10-Intégrales à paramètres

On note $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Objectif : étudier des fonctions de la forme suivante :

- $f(x)=\int_0^{+\infty} \arctan(t)e^{-xt}dt$
- $L(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ (transformée de Laplace).
- $F(f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ (transformée de Fourrier)

On s'intéresse à leur existence, leur continuité, leur dérivabilité et leurs limites aux bornes.

A) Rappels sur les intégrales

1) Convergence des intégrales généralisées.

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f:I\to K$

Rappels : Une fonction f est **intégrable** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur I et que $\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente.

Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f(t)\,dt$ est convergente.

Pour une fonction à valeurs positives, l'intégrabilité équivaut à la convergence de $\int_I f(t)\,dt$.

Intégrales de référence : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors :

- $t\to\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha<1$
- $t\to\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>1$
- $t\to\ln(t)$ est intégrable en 0^+.
- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors $t\to e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>0$.

Outils pour étudier l'intégrabilité (*) : on s'intéresse à l'intégrabilité de f sur $I=[a,b]$, $I=]a,b]$, $I=[a,b[$ ou $I=]a,b[$.

1) On commence par dire que f est continue (par morceaux) sur I.
2) On étudie ce qui se passe aux bornes ouvertes de l'intervalle. On peut :
   - Utiliser une **majoration** : $\forall t\in I, 0\le|f(t)|\le g(t)$ et g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

- Utiliser une comparaison :
  - Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, g est intégrable en b **si et seulement si** f est intégrable en b.
  - Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o\big(g(x)\big)$ et g est intégrable en b, **alors** f est intégrable en b.
- Si $b \in \mathbb{R}^*$, étudier l'intégrabilité en b en posant $u = b - h$, pour se ramener à l'étude en 0 de $h \mapsto f(b-h)$. De même si $a \in \mathbb{R}^*$ en posant $u = a + h$.

3) On peut aussi faire une intégration par parties ou un changement de variable.

Exemples :

1) On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) e^{-xt}\, dt$. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t^2 + x^2)}{1+t^2}\, dt$. Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Le théorème de convergence dominée et applications.

Théorème de convergence dominée (*, admis) : soit I un intervalle quelconque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K et $f : I \to K$ On suppose :

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.
2) il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \le \varphi(t)$ **(hypothèse de domination = hypothèse clé).**
3) Les f_n et f sont continues par morceaux sur I (hypothèse accessoire).

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_I f(t)\, dt$

Exemple : limite et équivalent de $I_n = \int_0^1 t^n \ln\left(1 + t^n\right) dt$ (poser $u = t^n$).

Remarque : dans tous ces exemples, on fait tendre le paramètre **entier** n vers $+\infty$. On veut étendre cette idée et étudier ce qui se passe quand un paramètre **réel** x tend vers $+\infty$

Rappel : caractérisation séquentielle de la limite : soit a un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.Alors $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de I telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} b$.

Ainsi, pour montrer $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, il suffit donc de montrer que pour toute suite (x_n)qui tend vers $+\infty$, on a $f(x_n) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

Théorème de convergence dominée à paramètre continu (*) : soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et a une extrémité, finie ou infinie, de A. Soit $g : \begin{array}{l} A \times I \to K \\ (x,t) \mapsto g(x,t) \end{array}$. On suppose que

- $\forall t \in I, g(x,t) \underset{x \to a}{\to} l(t)$
- Pour tout $x \in A, t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto l(t)$ sont continues par morceaux sur I (accessoire)
- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |g(x,t)| \leq \varphi(t)$

Alors l est intégrable sur I et $\int_I g(x,t)\, dt \underset{x \to a}{\to} \int_I l(t)\, dt$.

Preuve : avec la caractérisation séquentielle de la limite. On prend une suite (x_n) qui tend vers a et on pose $g_n(t) = g(x_n, t)$ et on applique le théorème de convergence dominée.

Remarque : si $A = \mathbb{R}_+$ et qu'on étudie la limite de $f(x) = \int_I g(x,t)\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit d'avoir la domination pour $x \in [c, +\infty[$, avec > 0.

