

7-Séries entières

A) Rayon et domaine de convergence

1) Séries entières

Définition : soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est le disque ouvert de centre O et de rayon R . $\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ est le disque fermé de centre O et de rayon R .
 $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ est le cercle de centre O et de rayon R .

Définition : Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est la série de fonctions de la variable complexe $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)$, avec pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f_0(z) = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(z) = a_n z^n$.

Le **domaine de convergence** de la série entière est $D = \left\{ z \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge} \right\}$.

Remarques :

- pour $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit de la même manière la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x .
- On note $\sum a_n z^{2n}$ la série entière $\sum b_n z^n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n} = a_n, b_{2n+1} = 0$.

Exemples : déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes :

- 1) $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$
- 2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n^2}$
- 3) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$
- 4) $\sum_{n \in \mathbb{N}} n! z^n$

2) Rayon de convergence.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$. La borne supérieure de A est alors le plus petit majorant de A dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Lemme d'Abel (*) : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $(a_n z_0^n)$ est bornée. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve : $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$

Définition (*) : soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Le **rayon de convergence** R de cette série entière, noté $R\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n\right)$ est la borne supérieure de $A = \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. On a $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
- Le **disque ouvert de convergence** est $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.
- Le **cercle d'incertitude** est $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ (lorsque $R \in \mathbb{R}_+$).

Proposition (*) : soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < R$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente et $a_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Preuve : Si $|z| < R$, $|z|$ n'est pas un majorant de $A = \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. Donc on peut trouver $|z| < r \leq R$, $(a_n r^n)$ est bornée et on conclut avec le lemme d'Abel.

Corollaires (*) : soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$.

- Si $(a_n r^n)$ est bornée, alors $R \geq r$.
- Si $(a_n r^n)$ ne tend pas vers 0, alors $R \leq r$.
- Si on trouve $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $(r < r_0 \Rightarrow (a_n r^n) \text{ est bornée})$, et $(r > r_0 \Rightarrow (a_n r^n) \text{ ne tend pas vers } 0)$, alors $R = r_0$.

Preuve : c'est la contraposée du résultat précédent (si $(a_n r^n)$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ n'est pas absolument convergente).

Pour la dernière, supposer $R > r_0$ ou $R < r_0$ et aboutir à une absurdité.

Très utile en pratique pour déterminer le rayon de convergence.

Propriété : soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ ont même domaine de convergence, alors $R_a = R_b$.

Preuve : regarder $(b_n r^n)$ pour $r < R_a$ et $r > R_a$ et conclure $R_b = R_a$.

Remarques :

- $R = 0$ lorsque $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ n'est jamais convergente, sauf si $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout complexe z .
- Ce qui se passe sur le cercle d'incertitude (pour $|z| = R$) est subtil. Tout peut arriver.

Exemples : reprendre les exemples précédents. En plus :

- 1) Rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} 4^n z^n$
- 2) Rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \cos^2 n) z^n$

Définition : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On suppose $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Alors la fonction d'une variable réelle f donnée par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ admet un domaine de définition D tel que $] -R, R[\subset D \subset [-R, R]$.

$] -R, R[$ est alors **l'intervalle ouvert de convergence**.

3) Outils pour calculer le rayon de convergence.

Proposition (*) : soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b .

- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a > R_b$
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$

Preuve : si $a_n = O(b_n)$, alors soit $r < R_b$. On a $|a_n| r^n = O(|b_n| r^n)$ donc $r \leq R_a$. Puis on fait tendre r vers R_b donc $R_a \geq R_b$

Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$

Exemple : rayon de convergence de $\sum \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$.

Rappel : règle de d'Alembert pour les séries : soit (U_n) une suite de réels strictement positifs

tels que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $0 \leq a < 1$, alors la série $\sum U_n$ converge.
- Si $a \in]1, +\infty]$, alors $\sum U_n$ diverge grossièrement.

Règle de d'Alembert pour les séries entières (*) : soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. On suppose

que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$. On suppose aussi que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}$.

Alors si $b \in \mathbb{R}_+^*$, $R\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n\right) = \frac{1}{b}$ et si $b = 0$, $R\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n\right) = +\infty$

Preuve : à faire.

Exemple (*) : trouver le rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^n$.

Soit $U_n = \binom{2n}{n} r^n$, avec $r > 0$. Alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4r$. Puis $R = \frac{1}{4}$.

Propriété : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Preuve : avec d'Alembert.

Remarques :

- Il suffit d'avoir $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N .
- La règle de d'Alembert pour les séries entières ne fonctionne pas pour les séries lacunaires de la forme $\sum a_n z^{2^n}$ ou $\sum a_n z^{2^{n+1}}$, car de nombreux termes de la suite (a_n) sont nuls. On peut utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

Exemple : rayon de convergence de $\sum \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) z^{2^n}$.

4) Opérations et rayon de convergence.

Propriété : soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b .

Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$. Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Preuve : si $0 \leq r < \min(R_a, R_b)$, alors $(a_n + b_n) r^n$ est bornée, donc $r \leq R$.

Rappel : produit de Cauchy de deux séries numériques : soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes complexes absolument convergentes. Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum W_n$, avec $W_n = \sum_{p=0}^n U_p V_{n-p} = \sum_{p+q=n} U_p V_q$.

Alors la série $\sum W_n$ est absolument convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} U_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} V_q \right)$.

Proposition (*,PV) : produit de Cauchy de deux séries entières.

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b .

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$

Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q \right)$

Preuve : c'est le produit de Cauchy des séries numériques avec $U_p = a_p z^p$ et $V_q = b_q z^q$.

