9-Produits scalaires

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

A) Produit scalaire, orthogonalité

1) Définitions, Cauchy-Schwarz

Produit scalaire (*) : Soit h une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit que h est **bilinéaire** si et seulement si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables ($\forall x, x', y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} h(\lambda x + x', y) = \lambda h(x,y) + h(x',y) \\ h(x, \lambda y + y') = \lambda h(x,y) + h(x,y') \end{cases}$)
- On dit que h est **symétrique** si et seulement si $\forall x, y \in E, h(x,y) = h(y,x)$
- On dit que h est **définie positive** si et seulement si $\forall x \in E, \begin{cases} h(x,x) \geq 0 \\ h(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$

h est un **produit scalaire** sur E si et seulement si h est symétrique, bilinéaire, définie positive.
Un **espace euclidien** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.
Un espace **préhilbertien** réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (pas forcément de dimension finie).

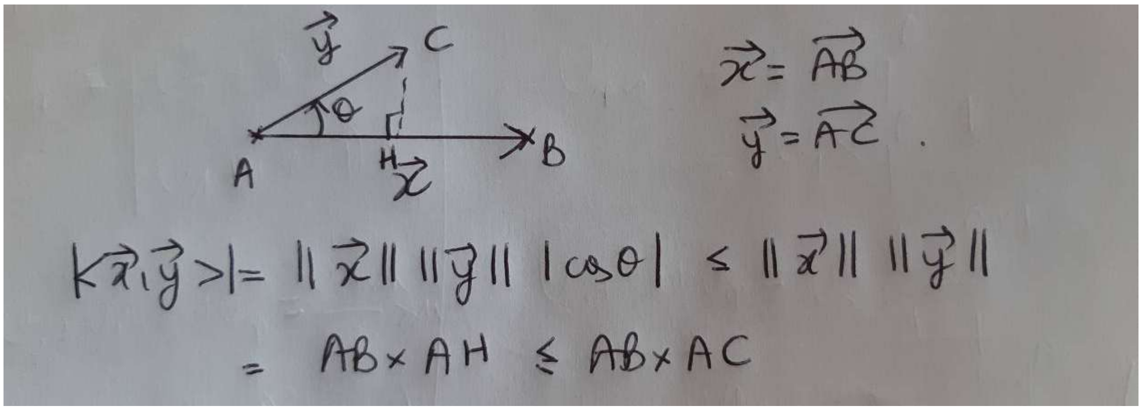
Exemple (*) : On prend $E = M_n(\mathbb{R})$. On pose $\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$. Expliciter $\langle A, B \rangle$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que c'est un produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz (*) : soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien.

- Pour $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x/x \rangle}$. $\|\ \|$ est une norme sur E : c'est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.
- De plus :

1) $\forall (x,y) \in E^2, \left|\langle x,y \rangle\right| \leq \|x\|.\ \|y\|$ (1)
2) Il y a égalité dans (1) si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Remarque : cela se voit bien dans le plan.



Exemple : on prend $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$.

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E$.

On pose $\langle x,y \rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Alors $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. $(\mathbb{R}^n, \langle\ \rangle)$ est un espace euclidien.

Ainsi, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}$.

Inégalité triangulaire : soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire. Alors si $x_1,...,x_n \in E$, $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$, $\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|e_k\|$

Exemple (*) : soit $I=\mathbb{R}_+$. On note $L^2\left(I,\mathbb{R}\right)=\left\{f\in C(I,\mathbb{R}), f^2 \text{ est intégrable sur } I\right\}$

On pose $\langle f,g\rangle=\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$.

1) Montrer que $\langle,\rangle$ est bien défini et que c'est un produit scalaire sur E.
2) Montrer que si $f\in L^2(I,\mathbb{R})$, alors $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\right)^2\leq\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)dt\right)$. Préciser le cas d'égalité.

2) Familles et bases orthonormées.

Définition : soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien, soit $(x,y)\in E^2$. Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille d'éléments de E.

- x et y sont orthogonaux si et seulement si $\langle x,y\rangle=0$.
- $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale si et seulement si $(i\neq j)\Rightarrow\langle x_i,x_j\rangle=0$
- $(x_1,...,x_n)$ est orthonormée si et seulement si elle est orthogonale et $\forall i\in[\![1,n]\!],\|x_i\|=1$.

