11-Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, on pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) Structure d'un espace vectoriel normé.

1) Norme dans un espace vectoriel

Définition (*) : soit E un $K-$espace vectoriel et N une application de E dans $\mathbb{R}$. Alors N est une norme sur E si et seulement si :

- $\forall u \in E, N(u) \geq 0$
- $\forall u \in E, N(u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$ (séparation)
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (homogénéité)
- $\forall u, v \in E, N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire)

Un espace vectoriel normé est alors un espace vectoriel muni d'une norme.

Propriété (rappel) : soit $k \in \mathbb{R}_+$. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On note $kA = \{k\,x, x \in A\}$. Alors $\sup(kA) = k \sup(A)$.

Exemples (rappels) :

- soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors l'application définie sur E par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ associée à ce produit scalaire est une norme sur E. C'est la norme euclidienne associée.
- Si I est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on note $B(I,K)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I à valeurs dans K.
  On définit sur $B(I,K)$ la norme infinie par $\forall f \in B(I,K), \|f\|_{\infty,I} = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$.
  $\| \ \|_{\infty,I}$ est une norme sur $B(I,K)$.

Exemples (*) :

a) Dans $\mathbb{R}^p$, soit $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$. On définit $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} x_k^2}$.
   et $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq p}(|x_k|)$. Ce sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Regarder ce que cela donne pour $x = e_1 + e_2$.

b) En particulier, le module (ou la valeur absolue dans $\mathbb{R}$) est une norme sur K.

c) Dans $M_p(\mathbb{R})$, on définit $\|M\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{p} |M_{ij}|$ et $\|M\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i,j \leq p} |M_{ij}|$. Ce sont des normes.
   Calculer la norme de I_p pour chacune des deux normes.

Propriété : soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x, y \in E$. Alors :

- $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

Preuve : à expliquer.

Définition : soit $(E,\| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soient $x, y \in E$. La distance entre x et y est alors égale à $d(x,y) = \|x-y\|$.

2) Suite dans un espace vectoriel normé.

Soit $(E,\| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

Définition :

- Soit A une partie de E. Alors A est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq M$.
- Soit (x_n) une suite d'éléments de E. Alors (x_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$.

Dessin : dans le plan usuel pour la norme euclidienne.

Définition : On considère une suite (x_n) d'éléments de E et $a \in E$. On dit que (x_n) converge vers a quand n tend vers l'infini et on note $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$ si et seulement si $\|x_n - a\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ (c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - a\| \leq \varepsilon$).

Remarques :

- Il y a unicité de la limite si elle existe.
- (x_n) diverge si et seulement si $\forall a \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|x_n - a\| > \varepsilon$.
- Dans un espace vectoriel normé, une suite ne peut pas tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples (*) :

- On prend $E = \mathbb{C}$ et $\| \ \| = | \ |$ (le module). Alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a \Leftrightarrow |x_n - a| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
- On prend $E = M_p(\mathbb{R})$. On se place dans $(E, \| \ \|_\infty)$, avec, pour $M \in E$, $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq p} |M_{ij}|$**.** Etudier la convergence de la suite définie par $M_n = M - \frac{1}{n} I_p$.
- On pose $E = B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_\infty)$. Etudier la convergence la suite (f_n) définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

Propriétés : On considère une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers $a \in E$. Alors (x_n) est bornée et $\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\to} \|a\|$.

Preuve : à expliquer.

Propriétés : soit $(x_n),(y_n)$ deux suites d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E,\| \ \|)$. Soit $\lambda,\mu \in K$. Soit (U_n) une suite d'éléments de K. On suppose $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} b$ et $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} c$. Alors :

- $\lambda x_n + \mu y_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda a + \mu b$
- $U_n x_n \underset{n\to+\infty}{\to} ca$

Preuve : non faite.

