Programme de colles PCC :

La colle commence obligatoirement par une question de cours. Cela peut être au choix :

- Deux énoncés parmi ceux qui sont proposés sans démonstration (pour au moins un élève du groupe)
- Un énoncé avec sa démonstration (uniquement parmi ceux qui sont exigibles).

Ensuite, le colleur propose un ou plusieurs exercices de son choix.

Du 23/02 au 28/02 (semaine 17)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques). Lien avec les matrices symétriques dans une base orthonormée.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.
- Théorème spectral pour un endomorphisme autoadjoint et pour une matrice symétrique.
- Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.
- Matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation à l'aide de leur spectre.

- Retour sur le théorème de convergence dominée. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
- Théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- Dérivation, caractère C^n des fonctions définies à l'aide d'une intégrale à paramètre.

- Définition de norme.
- Exemples : norme euclidienne, norme de la convergence uniforme des suites de fonctions, normes dans K^p, dans $M_p(K)$.
- Ensemble borné et suite bornée dans un espace vectoriel normé.
- Suite convergente dans un espace vectoriel normé.
- Opérations sur les limites. Suites extraites.
- Définition de normes équivalentes. Cas d'un espace de dimension finie.
- La convergence et le caractère borné ne sont pas modifiés quand on remplace une norme par une norme équivalente.
- Convergence coordonnée par coordonnées dans une base en dimension finie. Convergence coefficient par coefficient d'une suite de matrices.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est une projection orthogonale.
- Caractérisation des endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs à l'aide de leur spectre.
- Expression de la plus grande et de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique réelle comme maximum et minimum de $\left\{ \dfrac{X^T AX}{\|X\|^2}, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$.
- Toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur les endomorphismes autoadjoints et les matrices symétriques réelles.
Tout exercice sur les intégrales à paramètres.

Du 02/03 au 06/03 (semaine 18)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Dérivation, caractère C^n des fonctions définies à l'aide d'une intégrale à paramètre.

- Définition de norme.
- Exemples : norme euclidienne, norme de la convergence uniforme des suites de fonctions, normes dans K^p, dans $M_p(K)$.
- Ensemble borné et suite bornée dans un espace vectoriel normé.
- Suite convergente dans un espace vectoriel normé.
- Opérations sur les limites. Suites extraites.
- Définition de normes équivalentes. Cas d'un espace de dimension finie.
- La convergence et le caractère borné ne sont pas modifiés quand on remplace une norme par une norme équivalente.
- Convergence coordonnée par coordonnées dans une base en dimension finie. Convergence coefficient par coefficient d'une suite de matrices.
- Boule ouverte, boule fermée d'un espace vectoriel.
- Définition d'ensemble convexe. Cas des boules, des sous-espaces vectoriels.
- Ensemble ouvert dans un espace vectoriel. Intersection finie et réunion quelconque d'ouverts.
- Point adhérent à un ensemble. Adhérence.
- Sous-ensemble fermé. Définition par les suites. Caractérisation par le complémentaire.
- Union finie et intersection quelconque de fermés.
- Ensemble dense dans un autre.
- Limite et continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
- Image réciproque d'un ouvert et d'un fermé par une fonction continue. Cas de $\{x \in E, f(x) > 0\}$, $\{x \in E, f(x) \geq 0\}$ ou $\{x \in E, f(x) = 0\}$.
- Fonctions lipschitziennes, continuité des fonctions lipschitziennes.
- Théorème des bornes atteintes.
- Continuité des applications linéaires en dimension finie.
- Les applications $p-$linéaires sont continues en dimension finie. Cas du déterminant.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.

Les thèmes d'exercices :

En priorité : tout exercice sur les intégrales à paramètres.
Dans un second temps, éventuellement, tout exercice raisonnable sur les espaces vectoriels normés.