Propriétés (*) : soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x_1,...,x_n)$ une famille d'éléments de E.

- Si $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale et que $\forall i\in[\![1,n]\!],x_i\neq 0_E$, alors $(x_1,...,x_n)$ est libre.
- Si $(x_1,...,x_n)$ est orthogonale, alors $\|x_1+x_2+...+x_n\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$ (Pythagore).
- Si $(x_1,...,x_n)$ est orthonormée, elle est libre.

Existence de bases orthonormées : on suppose que $(E,\langle,\rangle)$ est un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de E.

Preuve rapide : on fait une récurrence sur la dimension de l'espace E. Pour l'hérédité, si $\dim(E)=n+1$, on prend une base $B=(e_1,...,e_{n+1})$ de E. Avec l'hypothèse de récurrence, on a une base orthonormée $(c_1,...,c_n)$ de $F=Vect(e_1,...,e_n)$.

On cherche $f_{n+1}=e_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k$, orthogonal à $c_1,...,c_n$. On trouve $f_{n+1}=e_{n+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1},c_i\rangle c_i$ avant de le diviser par sa norme pour obtenir c_{n+1} et $C=(c_1,...,c_{n+1})$ convient.

Coordonnées dans une base orthonormée (*) : soit $\left(E,\langle\ \rangle\right)$ un espace vectoriel euclidien**.**

Alors soit $B=\left(e_1,...,e_n\right)$ une base **orthonormée** de E. Soit $x=\sum_{k=1}^{n}x_k e_k$ et $y=\sum_{k=1}^{n}y_k e_k$:

- $\forall i\in\{1,2,..,n\}, x_i=\langle x,e_i\rangle$ (dans une base **orthonormée**, les coordonnées d'un vecteur sont les produits scalaires avec les vecteurs de base), donc $x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$
- $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ et $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$
- Si $X=M_B(x)$ et $Y=M_B(y)$, alors $\langle x,y\rangle=X^T\,Y=Y^T\,X$ (ici, une matrice à une ligne et une colonne est confondue avec son unique coefficient et considérée comme un réel).
- Si $B=\left(e_1,...,e_n\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on confond dans cette base tout vecteur $x\in\mathbb{R}^n$ avec sa matrice X dans B. Alors $\langle x,y\rangle=x^T y=X^T\,Y$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.
- Si $u\in L(E)$ et $M=M_B(u)$, alors $\forall i,j\in[\![1,n]\!], M_{i,j}=\langle u(e_j),e_i\rangle$

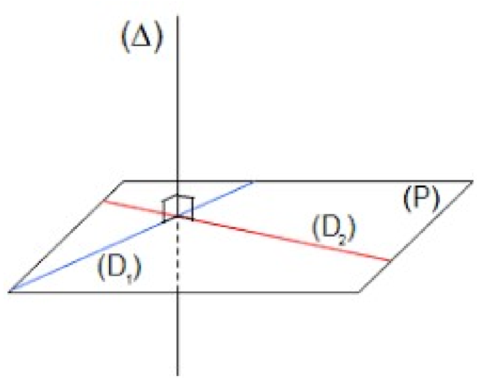
Explications :

3) Orthogonalité. Supplémentaire orthogonal.

Orthogonal (*) : soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien et A,B sous-ensembles de E.

- L'orthogonal de A est le sous-espace vectoriel de E défini par $A^{\perp}=\{x\in E,\forall a\in A,\langle a,x\rangle=0\}$.
- A et B sont orthogonales lorsque $\forall x\in A,\forall y\in B,\langle x,y\rangle=0$. On note $A\perp B$.
- Si $A\perp B$, alors $A\subset B^{\perp}$, mais on n'a pas égalité en général.
- Si $(a_1,..,a_k)$ est une base de A et si $x\in E$, on a $x\in A^{\perp}\Leftrightarrow\forall i\in\{1,2,..,k\},\langle x|a_i\rangle=0$.
- Si A **est un espace vectoriel de dimension finie,** alors $A\oplus A^{\perp}=E$.
- Si E est de dimension finie, $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}=A$.
- Si E est de dimension finie, toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Remarque :