Exemples (*) :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t^2 + x^2)}{1 + t^2} dt$. Etudier la limite de $h(x)$ en $+\infty$.
2) Déterminer la limite et un équivalent de $f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) e^{-xt} dt$ en $+\infty$. On trouve $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ en posant $u = xt$ ou avec une IPP.

B) Intégrales à paramètres

Dans ce paragraphe, A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g est une fonction définie de $A \times I$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Continuité des intégrales à paramètres :

Théorème de continuité des intégrales à paramètre (*) : On suppose que :

1) Pour tout $t \in I$, $x \to g(x,t)$ est continue sur A.
2) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |g(x,t)| \leq \varphi(t)$ **(domination, hypothèse clé).**
3) Pour tout $x \in A$, $t \to g(x,t)$ est continue par morceaux sur I (accessoire).

Alors la fonction $f : x \to \int_J g(x,t)\, dt$ est définie et continue sur I.

Idée de preuve : Avec la caractérisation séquentielle de la continuité.
On prend $a \in A$ et (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Alors $f(t) = g(a,t)$ et $f_n(t) = g(x_n, t)$ et on applique le théorème de convergence dominée.

Remarques :

- l'hypothèse de domination est nécessaire : on prend $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}dt$. On a $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{\pi}{2}$ si $x>0$, non continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La continuité est locale. Il suffit donc d'avoir l'hypothèse de domination sur tout segment de A ou sur des intervalles qui « recouvrent » A.

Exemples (*) :

1) On considère $f(x)=\int_0^1 \cos\left(\sqrt{xt}\right)dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2) On considère $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Soit enfin $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t)}{t(1+t^2)}dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) <u>Dérivation des intégrales à paramètres :</u>

Définition : pour $t\in I$ fixé, on pose $h(x)=g(x,t)$.

1) On dit que g admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable si et seulement si h est dérivable en x et on note $h'(x)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$
2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Lorsque h est k fois dérivable en x, on note $h^{(k)}(x)=\frac{\partial^k g}{\partial^k x}(x,t)$

Théorème de dérivation des intégrales à paramètres (*) : On suppose que :

1) Pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.
2) Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est C^1 sur A.
3) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall t\in I,\forall x\in A,\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\le\varphi(t)$.
4) Pour tout $x\in A$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I (accessoire).

Alors la fonction $f\ :x\to\int_I g(x,t)\,dt$ est définie et C^1 sur A. De plus, $f'(x)=\int_J\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$

Remarque (*) : Il suffit d'avoir l'hypothèse de domination sur tout segment de A ou sur des intervalles qui « recouvrent » A.

Exemples (*) :

1) On considère $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{1+t^3}\,dt$. Montrer que f est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) On considère $f(x)=\int_0^{+\infty}\arctan(t)e^{-xt}\,dt$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
3) Soit enfin $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$. Montrer que f est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$.

Utiliser $|\sin(xt)|\le|x|t$.

Théorème (*) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que :

1) Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est C^n sur A.
2) Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, pour tout $x\in A$, $t\mapsto\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I.
3) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall t\in I,\forall x\in A,\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right|\le\varphi(t)$.
4) Pour tout $x\in A$, $t\mapsto\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (accessoire)

Alors la fonction $f\ :x\to\int_J g(x,t)\,dt$ est définie et C^n sur I.

De plus, $\forall k\in[\![1,n]\!], f^{(k)}(x)=\int_J\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\,dt$

Remarques :

- pour montrer que f est C^∞, on prouve qu'elle est C^n pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$.
- Les conclusions restent valables quand les hypothèses de domination sont seulement vérifiées sur tout segment de A.

Exemple : transformée de Fourier. Soit g continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall k\in\mathbb{N},t\mapsto t^k g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-ixt}\,dt$. Montrer que f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer ses dérivées.

Exercice (*,PV) : On pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$,avec $x\in\mathbb{R}$.

Déterminer le domaine de définition D de Γ et montrer que Γ est continue sur D.

En plus :

1) Calculer $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
2) Montrer que Γ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et préciser $\Gamma^{(k)}(x)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,+\infty[$.