12- Indépendance-Couples et suites de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

A) Couple de variables aléatoires

1) Loi conjointe et lois marginales.

Définition (*) : Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω. Alors **la loi conjointe** du couple de variables aléatoires (X,Y) est la donnée des $\mathrm{P}((X=x)\cap(Y=y))$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$. La première **loi marginale** du couple (X,Y) est la loi de X. La seconde loi marginale de (X,Y) est celle de Y.
On note aussi $\mathrm{P}((X=x)\cap(Y=y)) = \mathrm{P}(X=x, Y=y)$.

Remarque : un couple (X,Y) de variables aléatoires peut être vu comme une variable aléatoire discrète $Z=(X,Y)$ à valeurs dans $X(\Omega)\times Y(\Omega)$

Propriété : les lois marginales se déduisent de la loi du couple (X,Y) : on a avec les mêmes notations $\mathrm{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{P}(X=x, Y=y)$

Preuve : à faire. On utilise la formule des probabilités totales pour le système complet $(Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$

Remarque : on a ainsi $\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{P}(Y=y, X=x) = P(X=x)$ et $\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{P}(Y=y / X=x) = 1$.

Exemples :

1) Paul et Louise ont oublié de réviser une partie de leur cours de maths pour le sondage.
   - A la première question, il y a trois réponses possibles et ils répondent au hasard sans se concerter. P et L sont des variables aléatoires qui valent 1 en cas de bonne réponse et 0 sinon. Trouver la loi jointe du couple (P,L) et les lois marginales.
   - Mêmes questions si Paul copie sur Louise.

2) On lance une infinité de fois et de manière indépendante un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir 6 vaut $p \in]0,1[$. On note X le temps d'attente du premier 6, et Y celui du second. Déterminer la loi de (X,Y), ainsi que les lois marginales.

Remarque : avec l'exemple 1, on voit que les lois marginales ne permettent pas de déterminer la loi du couple.

Définition (*) : Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω. Soit $A \in T$, un événement. On suppose que $\mathrm{P}(A) > 0$. La loi conditionnelle de X sachant A est définie par :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathrm{P}(X = x / A) = \frac{\mathrm{P}((X = x) \cap A)}{\mathrm{P}(A)}$$

Exemple (oral CCINP) **:** Lors d'une réaction, le nombre d'électrons émis suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque électron a une probabilité $p \in \left]0,1\right[$ d'être efficace. Les électrons se comportent de manière indépendante.
On note N le nombre d'électrons émis, et X le nombre d'électrons efficaces.

1) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $N = k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer la loi conjointe de (X, N).
3) Trouver la loi de X

On a une loi binomiale et $X(\Omega) = N(\Omega) = \mathbb{N}$. $P(X = i, N = j) = 0$ si $i > j$

$$P(X = i, N = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i} \text{ et } P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}p^i}{i!(1-p)^i}\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{(j-i)!}(1-p)^j$$

$$P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}p^i}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+i}}{j!}(1-p)^j = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^i e^{\lambda(1-p)}}{i!} \quad X \sim P(\lambda p)$$

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes sur Ω.

- La loi conjointe $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est la donnée des $\mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n)$ pour tout $(x_1, .., x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$
- Pour $1 \leq j \leq n$, la j-ème loi marginale est celle de X_j.

Remarque : il vient alors $\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2,...,x_n) \in X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)} \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n)$

2) **Indépendance de deux variables aléatoires.**

Définition (*) : soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
On dit qu'elles sont **indépendantes** si et seulement si :
$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y)$. On note alors $X \perp Y$.

Remarques :

- Si X et Y sont indépendantes et que $\mathrm{P}(X = x) > 0$ pour $x \in X(\Omega)$, alors si $y \in Y(\Omega)$, on a $\mathrm{P}(Y = y / X = x) = \frac{\mathrm{P}((Y = y) \cap (X = x))}{\mathrm{P}(X = x)} = \mathrm{P}(Y = y)$. Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est la loi de Y : le comportement de Y ne dépend pas de celui de X.
- En général, quand deux variables aléatoires semblent indépendantes, elles le sont effectivement. En revanche il arrive que deux variables aléatoires qui ne semblent pas indépendantes le soient.

- Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$ tels que $\mathrm{P}(X = x) > 0$ et $\mathrm{P}(Y = y) > 0$, mais $\mathrm{P}(X = x, Y = y) = 0$

Exemples :
- Les variables N et X de l'exemple précédent sont-elles indépendantes ?
- On lance deux fois une pièce de manière indépendante. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier lancer donne Pile, Y celle que qui vaut 1 si le second lancer donne pile, et Z celle qui vaut 1 si les deux lancers donnent le même résultat ((P,P) ou (F,F)). X et Y sont-elles indépendantes ? Et X et Z ?

Proposition : soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors :
- Soit $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. Alors les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Ainsi, $\mathrm{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathrm{P}(X \in A)\mathrm{P}(Y \in B)$
- Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et pour toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, on a $f(X) \perp g(Y)$.

Preuve : avec $P(f(X) = x, g(Y) = y) = P\left(X \in f^{-1}\left(\{x\}\right), Y \in f^{-1}\left(\{y\}\right)\right)$.

Exemple : ainsi, si X et Y sont indépendantes, e^X et e^Y le sont aussi.

Exemples :
- Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0,1\right[$. Déterminer la loi de $X + Y$.
  On note $Z = X + Y$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P(Z = k) = (k-1)p^2q^{k-2}$
  C'est le temps d'attente d'un second succès.
- Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

3) <u>Indépendance de plusieurs variables aléatoires.</u>

Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes.
On dit que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), ..., \forall x_n \in X_n(\Omega), \mathrm{P}((X_1 = x_1) \cap ... \cap (X_n = x_n)) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X_k = x_k)$$

Remarque : comme pour les événements, l'indépendance entraîne l'indépendance deux à deux pour les variables aléatoires, mais des variables aléatoires peuvent être indépendantes sans être deux à deux indépendantes.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes sur Ω. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère f_k une fonction définie sur $X_k(\Omega)$. Alors $f_1(X_1), f_2(X_2), ..., f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Rappel : on considère $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On suppose que $X_1, X_2, .., X_n$ ont même loi $B(p)$, avec $p \in [0,1]$ et sont indépendantes. On note $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors S_n suit une loi binomiale $B(n,p)$.

Propriétés : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes, supposées indépendantes.

- Soit $A_1 \subset X_1(\Omega), ..., A_n \subset X_n(\Omega)$. Alors $X_1 \in A_1, X_2 \in A_2 ..., X_n \in A_n$ sont des événements indépendants.
- Toute sous-famille de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est composée de variables aléatoires indépendantes.

Exemples (*) : loi d'un maximum ou d'un minimum. Si on rencontre des difficultés pour calculer directement $\mathrm{P}(X = x_i)$, on peut calculer $\mathrm{P}(X \le x_i)$ ou $\mathrm{P}(X \ge x_i)$

Si par exemple $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, avec $x_1 < x_2 < .. < x_k$, alors pour $2 \le i \le k$, il vient $\mathrm{P}(X \le x_i) = \mathrm{P}((X = x_i) \cup (X \le x_{i-1}))$.

Donc comme l'union est disjointe, on a ainsi $\mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X \le x_i) - \mathrm{P}(X \le x_{i-1})$.

- On tire successivement et avec remise k boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Déterminer la loi du plus grand numéro obtenu lors de ces k tirages. Pour $1 \le i \le k$, on note X_i le numéro de la i-ème boule. On note $X = \max(\{X_1, .., X_k\})$. Déterminer la loi de X.
- Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes, supposées indépendantes et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $X = \min(X_1, ..., X_n)$. Déterminer la loi de X.

Lemme des coalitions (*) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes, supposées indépendantes. On suppose que pour $k \in [\![1, n]\!]$, X_k est à valeurs dans E_k. Soit p un entier tel que $1 < p < n$. On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $E_1 \times ... \times E_p$ et $E_{p+1} \times ... \times E_n$ Alors $f(X_1, X_2, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.

Preuve : on note $V_1 = (X_1, X_2, ..., X_p)$ et $V_2 = (X_{p+1}, ..., X_n)$

Alors $P(V_1 = (x_1, .., x_p), V_2 = (x_{p+1}, .., x_n)) = P(V_1 = (x_1, .., x_p))P(V_2 = (x_{p+1}, .., x_n))$ en utilisant que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes. Puis $f(V_1)$ et $g(V_2)$ sont indépendantes.

Remarque : ce résultat s'étend à plus de deux coalitions : par exemple, si $1 < p < q < n$ et f, g et h sont définies respectivement sur $E_1 \times ... \times E_p$, $E_{p+1} \times ... \times E_q$ et $E_{q+1} \times ... \times E_n$, alors $f(X_1, X_2, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_q)$ et $h(X_{q+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.

