ avec $a > 0$ pour avoir la continuité sur $I = \mathbb{R}$.
- En revanche, la convergence uniforme sur tout segment de I n'entraîne pas la convergence uniforme sur I (en prenant $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$ pour $n \geq 1$).

4) Limites d'intégrales.

Proposition : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur **un segment** $I = [a,b]$, avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Alors $\int_a^b f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$.

Preuve : $\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$.

Remarque : le résultat est faux si on a seulement convergence simple : on peut prendre la fonction « chapeau pointu ».

Théorème de convergence dominée (*, admis) : soit I un intervalle quelconque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K et $f : I \to K$ On suppose :

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.
2) il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \le \varphi(t)$ **(hypothèse de domination = hypothèse clé).**
3) Les f_n et f sont continues par morceaux sur I (hypothèse accessoire).

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_I f(t)\,dt$

Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,dt\right) = \int_I \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt$

Preuve : on justifie uniquement que les f_n et f sont intégrables sur I.

Remarque : le théorème ne s'applique pas toujours directement. Parfois, il faut d'abord effectuer un changement de variable ou une intégration par parties, ou même passer par un encadrement sans utiliser la convergence dominée.

Méthode (*) : soit $I_n = \int_I f_n(t)\,dt$. Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, on peut :

- Utiliser la convergence uniforme sur un **segment**.
- Encadrer I_n à l'aide d'intégrales calculables et utiliser le théorème d'encadrement.
- Utiliser le théorème de convergence dominée sur un **intervalle quelconque.**
  le théorème ne s'applique pas toujours directement. Parfois, il faut d'abord effectuer un changement de variable ou une intégration par parties, ou même passer par un encadrement sans utiliser la convergence dominée.

Exemples :

- $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \dfrac{e^t}{4+t^2}\,dt = \dfrac{\pi}{4}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{1+t^4}\,dt = 1$
- Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^1 t^n \arctan(t)\,dt$ (avec une IPP, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4n}$).

5) Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Proposition : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs dans K. On suppose que :

- Chaque fonction f_n est C^1 sur I.
- (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I.
- (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers une fonction g sur I.

Alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.
« La dérivée de la limite est la limite de la suite des dérivées ».

Preuve : si $a,x\in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} f(a) + \int_a^x g(t)dt = f(x)$, avec g continue sur I grâce à la CVU de (f_n') sur tout segment de I.

Remarque : il se peut que les fonctions f_n soient toutes C^1 sans que leur limite simple f soit dérivable (on peut prendre $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ et $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$).

Proposition : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs dans K. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose que :

- Chaque fonction f_n est C^k sur I.
- $(f_n),\dots,(f_n^{(k-1)})$ convergent simplement respectivement vers des fonctions $f, g_1,..,g_{k-1}$ sur I.
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers une fonction g_k sur (tout segment de) I.

Alors f est de classe C^k sur I et $\forall i\in[\![1,k]\!]\, f^{(i)} = g_i$.

Preuve : non faite. Avec une récurrence et le fait que dans la proposition précédente, on a aussi la CVU sur tout segment de $f_n^{(k)}$ vers g_k
(avec $f_n^{(k)}(x) - g_k(x) = \int_a^x \left(f_n^{(k-1)} - g_{k-1}\right)(t)dt + f_n^{(k)}(a) - g_k(a)$ pour $x\in[a,b]$).

B) Séries de fontions

1) Convergence simple

Définition (*) : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs dans K. La série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement sur I si et seulement si pour tout élément x de I, la série numérique $\sum U_n(x)$ est convergente. Dans ce cas, la fonction S définie sur I par $\forall x\in I, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$ est appelée fonction somme de la série et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

Remarques :

- Ceci équivaut à la convergence simple de la suite de fonctions $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ vers S.
- En pratique, **on fixe** $x \in I$ et on étudie la convergence de la série numérique $\sum U_n(x)$.

Exemples :

- Etudier la convergence simple de $\sum U_n$ lorsque $I = \left]-1,1\right[$ et $U_n(x) = x^n$.
- Etudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$. On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$
- Etudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
- Etudier la convergence simple de $\sum U_n$ lorsque $I = \mathbb{R}$ et $U_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

2) <u>Convergence uniforme</u>

Définition : soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction U_n de I dans K.

On pose, pour $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x)$.

On dit que la série $\sum U_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I.

Proposition (*) : soit $\sum U_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur I. Pour $x \in I$, on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$. Alors $\sum U_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite (R_n) converge uniformément vers 0 sur I (pour n assez grand, chaque R_n est bornée sur I et $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$).

Explication : on prouve que cela revient au même.