On a ici $D_1\perp\Delta$, $\Delta^{\perp}=P$ et $D_1\subset\Delta^{\perp}$, mais $D_1\neq\Delta^{\perp}=P$

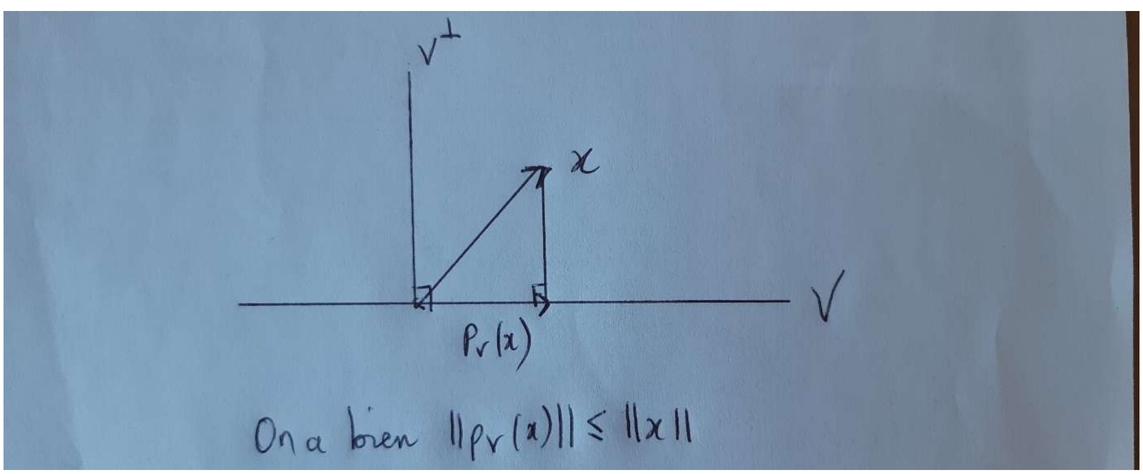
B) Projection orthogonale et distance dans un espace préhilbertien

1) Projection orthogonale.

Projection orthogonale (*) : Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose que V est de dimension finie (ainsi $V \oplus V^{\perp} = E$). Soit $x \in E$.

- La projection orthogonale p_V sur V est la projection sur V parallèlement à $V^{\perp}$.
- Si $x = a + b$, avec $a \in V$ et $b \in V^{\perp}$, alors $p_V(x) = a$.
- Soit $(e_1,..,e_p)$ une base orthonormée de V. Alors $p_V(x) = \sum_{i=1}^{p} \left\langle x, e_i \right\rangle e_i$.
- Si $(f_1,..,f_p)$ est une base orthogonale de V, on obtient $p_V(x) = \sum_{i=1}^{p} (x / f_i) \frac{f_i}{\left\| f_i \right\|^2}$
- Si E est euclidien, $V^{\perp}$ est de dimension finie et $p_V + p_{V^{\perp}} = Id_E$. Lorsque $V^{\perp}$ est de petite dimension, il est souvent plus simple de déterminer $p_{V^{\perp}}$.

Remarque : inégalité de Bessel. Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose que V est de dimension finie. Soit $x \in E$ .Alors $\left\| p_V(x) \right\| \le \left\| x \right\|$.