Rappel-propriété : soit (x_n) une suite d'éléments d'une espace vectoriel normé $(E,\| \ \|)$. Une suite extraite (ou une sous-suite) de (x_n) est une suite de la forme $\left(x_{\varphi(n)}\right)$, où φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.
Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \in E$, alors toute suite extraite de (x_n) tend également vers a.
Ainsi, si deux suites extraites de (x_n) tendent vers des limites différentes, alors (x_n) n'a pas de limite.

Exemple : soit $A \in M_p(K)$. On suppose $A^n \underset{n\to+\infty}{\to} B$. Alors $A^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} B$

Propriété : soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E,\| \ \|)$. On suppose que (x_{2n}) et (x_{2n+1}) tendent vers une même limite $a \in E$. Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$.

3) <u>Equivalence des normes</u>

Définition (*) : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** si et seulement si il existe deux constantes $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x \in E, \begin{cases} N_1(x) \le aN_2(x) \\ N_2(x) \le bN_1(x) \end{cases}$.

Propriétés : Soit E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.

- Soit $A \subset E$. A est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2.
- Soit (U_n) une suite d'éléments de E. Soit $a \in A$. Alors (U_n) converge vers a pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers a pour la norme N_2.
- En particulier, s'il existe une suite (U_n) qui converge vers $a \in A$ pour la norme N_1 mais ne converge pas vers a pour la norme N_2, alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Preuve : à expliquer.

Exemples :

- On se place dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors si $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.
- On se place dans $E=C([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose $\|f\|_1=\int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes. Avec une fonction chapeau pointu qui tend vers 0 pour une norme mais pas pour l'autre.

Proposition admise (*) : Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Propriété (*) : soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**. Soit $B=(e_1,...,e_p)$ une base de E. Alors on considère une suite (x_n) d'éléments de E. Soit $a\in E$. Alors (x_n) converge vers a si et seulement si (x_n) tend vers a **coordonnée par coordonnée**.
Plus précisément, si $x_n=x_{n,1}e_1+x_{n,2}e_2+...+x_{n,p}e_p$ et $a=a_1e_1+a_2e_2+...+a_pe_p$, alors (x_n) converge vers a si et seulement si $\forall k\in[\![1,p]\!], x_{n,k}\underset{n\to+\infty}{\to}a_k$.

Preuve : en prenant $\|a\|=\max_{1\le k\le p}|a_k|$.

Corollaire (*) : une suite de matrices (M_n) d'éléments de $M_p(K)$ converge vers $M\in M_p(K)$ si et seulement si elle converge vers M coefficient par coefficient, c'est-à-dire que $\forall i,j\in[\![1,n]\!],(M_n)_{ij}\to M_{ij}$.

Preuve : les coefficients sont les coordonnées dans la base canonique de $M_p(K)$.

Exemples :

- prendre la suite (U_n) d'éléments de $\mathbb{R}^3$ définie par $U_n=\left(\frac{1}{n},\frac{n+1}{n},\frac{n^4}{n!}\right)$.
- On pose $D=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, avec $a,b\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k}{k!}\right)$.

Exemple (*) : soit $E=M_p(K)$. Soient $A,B\in E$ et $(A_n),(B_n)$ deux suites de matrices de E telles que $A_n\underset{n\to+\infty}{\to}A$ et $B_n\underset{n\to+\infty}{\to}B$. Alors $A_nB_n\underset{n\to+\infty}{\to}AB$.

Proposition (*,PV) : Soit $A\in M_p(K)$. Alors A est limite d'une suite de matrices inversibles.

Preuve : Dans $M_p(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|M\|_\infty=\max_{1\le i,j\le n}|M_{ij}|$, on prend $A\in M_p(\mathbb{R})$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_n=A+\frac{1}{n}I_p$. Alors $A_n\underset{n\to+\infty}{\to}A$. Pour n assez grand, A_n est inversible.

4) Topologie d'un espace vectoriel normé.

Dans tout ce paragraphe, $(E,\| \|)$ est un espace vectoriel normé.

