

On suppose que f annule un polynôme scindé à racines simples. (1)

On montre que f est diagonalisable.

Soit $P = \lambda \prod_{k=1}^p (x - x_k)$, un polynôme annulateur de f , avec $\lambda \in K^*$

Quitte à renuméroter les racines, on suppose que $x_1, \dots, x_q$ sont
valeurs propres de f , et que $x_{q+1}, \dots, x_p$ ne le sont pas.

$$\text{Il vient donc } \lambda \prod_{k=1}^p (f - x_k \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\text{donc } \left(\prod_{k=1}^q (f - x_k \text{Id}_E) \right) \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{, où } g = \lambda \prod_{k=q+1}^p (f - x_k \text{Id}_E).$$

Or pour $k \geq q+1$, $x_k \notin \mathcal{S}(f)$, donc $(f - x_k \text{Id}_E)$ est bijective,
et par composition, g est bijective.

$$\text{Donc } \left(\prod_{k=1}^q (f - x_k \text{Id}_E) \right) \circ g \circ g^{-1} = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \prod_{k=1}^q (f - x_k \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\text{On montre que } \bigoplus_{k=1}^q \ker(f - x_k \text{Id}_E) = E$$

On sait déjà que la somme est directe et que l'inclusion
 $\subseteq$ est vraie. On prouve l'autre inclusion par analyse-synthèse.

Soit $u \in E$. Soient $u_1, \dots, u_q$ tels que
$$\begin{cases} u = u_1 + \dots + u_q \\ \forall k \in [1, q], u \in E_{x_k}(f) \end{cases}$$

On sait que $\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in [1, q], f^i(u_j) = x_j^i u_j$

Donc

$$\begin{cases} u = u_1 + \dots + u_q, & L_0(x a_0) \\ f(u) = x_1 u_1 + \dots + x_q u_q, & L_1(x a_1) \\ \vdots \\ f^{(n)}(u) = x_1^n u_1 + \dots + x_q^n u_q, & L_n(x a_n) \end{cases} \quad (2)$$

On fait $a_0 L_0 + \dots + a_n L_n$

Il vient $a_0 u + a_1 f(u) + \dots + a_n f^{(n)}(u) = \left(\sum_{j=0}^n a_j x_j^j \right) u_1 + \dots + \left(\sum_{j=0}^n a_j x_j^j \right) u_q$

Donc si on note $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, il vient

$$P(f)(u) = P(x_1) u_1 + \dots + P(x_q) u_q \quad \forall P \in K[X]$$

Pour $i \in \{1, q\}$, on utilise les polynômes de Lagrange L_i tels que $\forall i, j \in \{1, q\}, L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Alors $L_i(f)(u) = u_i \quad (\forall i \in \{1, q\})$.

Synthèse : on vérifie que $u_1, \dots, u_q$ conviennent (donnés par $(*)$)

Tout d'abord $\sum_{i=1}^q u_i = \left(\sum_{i=1}^q L_i \right) (f)(u)$.

Or on a vu que $\sum_{i=1}^q L_i = 1$, donc on a bien $\sum_{i=1}^q u_i = u$

De plus, soit $i \in \{1, q\}$. On calcule $(f - x_i \text{Id}_E)(u_i)$

On veut montrer $(f - x_i \text{Id}_E)(u_i) = 0_E$ (car on a $u_i \in E_{x_i}(f)$)

$$\text{Il vient } (f - x_i \text{Id}_E)(u_i) = (f - x_i \text{Id}_E) \circ L(f)(u) = ((x - x_i)L)(f)(u)$$

$$\text{Or } L = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} \text{ donc } (x - x_i)L = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \prod_{j \neq i}^q (x - x_j)$$

$$\text{Donc } (f - x_i \text{Id}_E) \circ L(f)(u) = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \prod_{j \neq i}^q (f - x_j \text{Id}_E)(u)$$

$$\text{Or } \prod_{k=1}^q (f - x_k \text{Id}_E) = 0_{L(E)}, \text{ donc on a bien } (f - x_i \text{Id}_E)(u_i) = 0_E$$

$$\text{Ainsi, } \underline{u_i \in E_{x_i}(f) \quad (\forall i \in \{1, \dots, q\})}$$

$$\text{On conclut } E = \bigoplus_{k=1}^q \ker(f - x_k \text{Id}_E).$$

En concaténant des bases de $E_{x_k}(f) = \ker(f - x_k \text{Id}_E)$, on obtient une base de E de laquelle la matrice de f est diagonale.

Donc f est diagonalisable