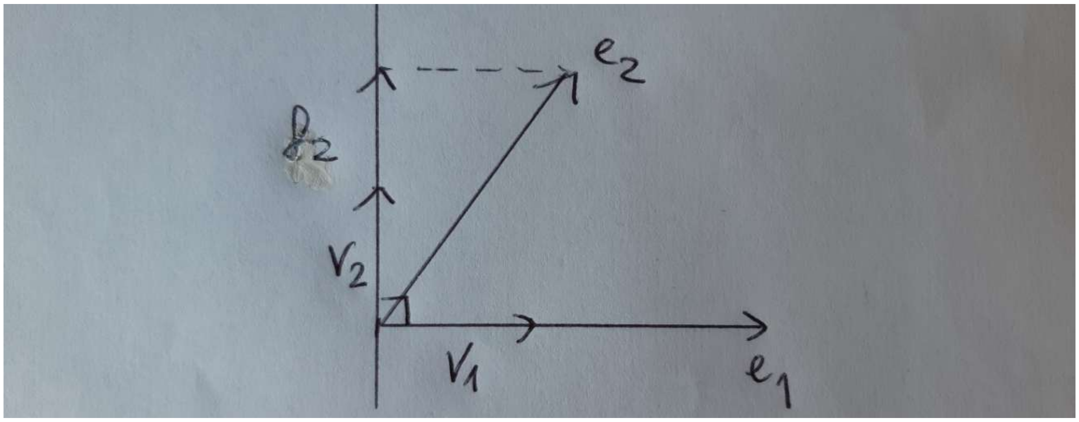


Preuve :

Orthonormalisation de Gram-Schmidt (*) : Soit $(e_1,...,e_n)$ une famille **libre** d'éléments d'un espace préhilbertien E.
Si $k \in [\![1,n]\!]$, soit $F_k = Vect(e_1,...,e_k)$. $F_k^{\perp}$ est orthogonal de F_k dans F_{k+1} (ainsi, $\dim\left(F_k^{\perp}\right)=1$).
Alors :

- Il existe une famille orthogonale $(f_1,...,f_n)$ de vecteurs non nuls de E tels que $\forall k \in [\![1,n]\!], Vect(e_1,...,e_k) = Vect(f_1,...,f_k)$. De plus, on peut prendre $f_1 = e_1$ et, pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, $f_{k+1} = e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1}) = p_{F_k^{\perp}}(e_{k+1})$.
- Il existe une famille orthonormée $(V_1,...,V_n)$ de E (obtenue en prenant $V_k = \dfrac{f_k}{\|f_k\|}$) telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], Vect(e_1,...,e_k) = Vect(V_1,...,V_k)$.

Voici ce que cela donne dans le plan :



Remarques :

- Si on cherche en pratique une base orthonormée d'un espace vectoriel E de petite dimension (2 ou 3), on prend une base de E et on l'orthogonalise avec ce procédé.
  On prend $f_1 = e_1$, puis on cherche $f_2 = e_2 + \alpha e_1$ orthogonal à f_1, et enfin $f_2 = e_3 + \beta e_1 + \gamma e_2$ orthogonal à e_1, e_2.
- On divise ensuite les vecteurs obtenus par leur norme pour obtenir une base orthonormée.
  À chaque fois, on a deux possibilités pour V_k : on peut prendre $\dfrac{f_k}{\|f_k\|}$ ou $-\dfrac{f_k}{\|f_k\|}$.

Exemple : soit $E=\mathbb{R}[X]$. On pose $\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

1) Vérifier rapidement que c'est un produit scalaire.
2) Calculer $\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}dt$ pour $n\in\mathbb{N}$.
3) Déterminer une base orthonormée (P_0,P_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ telle que $\deg(P_0)=0$ et $\deg(P_1)=1$.

Trouver un projeté orthogonal (*) : Soit $(E,\langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $x \in E$. Pour calculer $p_V(x)$, on peut :

- Ecrire $x = a + b$, avec $a \in V$ et $b \in V^{\perp}$. On a alors $p_V(x) = a$.
- Si on connait une base $(V_1, .., V_k)$ de V, Chercher $a = a_1 V_1 + ... + a_k V_k \in V$ tel que $x - a \in V^{\perp}$, c'est-à-dire $\forall i \in \{1,...,k\}, \langle x - a, V_i \rangle = 0$. Intéressant si V est de petite dimension et qu'on veut le projeté orthogonal d'un seul vecteur car il n'est pas nécessaire d'orthonormaliser $(V_1, .., V_k)$.
- Utiliser la formule $p_V(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x / V_i \rangle V_i$ à condition d'avoir une base orthonormée (ou orthogonale) de V (qu'on peut obtenir avec Gram-Schmidt, ce qui est vite pénible). Intéressant si V est de petite dimension et qu'on doit calculer l'image de plusieurs vecteurs, ou qu'on a une base orthonormée de V.