Définitions : Soit $r>0, a\in E$.

- La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a,r)=\{x\in E, \|x-a\|<r\}$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a,r)=\{x\in E, \|x-a\|\leq r\}$.
- La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble $B(a,r)=\{x\in E, \|x-a\|=r\}$.

Exemple : dessiner les boules ouvertes de centre 0_E et de rayon 1 dans le plan usuel pour les différentes normes $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.

Définition (*) : Soit C une partie (un sous-ensemble) de E. On dit que C est **convexe** si et seulement si $\forall u,v\in C, \forall t\in[0,1], tu+(1-t)v\in C$ (le segment qui relie u et v est tout entier inclus dans C).

Explication et dessins dans le plan : $[A,B]=\{M\in P, \exists t\in[0,1], \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\}$.

Donc $[A,B]=\{M(tx_A+(1-t)x_B, ty_A+(1-t)y_B), t\in[0,1]\}$

On prend $u=\overrightarrow{OA}=(x,y)$ et $v=\overrightarrow{OB}=(x',y')$.

Propriété :

- Les boules (ouvertes et fermées) incluses dans E sont convexes.
- Les sous-espaces vectoriels de E sont convexes.

Preuve : avec $\|tx+(1-t)y\|\leq t\|x\|+(1-t)\|y\|$.

Exemple : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $M_n(\mathbb{R})$.

Définitions (*) : Soit A une partie de E. Soit $a\in A$.

- On dit que a est **intérieur** à A si et seulement si il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\subset A$.
- A est **ouvert** si et seulement si pour tout $a\in A$, il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\subset A$. Cela signifie que A contient une petite boule ouverte autour de chacun de ses points.

Exemples : déterminer si certains sous-ensembles sont ouverts ou pas.

- $]0,1[$; $]0,1]$; $\mathbb{R}$.
- Les boules ouvertes sont des ouverts. Mais pas les boules fermées.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_2(K)$ n'est pas ouvert dans $M_2(K)$ (en prenant $I_2+\varepsilon E_{12}$).

Propriétés :

- Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.
- Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

Preuve : à faire.

Définitions (*) : Soit A une partie de E.

- Soit $a \in E$. On dit que a est **adhérent** à A si et seulement s'il existe une suite (x_n) d'éléments de A tel que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$.
- L'adhérence de A, notée $Adh(A)$ ou $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.
- A est **fermé** si et seulement si pour tout suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $a \in A$, on a $a \in A$

Exemples :

- $[0,1]$; $]0,1]$; $\mathbb{R}$. $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$.
- Les boules fermées et les sphères sont des fermés.
- On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle. Quelle est l'adhérence de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$?

Propriété : Soit A une partie de E. Soit $a \in E$. a est **adhérent** à A si et seulement si $\forall r > 0, B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

Preuve : à ne pas faire. Faire un dessin.

Propriété : Soit A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est fermé
- $E \setminus A$ est un ouvert.

Preuve : à faire.

Propriété :

- Une union finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Preuve : par passage au complémentaire.

Remarques :

- Il y a des ensembles qui ne sont si ouverts ni fermés.
- Il y a des ensembles qui sont ouverts et fermés.

Définition (*) : Soit A une partie de E. Soit $D \subset A$. On dit que D est **dense** dans A si et seulement si pour tout élément $a \in A$, il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a.

Exemple admis : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (tout réel est limite d'une suite de rationnels).

Remarque : si N_1, N_2 sont deux normes équivalents sur E, alors les propriétés topologiques sont les mêmes pour N_1, N_2 (convergence des suites, ouverts, fermés,…)

B) Limite et continuité dans un espace vectoriel normé.

Soient $(E,\| \|_E)$ et $(F,\| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit A un sous-ensemble de E.
Soit $f : A \to F$.

1) Limite en un point.

Définition : f est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M$.