Remarque (*) : si $\sum U_n$ converge uniformément sur I, alors $\|U_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. En particulier, si $\|U_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum U_n$ ne converge pas uniformément sur I,

Exemples :

- Etudier la convergence uniforme de $\sum U_n$ lorsque $I = \left]-1,1\right[$, $I = [-a,a]$ avec $a \in \left]0,1\right[$ et $U_n(x) = x^n$. On a $\|U_n\|_{\infty,\left]-1,1\right[} = 1$, $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ et $\|R_n\|_{\infty,[-a,a]} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

- Etudier la convergence uniforme de $\sum U_n$ lorsque $I=\mathbb{R}$ et $U_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$.On a alors $\|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$, donc CVU.

3) <u>Convergence normale.</u>

Définition (*) : soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une fonction U_n de I dans K.
On dit que la série $\sum U_n$ converge normalement sur I si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction U_n est bornée sur I, et que la série $\sum\|U_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition (*) : on suppose que la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement sur I.

Alors :

- $\sum U_n$ converge uniformément sur I.
- Si $x\in I$, la série numérique $\sum U_n(x)$ converge absolument.

Preuve :

- Pour la converge absolue, on conclut avec $0\leq |U_n(x)|\leq \|U_n\|_\infty$.
- On a donc la convergence simple. Puis $|R_n(x)|\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|U_k\|_\infty$ et pour tout entier n, R_n est bornée sur I et $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Méthode (*) : convergence d'une série de fonctions $\sum U_n$ sur I.

1) Convergence **simple** : on fixe $x\in I$ et on étudie la série numérique $\sum U_n(x)$
2) Convergence **normale** : on peut calculer $\|U_n\|_\infty$ en étudiant la fonction ou plus simplement majorer $|U_n(x)|$ par une quantité qui ne dépend pas de $x\in I$ et qui est le terme général d'une série convergente.
3) Convergence **uniforme :**
   - On peut étudier la convergence normale qui entraine la convergence uniforme.
   - Si $\|U_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0, il n'y a pas convergence uniforme.
   - Si la série est alternée, utiliser la majoration du reste du TSSA.
   - Sinon étudier à la main.

Exemples (*) :

1) Etude de la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum_{n\geq1}\dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$. On a CVS, CVU et CVN.

2) Etude de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}\,x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\left[a,+\infty\right[$,avec $a>0$. On a $\|U_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=1$, donc pas CVU sur $\mathbb{R}_+^*$, mais on a CVN sur $\left[a,+\infty\right[$.

3) Etude de la convergence simple, normale et uniforme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+x}$. Si on note $U_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+x}$, il vient $\|U_n\|_\infty=\frac{1}{n}$, donc pas CVN. Et $|R_n(x)|\leq\frac{1}{n+1+x}\leq\frac{1}{n+1}$, donc CVU.

4) <u>Limites et continuité de la somme</u>

Proposition (*) : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I.

On suppose que $\sum U_n$ converge uniformément vers $S=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n$ sur (tout segment de) I.

Alors S est continue sur I.

Preuve : avec $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$.

Remarques (*) :

- Avec la caractère local de la continuité, il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment de I pour avoir la continuité de S sur I.
- En revanche, la convergence uniforme sur tout segment de I n'entraîne pas la convergence uniforme sur I.

Exemples (*) :

- On note pour $x\in\mathbb{R}_+$: $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+x}}{n^2}$. Montrer que S est bien définie et continue sur I. On a CVN sur tout segment $[0,A]$ et S est continue sur $\mathbb{R}_+$. On n'a pas CVU sur $\mathbb{R}_+$. Si on pose $U_n(x)=\frac{\sqrt{n+x}}{n^2}$, la fonction U_n n'est pas bornée.
- Etudier la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$. On a CVU (mais pas CVN) sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème de la double limite (*, admis) : soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une fonction U_n de I dans K. Soit a une borne de I qui peut être finie ou infinie. On suppose que :

- $\sum U_n$ converge uniformément sur I (ou sur $J\subset I$ contenant un voisinage de a)
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n(x)\underset{x\to a}{\to}W_n\in K$

Alors : $\sum W_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)\underset{x\to a}{\to}\sum_{n=0}^{+\infty}W_n$

Remarques :

- On a ainsi $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a}U_n(x)\right)$.
- La convergence simple ne suffit pas : on prend $U_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)=1$.
- Il n'est pas nécessaire d'avoir la convergence uniforme sur I entier : il suffit de se placer sur un voisinage de a.

Preuve non faite. On peut faire la preuve lorsque $\sum U_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ avec une limite en $+\infty$, en prouvant d'abord que $\sum W_n$ converge puis en revenant à la définition de limite. Le faire éventuellement.

Méthode (*) : pour trouver la limite ou un équivalent de la somme d'une série de fonctions en une borne de l'intervalle, on peut :

- Utiliser le théorème de la double limite.
- Procéder par encadrement (notamment en cas de limite infinie).
- Approcher la somme à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exemple : Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ et $g(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}$

1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
3) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
4) Déterminer la limite de f puis celle de g en 0^+.