Exemples :

1) On prend $E = M_n(\mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}$.
   a) Montrer $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \exists! (S, A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R}), M = S + A$,
   b) Montrer que $(S_n(\mathbb{R}))^{\perp} = A_n(\mathbb{R})$
   c) Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$.

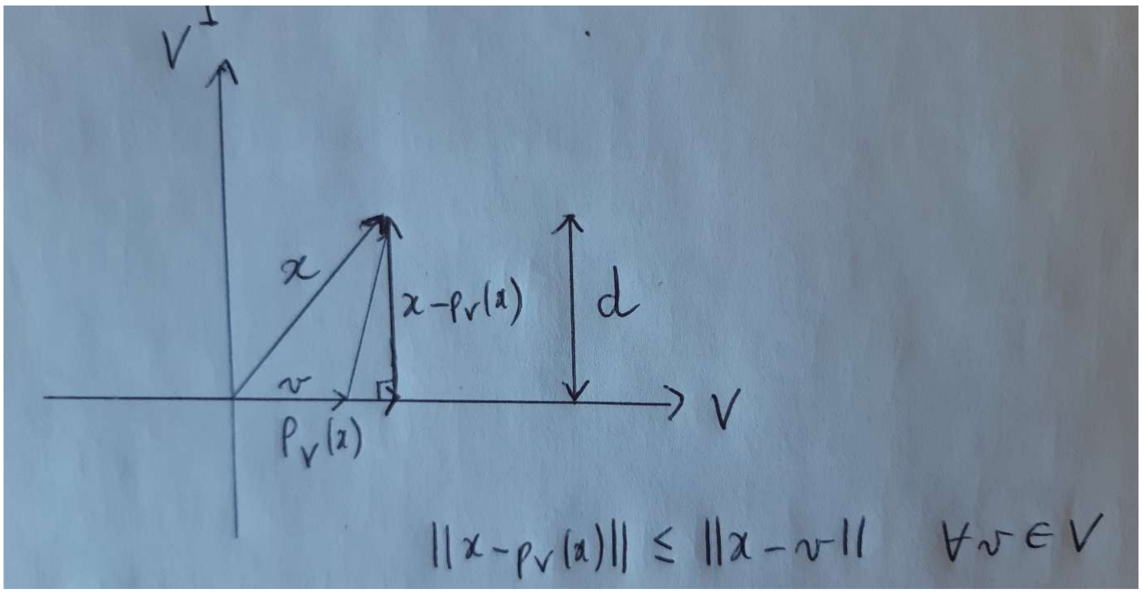
2) On reprend le produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ sur $E=\mathbb{R}[X]$. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

3) Donner dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la projection orthogonale sur $V : x + y - 2z = 0$.

2) Distance à un sous-espace vectoriel.

Distance à sous-espace de dimension finie (*) : Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose que V est de dimension finie. Soit $x \in E$.

- La distance de x à V est $d(x,V) = \inf_{v\in V}(\|x-v\|)$. Elle vaut $d(x,V) = \|x - p_V(x)\|$ et on a $d^2(x,V) = \|x\|^2 - \|p_V(x)\|^2$.
- On a de plus $\forall v \in V, \|x-v\| = d(x,V) \Leftrightarrow v = p_V(x)$.
- Cette borné inférieure est toujours atteinte et c'est un minimum.
- Si E est un espace euclidien, $p_V + p_{V^\perp} = Id_E$, donc $d(x,V) = \|x - p_V(x)\| = \|p_{V^\perp}(x)\|$



Exemples :

1) On prend $E = M_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\inf_{A\in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M_{ij} - A_{ij}\right)^2$

2) On reprend le produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ sur $E = \mathbb{R}[X]$. Déterminer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty}\left(t^2 - at - b\right)^2 e^{-t}dt$

C) Groupe orthogonal, matrices orthogonales

Ici, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Isométries d'un espace euclidien.

Définition (*) : un endomorphisme f de E est une **isométrie** vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) si et seulement si il conserve la norme : $\forall x \in E, \| f(x) \| = \| x \|$. L'ensemble des isométries de E est noté $O(E)$ et appelé groupe orthogonal.

Définitions : Soit V un sous-espace vectoriel de E.