Définition : Soit A une partie de E. Soit a un point de E adhérent à A. Soit $b \in F$ et soit f une application de A dans F.
On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$ si et seulement si $\|f(x)-b\| \underset{x\to a}{\to} 0$
(autrement dit, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-b\|_F \leq \varepsilon$)

Proposition : caractérisation séquentielle de la limite. Soit a un point de E adhérent à A. Soit $b \in F$. Alors $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} b$.

Propriété : opérations sur les limites. Soit a un point de E adhérent à A. Soit $b, b' \in F$ et soient f, g deux applications de A dans F. Soient $\alpha, \beta \in K$.
On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\to} b$ et $g(x) \underset{x\to a}{\to} b'$

- Alors $\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to a}{\to} \alpha\, b + \beta\, b'$
- Soit $h : A \to K$ telle que $h(x) \underset{x\to a}{\to} k$. Alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\to} k\, b$
- Soit B une partie de F tel que b est adhérent à B. Soit $h : B \to G$, où G est un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose $h(y) \underset{y\to b}{\to} c \in G$. Alors $h(f(x)) \underset{x\to a}{\to} c$.

Propriété : On suppose que F est de dimension finie.
Soit a un point de E adhérent à A. Soit $b \in F$ et soit f une application de A dans F. Soit $B = (u_1, ..., u_p)$ une base de F.

Pour $x \in A$, on note $f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) u_k$ (les f_k sont appelées les fonctions coordonnées de f dans B). Alors si $b = \sum_{k=1}^{p} b_k u_k$, on a $f(x) \underset{x\to a}{\to} b \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], f_k(x) \underset{x\to a}{\to} b_k$
(La convergence de $f(x)$ vers b équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée).

Preuve : non faite ; avec la caractérisation séquentielle.

2) Continuité en un point.

Définition : soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{\to} f(a)$.

Proposition : caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $a \in A$ **.**
Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(a)$.

Remarque : pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en a, il suffit de trouver deux suites $(x_n),(y_n)$ qui tendent vers a et telles que $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont des limites différentes. Ainsi,

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = a$ n'est pas continue en $(0,0)$.

3) <u>Continuité sur une partie.</u>

Définition : On dit que f est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout $a \in A$.

Définition : Une application $f : K^n \to K$ est une application polynomiale de n variables si et seulement si c'est une combinaison linéaire de fonctions du type $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$, où $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{N}$.

Exemple : $f(x,y,z) = xy + x^3y^2z$.

Propriétés : Opérations sur les fonctions continues (avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Une somme et une composée de fonctions continues sont continues.
- Un produit de fonctions continues à valeurs dans K est une fonction continue.
- Un quotient de fonctions continues à valeurs dans K dont le dénominateur ne s'annule pas est continue.
- Si $h : A \to K$ et $f : A \to B$ sont continues sur A, alors $h\,f$ est continue sur A.
- Les fonctions polynomiales sont continues sur K^n.
- Lorsque F est dimension finie, f est continue sur A si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F sont continues sur A.

Exemples :
- On définit $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
- $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to e^{xy}(3x^2+y^2) \end{array}$ est continue.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g : y \mapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition : soit $f : E \to F$, continue sur E. Alors :
- Si G est un fermé de F, alors $f^{-1}(G) = \{x \in E, f(x) \in G\}$ est un fermé de E.
- Si O est un ouvert de F, alors $f^{-1}(O) = \{x \in E, f(x) \in O\}$ est un ouvert de E.

Preuve : à faire avec les suites.

Proposition : soit $f : E \to \mathbb{R}$, continue sur E. Alors :

- $O = \{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E
- $F = \{x \in E, f(x) = 0\}$ et $G = \{x \in E, f(x) \geq 0\}$ sont des fermés de E,
- $E \setminus F = \{x \in E, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de E

Preuve : on prouve que $\mathbb{R}_+$ et $\{0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 4\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y - 3z \leq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$. F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

/

Définition : Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

- f est $k-$lipschitzienne sur A si et seulement si $\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.
- f est lipschitzienne sur A si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}_+$ f est $k-$lipschitzienne sur A.

