Programme de colles PCC :

La colle commence obligatoirement par une question de cours. Cela peut être au choix :

- Deux énoncés parmi ceux qui sont proposés sans démonstration (pour au moins un élève du groupe)
- Un énoncé avec sa démonstration (uniquement parmi ceux qui sont exigibles).

Ensuite, le colleur propose un ou plusieurs exercices de son choix.

Du 26/01 au 31/01 (semaine 15)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Fonction génératrice d'une variable aléatoire. Continuité sur $[-1,1]$.
- Lien entre fonction génératrice et espérance finie.

- Définition de produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
- Familles orthogonales et orthonormées. Propriétés. Existence de bases orthonormées en dimension finie.
- Expression des coordonnées et du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée. Traduction matricielle.
- Orthogonal d'un sous espace vectoriel A. Supplémentaire orthogonal si A est de dimension finie.
- Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Définition, expression dans une base orthonormée. Gram-Schmidt.
- Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression à l'aide du projeté orthogonal.
- Isométrie d'un espace euclidien. Caractérisation par la conservation du produit scalaire, par son action sur les bases orthonormées.
- Symétries orthogonales et réflexions.
- Matrice orthogonale. Caractérisation à l'aide de ses colonnes ou de ses lignes.
- Lien entre matrices orthogonales et matrices de passage d'une base orthonormée à une autre.
- Caractérisation des isométries à l'aide de leurs matrices dans une base orthonormée.
- Déterminant d'une matrice orthogonale.
- Description des éléments de $O_2(\mathbb{R})$. Rotations.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, une loi géométrique ou une loi binomiale.
- Inégalité de Markov.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Si f est une isométrie et que $f(F) \subset F$, alors $f(F) = F$ et $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice de Probabilités utilisant la fonction génératrice ou les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.

Tout exercice sur les produits scalaires sauf sur les endomorphismes autoadjoints et les matrices symétriques (orthogonalité, projection orthogonale, distance, isométries, matrices orthogonales sont les bienvenues)

Du 02/02 au 07/02 (semaine 16)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Isométrie d'un espace euclidien. Caractérisation par la conservation du produit scalaire, par son action sur les bases orthonormées.
- Symétries orthogonales et réflexions.
- Matrice orthogonale. Caractérisation à l'aide de ses colonnes ou de ses lignes.
- Lien entre matrices orthogonales et matrices de passage d'une base orthonormée à une autre.
- Caractérisation des isométries à l'aide de leurs matrices dans une base orthonormée.
- Déterminant d'une matrice orthogonale.
- Description des éléments de $O_2(\mathbb{R})$. Rotations.
- Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques). Lien avec les matrices symétriques dans une base orthonormée.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.
- Théorème spectral pour un endomorphisme autoadjoint et pour une matrice symétrique.
- Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.
- Matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation à l'aide de leur spectre.

- Retour sur le théorème de convergence dominée. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
- Théorème de continuité des intégrales à paramètres.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Si f est une isométrie et que $f(F) \subset F$, alors $f(F) = F$ et $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est une projection orthogonale.
- Caractérisation des endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs à l'aide de leur spectre.
- Expression de la plus grande et de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique réelle comme maximum et minimum de $\left\{ \dfrac{X^T A X}{\| X \|^2}, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur espaces euclidiens de seconde année : isométries, matrices orthogonales, endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques, théorème spectral….