- **La symétrie orthogonale** s_V par rapport à V est la symétrie par rapport à V parallèlement à $V^{\perp}$. Ainsi, si $x = a + b$, avec $a \in V$ et $b \in V^{\perp}$, on a $s_V(x) = a - b$
- Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E

Dessins en dimension 2 et 3 :

Propriété : les symétries orthogonales (et donc les réflexions) sont des éléments de $O(E)$.

Preuve : elles conservent la norme avec Pythagore.

Remarque : Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors $s_V = 2p_V - Id_E$

Exemple : les projections orthogonales sont-elles des isométries vectorielles ?

Proposition : soit $f \in L(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f \in O(E)$
- f conserve la produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Preuve : par double implication.

Proposition (*) : soit $f \in L(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f \in O(E)$
- Pour toute base orthonormée B de E, $f(B)$ est orthonormée.
- Il existe une base orthonormée B de E telle que $f(B)$ est orthonormée.

Preuve : à faire.

Propriétés :

- Une isométrie de E est ainsi toujours bijective.
- $(O(E), \circ)$ possède une structure de groupe :
  - $Id_E \in O(E)$
  - Si $u, v \in O(E)$, alors $u \circ v \in O(E)$ et $u^{-1} \in O(E)$

Preuve rapide : à faire.

Propriété (*,PV) : soit $f \in O(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f. Alors $f(F) = F$ et $F^{\perp}$ est stable par f.

Preuve : avec la restriction de f à F, qui est bijective.

2) Matrices orthogonales.

Définition (*) : On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $M^T M = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonales de taille n est noté $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition (*) : soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $(C_1,...,C_n)$ les colonnes de M. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $M \in O_n(\mathbb{R})$
2) $(C_1,...,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
3) $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = M^T$.

Preuve : soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $C = (C_1,...,C_n)$, où $C_1,...,C_n$ sont les colonnes de M. Alors $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \left(M^T M\right)_{i\,j} = \left\langle C_i, C_j \right\rangle$, où $\langle\ \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Exemples : les matrices suivantes sont-elles orthogonales ?

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \; ; \; B = -I_n \, , \; C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Propriété (*) : soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $(L_1,...,L_n)$ les lignes de M. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $M \in O_n(\mathbb{R})$
2) $M^T \in O_n(\mathbb{R})$
3) $(L_1,...,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Preuve : on montre $1) \Leftrightarrow 2)$.
Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = M^T$, donc $MM^T = I_n$.

Proposition : soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $B = (e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $C = (f_1,...,f_n)$ une famille de vecteurs de E. Soit $P = M_B(C)$ la matrice des vecteurs de C dans B. Alors C est une base orthonormée de E si et seulement si $P \in O(n)$. En particulier, si P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre, alors $P^{-1} = P^T$.

Preuve : par double implication. Si $(C_1,...,C_n)$ sont les colonnes de M, on a $\left\langle f_i, f_j \right\rangle = \left\langle C_i, C_j \right\rangle$

Proposition (*) : soit $f \in L(E)$. Soit B une base orthonormée de E. Alors $f \in O(E)$ si et seulement si $M_B(f) \in O(n)$.

Preuve : Si $f \in O(E)$, elle transforme B en une base orthonormée de E, donc $M_B(f) = M_B(f(B)) \in O(n)$. Réciproquement, cela marche aussi.

Proposition : $(O(n),.)$ possède une structure de groupe. En particulier :

- $I_n \in O(n)$
- Si $A, B \in O(n)$, alors $AB \in O(n)$ et $A^{-1} \in O(n)$

Preuve : à faire rapidement.

Propriétés :

- soit $M \in O(n)$. Alors $|\det(M)| = 1$.
- Si $f \in O(E), |\det(f)| = 1$.

Remarque : la réciproque est fausse.

Définitions :

- L'ensemble des matrices $M \in O(n)$ telles que $\det(M) = 1$ est noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$ et appelé groupe spécial orthogonal d'ordre *n*.
- On note aussi $SO(E) = \{ f \in O(E), \det(f) = 1 \}$.