On l'applique pour $U_p = a_p z^p$ et $V_q = b_q z^q$ pour $|z| \leq r < \min(R_a, R_b)$, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} W_n z^n$ converge par produit de Cauchy sur les séries numériques.

Exemple : soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$

Remarque : si on veut faire le produit de Cauchy de deux séries entières, toujours écrire ces séries sous la forme $\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$ (sinon la gestion des indices est trop compliquée)

5) Méthodes et exemples de recherche de rayon de convergence.

Méthode (*) : pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, on peut :

- Utiliser d'Alembert lorsque $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n \neq 0$.
- Prendre $r > 0$ et étudier quand la suite $(a_n r^n)$ est bornée ou tend vers 0. Si on trouve $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $(r < r_0 \Rightarrow (a_n r^n) \text{ est bornée})$, et $(r > r_0 \Rightarrow (a_n r^n) \text{ ne tend pas vers } 0)$, alors $R = r_0$.

Faire un dessin aide à réfléchir.

- Utiliser $a_n = O(b_n)$ ou $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ lorsqu'on connaît $R\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n\right)$.

Exemples : déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- 1) $\sum \frac{n^2 + \ln(n)}{3^n} z^n$
- 2) $\sum e^{\cos(n)} z^n$ ($R = 1$)
- 3) $\sum \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$ ($R = \frac{e}{2}$)

B) Régularité de la somme d'une série entière

1) Continuité.

Proposition (*) : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ converge normalement sur tout segment de $] -R, R[$.

Preuve : soit $[a, b] \subset] -R, R[$. Soit $r = \max(|a|, |b|) < R$. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n$ converge absolument donc on a convergence normale sur $[-r, r]$ donc sur $[a, b]$.

Remarque : la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ ne converge pas toujours normalement sur $] -R, R[$. Il suffit pour cela de prendre $\sum_{n \in \mathbb{N}} t^n$.

Proposition (*) : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in] -R, R[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors f est continue sur $] -R, R[$.

Preuve : il y a CVU sur tout segment de la série de fonctions.

Propriété admise : soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $z \in D(0, R)$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est continue sur $D(0, R)$ (ainsi, si $z_0 \in D(0, R)$, alors $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0)$).

2) Intégration et dérivation terme à terme.

Proposition (*) : les séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Preuve : notons R_1 et R_2 les deux rayons de convergence.

On montre que si $r < R_1$, $n a_n r^n \rightarrow 0$, donc est bornée, et si $r > R_1$, $n a_n r^n$ ne tend pas vers 0.

Si $r < r' < R_1$, $n a_n r^n = a_n (r')^n n \left(\frac{r}{r'} \right)^n \rightarrow 0$.

Si $r > R_1$, on suppose par l'absurde que $n a_n r^n \rightarrow 0$. Alors $a_n r^n \rightarrow 0$, ce qui est absurde.

On a donc bien $R_1 = R_2$.

Corollaire : les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ ont même rayon de convergence : ce dernier est inchangé par dérivation ou intégration terme à terme.

Preuve rapide : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^n$ converge (séparer le cas $z = 0$). De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} z a_{n-1} z^{n-1}$ converge.

Puis on applique le résultat à $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Proposition (*) : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence

$R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in]-R, R[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Alors f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et on peut dériver terme à terme.

On a $\forall t \in]-R, R[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} t^n$.

Preuve : on montre que f est C^1 sur $] -R, R[$. On sait que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Soit $0 < r < R$. On note $U_n(t) = a_n t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a CVN de la série de fonctions $\sum (U_n)'$ sur tout segment de $] -R, R[$ et CVS de $\sum U_n$ sur $] -R, R[$.

Par récurrence, $f^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (U_n)^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} t^n$

Exemple (*) : Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

Calculer $f^{(k)}(t)$ de deux manières et en déduire $\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} t^{n-k}$.

$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$ et $f^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$.

Proposition (*) : Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de

convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $t \in]-R, R[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors la fonction

définie par $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} t^n$ est une primitive de f sur $] -R, R[$.

Ainsi, si $[c, d] \subset]-R, R[$, $\int_c^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_c^d t^n dt = F(d) - F(c)$.

Remarque : Attention : ce résultat n'est vrai que pour $[c, d] \subset]-R, R[$ et non sur $] -R, R [$.

Preuve : on applique le résultat précédent à F . On peut aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions sur $[c, d] \subset]-R, R[$. Il y a CVN donc CVU.

Exemples (*) : à partir de $\forall t \in]-1, 1[\left[\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right.$, on obtient :

- $\forall x \in]-1, 1[\left[\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right.$
- $\forall x \in]-1, 1[\left[\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right.$
- $\forall x \in]-1, 1[\left[\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right.$

C) Développement en série entière d'une fonction

On note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On prend maintenant une fonction et se demande si elle s'écrit sous forme de série entière.

1) Développement en série entière des fonctions usuelles.

Définition (*) : soit $r > 0$. Une fonction $f : I \rightarrow K$ est dite développable en série entière sur $] -r, r [\subset I$ si et seulement si il existe une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ de rayon de convergence $R \geq r$

telle que $\forall t \in] -r, r [\left[f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right.$

f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $] -r, r [$

Propriété : soient f et g deux fonctions développables en séries entières sur $] -r, r [$ avec $r > 0$. Alors $f + g$ et $f g$ sont DSE sur $] -r, r [$

Preuve : immédiat avec un produit de Cauchy.

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral (*) : soit a et b des réels quelconques d'un intervalle I , et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

En particulier, si $0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$

Preuve : par récurrence et intégration par parties.