Proposition : toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A.

Preuve : immédiat.

Exemple (*) : Soit $f : \begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ x \to \|x\|_E \end{array}$. Alors f est continue sur E.

Preuve : avec $\|y - x\| \geq \big|\|y\| - \|x\|\big|$, f est 1-lipschtizienne sur E.

4) <u>Continuité en dimension finie</u>

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose E **de dimension finie**. Soit A un sous-ensemble de E. Soit $f : A \to F$.

Théorème des bornes atteintes (*) : On suppose que A est non vide, **fermé et borné**. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors f est bornée sur A et atteint ses bornes (elle admet donc un minimum et un maximum global sur A).

Exemple : si f est continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors elle est bornée.

Proposition (*) : soit $f \in L(E,F)$. Alors f est lipschitzienne, donc continue sur E.

Preuve : On montre qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*, \forall u \in E, \|f(u)\|_F \leq C\|u\|_E$. Soit $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour $u = u_1 e_1 + ... + u_p e_p \in E$, on pose $\|u\|_E = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$. Alors $\|f(u)\|_F \leq M\|u\|_E$, où $M = \max_{1 \leq k \leq n} \|f(e_k)\|_F$. Puis $\|f(x) - f(y)\|_F \leq M\|x - y\|_E$,

Exemples (*) : Soient $A, B, C \in M_n(K)$ et (A_n) une suite d'éléments de $M_n(K)$. On suppose que $A_n \underset{n\to+\infty}{\to} A$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors :

- $Tr(A_n) \underset{n\to+\infty}{\to} Tr(A)$
- $A_n B \underset{n\to+\infty}{\to} AB$ et $P A_n P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\to} P AP^{-1}$
- On suppose $B^n \underset{n\to+\infty}{\to} C$. Montrer que C est la matrice d'un projecteur et que $BC = CB$.
- On note $N(A) = \sup\left\{\|AX\|, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\right\}$. Montrer que $N(A)$ existe et que c'est un maximum.

Définition : soit $E_1, ..., E_p, F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit $f : E_1 \times ... \times E_p \to F$. Alors f est p-linéaire si et seulement si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire que $\forall x_1, .., x_p \in E_1 \times ... \times E_p$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x \to f(x_1, ..., x_{i-1,} x, x_{i+1}, ..., x_p)$ est linéaire.

Proposition : soit $E_1, ..., E_p, F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit $f : E_1 \times ... \times E_p \to F$. Si f est p-linéaire, alors elle est continue sur $E_1 \times ... \times E_p$

Preuve : non faite.

Exemples (*) :

- Si E est euclidien, alors $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ est bilinéaire, donc continue.
- Soit $(A_p), (B_p)$ deux suites d'éléments de $M_n(K)$. On suppose que $A_p \underset{p\to+\infty}{\to} A$ et $B_p \underset{p\to+\infty}{\to} B$ Alors $A_p B_p \underset{p\to+\infty}{\to} AB$. On retrouve ce résultat.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'application $f : \begin{array}{c} M_n(K) \to M_n(K) \\ M \to M^p \end{array}$ est continue.

  En effet, c'est la composée de $g(M) = (M, ..., M)$ qui est linéaire et de $h(M_1, ..., M_p) = M_1 ... M_p$ qui est p linéaire.

Proposition (*) : $\det : M_n(K) \to K$ est continue sur $M_n(K)$.

Preuve : Soit B la base canonique de K^n. Alors $f : (C_1, ..., C_n) \to \det_B(C_1, ..., C_n)$ est $n-$ linéaire donc continue sur $\left(K^n\right)^n$ et $g : M \to \left(C_1, ..., C_n\right)$ est continue avec la convergence coefficient par coefficient. Donc $\det = \det_B \circ g$ est continue sur $M_n(K)$.

Exemple : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.