Définition : soit E un espace euclidien de dimension n. Orienter l'espace E, c'est choisir une base orthonormée B de E que l'on définit comme directe. Dans ce cas, si C est une autre base orthonormée de E, alors C est directe si et seulement si $\det(P_{B,C}) = 1$. Elle est indirecte sinon. Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est considérée comme directe, ce qui oriente toutes les autres bases de $\mathbb{R}^n$.

3) Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien orienté de dimension 2 (un plan).

Proposition (*) : les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ sont (avec $\theta \in \mathbb{R}$, ou $\theta \in [0, 2\pi[$) :

- Les matrices de rotations $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, qui sont les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$
- Les $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Preuve : si on prend $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $\begin{matrix} a = \cos(\theta) \\ b = \sin(\theta) \end{matrix}$ et $\begin{matrix} c = \cos(\alpha) \\ d = \sin(\alpha) \end{matrix}$, avec $\theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
D'où le résultat en calculant les déterminants.

Propriété : $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta+\theta'}$.

Propriété-Définition : soit B une base orthonormée directe de E. Soit $f \in L(E)$. Alors $f \in SO(E)$ si et seulement si la matrice de *f* dans la base B est $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
θ est alors unique modulo 2π et ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On dit alors que f **est la rotation d'angle** θ**.**

Preuve : θ ne dépend pas de la base choisie car on peut remarquer que la matrice de passage est dans $SO_2(\mathbb{R})$ et commute avec R_θ. Donc la matrice est R_θ dans toute base orthonormée directe.

Remarque : expliquer pourquoi il s'agit bien d'une rotation.

Exemple : déterminer la nature de l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée est $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. C'est la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Remarque (*) : les rotations du plan $\mathbb{R}^2$ sont de bons exemples d'applications linéaires n'admettant pas de vecteur propre. En particulier, lorsque $\theta \neq 0[\pi]$, elles ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$ (on a $Sp_{\mathbb{C}}(r_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$).

Propriété-définition : soient $u, v \in E$, deux vecteurs non nuls. On pose $x = \frac{u}{\|u\|}$ et $y = \frac{v}{\|v\|}$.
Alors il existe une unique rotation $r \in SO(E)$ telle que $r(x) = y$.
L'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ de cette rotation est alors une mesure de l'angle orienté (u, v)

Preuve : on obtient (x, a) et (y, b) deux bond de E (on prend $-a$ si (x, a) est indirecte).
Et pour l'existence, on prend r qui envoie x sur y et a sur b. Elle transforme une bond en une bond donc c'est la matrice d'une rotation.
Pour l'unicité, on doit avoir $y = \cos\theta x + \sin\theta a = \cos\theta' x + \sin\theta' a$ et on a l'unicité.

Propriété-Définition : soit $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E. Soit $f \in L(E)$. Alors $f \in O(E) \setminus SO(E)$ si et seulement si la matrice de *f* dans la base B est $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. f est alors la réflexion par rapport à la droite vectorielle dirigée par $u_{\theta/2} = \cos\frac{\theta}{2} e_1 + \sin\frac{\theta}{2} e_2$.

Preuve : c'est vrai si $\theta = 0[2\pi]$. Sinon : f est une involution. On a une symétrie et $(\ker(f-id)) \oplus \ker(f+id) = E$. On montre avec un système que $(\ker(f-id)) = Vect(\{u_{\theta/2}\})$ puis $\ker(f+id) \perp \ker(f-id)$ en calculant $\langle x, y \rangle$ pour $x \in \ker(f+id)$ et $y \in \ker(f-id)$.

Remarque : la matrice d'une rotation dans le plan ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. C'est différent pour une réflexion : comme $(\ker(f-id)) \oplus \ker(f+id) = E$, f est diagonalisable et sa matrice dans une base bien choisie est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : les automorphismes orthogonaux du plan euclidien sont les réflexions et les rotations.

D) <u>Endomorphismes et matrices symétriques. Théorème spectral.</u>

Ici, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1) <u>Le théorème spectral</u>

Définition (*) : Soit $f \in L(E)$. On dit que f est **un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)** si et seulement si $\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est noté $S(E)$.

Remarque : $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Proposition (*,PV) : soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors p est autoadjoint si et seulement si p est une projection orthogonale.