On fait une comparaison somme-intégrale : on pose pour $x>0$ $h(t)=\frac{1}{t^2+x^2}$

On a $f(x)-\frac{1}{x}\leq\int_0^{+\infty}h(t)dt\leq f(x)$ donc $\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq f(x)\leq\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x^2}$.

Donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et le théorème de la double limite ne s'appliquerait pas pour $x\,f(x)$. De plus, $f(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\geq\frac{1}{x^2}$.

Puis $g(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}\underset{x\to0}{\to}\frac{\pi^2}{6}$ avec le théorème de la double limite.

5) Dérivation de la somme d'une série de fonctions.

Proposition (*) : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs dans K. On suppose que :

- Chaque fonction U_n est C^1 sur I.
- $\sum U_n$ converge simplement sur I.
- $\sum U_n'$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est de classe C^1 sur I et $\forall x\in I, S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n'(x)$.
« La dérivée de la somme est la somme des dérivées ».

Preuve : avec $S_n=\sum_{k=0}^{n} U_k$.

Exemple : Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(3^n x)}{4^n}$. Justifier l'existence de f et montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition (*) : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs dans K. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose que :

- Chaque fonction U_n est C^k sur I.
- Pour tout $i\in[\![0,k-1]\!]$, $\sum U_n^{(i)}$ converge simplement sur I.
- $\sum U_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $S=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est de classe C^k sur I et $\forall x\in I, \forall i\in[\![1,k]\!], S^{(i)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^{(i)}(x)$.

Exemple : soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x}$. Montrer que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On trouve $f^{(p)}(x)=(-1)^p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p!}{(x+n^2)^{p+1}}$

Exemple à connaître (*) : soit $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ sur $I=]1,+\infty[$. Montrer qu'elle est C^∞ sur I.

6) Intégration de la somme d'une série de fonctions

Proposition (*) : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues. On suppose que $\sum U_n$ converge uniformément vers $S=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ sur $I=[a,b]$, avec $a<b$. Alors $\sum\left(\int_a^b U_n(t)\,dt\right)$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b U_n(t)\,dt\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t)\right)dt$.

Preuve : avec $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ et l'existence de la limite de $\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b U_k(t)\,dt\right)$ qui est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b U_n(t)\,dt\right)$ par définition.

Exemple : soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\neq 1$. Calculer $I(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{z-e^{it}}dt$.

Pour $|z|>1$, $I(z)=\frac{1}{z}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\frac{e^{it}}{z}}dt=\frac{1}{z}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{it}}{z}\right)^n dt$.

On a CVN donc on peut permuter et $I(z)=\frac{2\pi}{z}$.

Pour $|z|<1$, on trouve $I(z)=0$ car $\int_0^{2\pi}e^{-i(n+1)t}dt=0$.

Théorème d'intégration terme à terme (*, admis) : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un intervalle quelconque I, à valeurs dans K. On suppose que :

- $\sum U_n$ converge simplement vers $S=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n$ sur I.
- Chaque U_n est intégrable sur I,
- La série $\sum\int_I |U_n(t)|\,dt$ converge **(hypothèse clé)**.
- S continue par morceaux sur I (accessoire).

Alors S est intégrable sur I, $\sum\int_I U_n(t)dt$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I U_n(t)\,dt\right)=\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(t)\right)dt$

Exemples (*) :

- Après avoir justifié l'existence des deux membres, montrer $\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t}dt=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Avec $\int_0^1 t^n\ln(t)\,dt=-\frac{1}{(n+1)^2}$.
- Montrer $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{(i-1)nt}}{\sqrt{n}}\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+i}{2n\sqrt{n}}$. On note $S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{(i-1)nt}}{\sqrt{n}}$. Il faut justifier la convergence absolue pour déduire la CVS.

Remarque : si on suppose seulement $\sum\int_I U_n(t)dt$ converge, cela ne suffit pas. Prendre $U_n(t)=t^{2n+1}$ et $I=\left]-1,1\right[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(t)=\frac{t}{1-t^2}$ n'est pas intégrable sur $I=\left]-1,1\right[$ en prenant une primitive.

Méthode : pour permuter série et intégrale on peut donc :

- Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.
- Utiliser la convergence uniforme sur un segment uniquement.
- Si cela ne fonctionne pas, on peut essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à $S_n(t)=\sum_{k=0}^{n}U_k(t)$.

Exemple : montrer $\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-t)^n\,dt$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$.

On prend $U_n(t)=(-t)^n$. Il n'y a pas convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ et la série des intégrales diverge. On applique le théorème de CVD à $S_n(t)=\sum_{k=0}^{n}U_k(t)=\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ car $|S_n(t)|\leq\frac{2}{1+t}$