Preuve :
$\Rightarrow$ On prouve $\ker(p) = (\mathrm{Im}(p))^\perp$.
$\Leftarrow$ On prouve $\forall x, y \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ en décomposant.

Proposition (*) : Soit B une base **orthonormée** de E et $u \in L(E)$. Alors u est autoadjoint si et seulement si $M_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$.

Preuve : à faire. Si $M = M_B(u)$, alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!], M_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$.

Propriété : Soit $f \in L(E)$. On suppose que f est autoadjoint Alors les sous-espaces propres de f sont orthogonaux entre eux.

Preuve : à faire.

Théorème spectral admis (*) : Soit $f \in L(E)$. On suppose que f est autoadjoint. Alors f est diagonalisable et il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f (autrement dit, il existe une base B orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale).

Idée de preuve : on procède par récurrence et on prend une valeur propre complexe et on prouve qu'elle est réelle (si $AX = \lambda X$, avec $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(AX)^T \overline{X} = \lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = X^T \overline{AX} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$), puis on applique l'hypothèse de récurrence à $\left(Vect(e_1)\right)^{\perp}$, où e_1 est un vecteur propre associé.

Corollaire : théorème spectral (*) : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, symétrique **réelle**. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et il existe une matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P D P^{-1} = P D P^T$.
De plus, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

Preuve : soit a canoniquement associé à $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit B une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Par théorème spectral, il existe une base orthonormée C de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de a. Ces derniers constituent une base orthonormée de vecteurs propres de A. Par changement de base, $A = P D P^{-1}$ et $P = P_{B,C} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = P^T$.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : le théorème n'est vrai que pour les matrices symétriques réelles. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable avec $\chi_A = X^2$.

Exemple : déterminer les matrices $A \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = I_n$.

2) <u>Matrices et endomorphismes positifs.</u>

Définition (*) : soit $u \in S(E)$. Alors :

- u est **autoadjoint positif** si et seulement si $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$. On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs.
- u est **autoadjoint défini positif** si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0$. On note $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs

Exemple (*) : soit $A \in S_n(\mathbb{R}), X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Expliciter $X^T AY$ en fonction des coefficients de ces trois matrices.

Remarques (*) :

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $\langle\ \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = Y^T AX = X^T AY = \langle X, AY\rangle$
2) soit B une base orthonormée de E euclidien. Soit $u \in S(E)$. Soit $A = M_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $x, y \in E$, $X = M_B(x)$, $Y = M_B(y)$. Alors $\langle u(x), y\rangle = X^T\, AY$ et $\langle u(x), x\rangle = X^T\, AX$

Définition (*) : soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

- A est **symétrique positive** si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T AX \geq 0$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de taille n.
- A est **symétrique définie positive** si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T AX > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n.

Proposition (*,PV) : Soit $u \in S(E)$. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

- $u \in S^+(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$
- $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

Preuve : on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u, et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u tels que $\forall k \in [\![1, n]\!], u(e_k) = \lambda_k e_k$ et $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Alors $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$ et on a tous les résultats pour u.

Corollaire (*) : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

- $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$
- $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

Preuve : pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, on prend a canoniquement associée à A, alors $a \in S(E)$. Alors $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a \in S^+(E) \Leftrightarrow Sp(a) = Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Remarque (*,PV) : si $A \in S_n(\mathbb{R})$, si on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A, il vient $\lambda_n = \max\limits_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \dfrac{X^T AX}{\|X\|^2}$ (et de même $\lambda_1 = \min\limits_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \dfrac{X^T AX}{\|X\|^2}$).

Preuve : on a deux possibilités :

- Utiliser a canoniquement associée à A et $\langle a(x), x\rangle = X^T\, AX$.
- Raisonner matriciellement : $A = PDP^T$ puis $X^T AX = \left(P^T X\right)^T D\left(P^T X\right) = Y^T DY$, avec ensuite $\|Y\|^2 = \|X\|^2$.

Remarque : si $u \in S(E)$, et qu'on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u, il vient de même $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$ et $\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$.

Preuve : non faite.

Exemple (*) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.
On a $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$ car $X^T\ A^T A\, X = \|AX\|^2 \geq 0$.