4) **Suite de variables aléatoires indépendantes.**

Définitions : soit (X_n) une suite variables aléatoires discrètes dans (Ω, T, P). On dit que :

- (X_n) est une suite de variables indépendantes si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_0, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d (**indépendantes identiquement distribuées**) lorsque les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes, et qu'elles ont toutes même loi.

Exemples :

- le jeu de pile ou face infini peut être modélisé à l'aide d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $1/2$ lorsque la pièce n'est pas truquée.
- (*) On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_n = 1) = p \in \left]0,1\right[$, $P(X_n = -1) = 1 - p$.

  En se ramenant à une loi binomiale, déterminer la loi et l'espérance de $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} X_k$.

B) Espérance, variance, covariance des variables aléatoires

1) Espérance

Rappels : Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.

- Si X est à valeurs dans $[0, +\infty]$, alors $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
- Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors X est d'espérance finie si et seulement si la famille $(x\,P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X est définie par $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
- L'espérance est linéaire : si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes d'espérance finie et que $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}$, alors $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$.
- Théorème de transfert : Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$. Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.

Remarque : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur Ω. On pose $X = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$. Alors $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$. Par théorème de transfert, $f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x_1, \ldots, x_n)\, P(X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n))_{(x_1, \ldots, x_n) \in X(\Omega)}$ est sommable et alors $E\left(f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right) = \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in X(\Omega)} f(x_1, \ldots, x_n)\, P(X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n)$.

Propriété (*) : soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes. On suppose qu'elles sont **indépendantes et d'espérance finie**. Alors XY est également d'espérance finie et $E(XY) = EX.EY$.

Preuve rapide : on applique le théorème de transfert à $f(X,Y) = XY$ et on utilise que si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables de nombres complexes, alors la famille $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right)$.

Remarques :

- En général, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles quelconques d'espérance finie, on n'a pas $E(XY) = EX.EY$: il se peut même que XY ne soit pas d'espérance finie avec $X = Y$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P(X = n) = \dfrac{1}{a\,n^3}$.
- On peut avoir $E(XY) = EX.EY$ sans que les variables aléatoires soient indépendantes. On prend par exemple X qui suit une loi uniforme sur $\{-2,-1,1,2\}$ et on prend $Y = |X|$.

Corollaire (*) : $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs complexes. On suppose qu'elles sont **indépendantes et d'espérance finie**. Alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ est également d'espérance finie et $E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$.

Preuve : par récurrence, avec le lemme des coalitions.

2) Covariance.

Rappel : Définition (*) : Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω. On suppose que X^2 est d'espérance finie. Alors X est d'espérance finie.
On définit alors la variance de X par $V(X) = E((X - EX)^2) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 \geq 0$
On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. X est réduite si et seulement si $V(X) = 1$

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz) : soit X,Y deux variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie.
Alors $X\,Y$ est d'espérance finie et $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$.
De plus, il y a égalité si et seulement si $Y = 0$ presque sûrement ou il existe un réel λ tel que $X = \lambda Y$ presque sûrement.

Preuve : $X\,Y$ est d'espérance finie avec $|X\,Y| \leq \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$. On pose $h(t) = E\left((tY + X)^2\right)$.
On sépare le cas $E(Y^2) = 0$ (alors $Y = 0$ presque sûrement).

Définition (*) : soit X,Y deux variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. La **covariance** de X et Y est donnée par :
$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$

Propriété : soit X,Y trois variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que X^2, Y^2 sont d'espérance finie. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Proposition (*) : Soit $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω.
On suppose que $X_1^2, X_2^2, .., X_n^2$ sont d'espérance finie.

Alors $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right)$

Preuve : on a $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E((X_1 + X_2 + ... + X_n)^2) - \left(E(X_1) + ... + E(X_n)\right)^2$.

Donc en développant $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_i)E(X_j)$

Donc en séparant les termes suivant que $i = j$ ou non, on obtient le résultat.

Remarque :

- On n'a pas en général $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes. On peut prendre par exemple $X = -Y$ avec $V(X) > 0$.
- En particulier, il vient $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\mathrm{cov}\left(X_1, X_2\right)$. Il s'agit d'un moyen possible d'obtenir $\mathrm{cov}\left(X_1, X_2\right)$.

Corollaire (*) : Soit $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω. On suppose que $X_1, X_2, .., X_n$ sont deux à deux indépendantes.
Alors $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$

Proposition (*) : Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que X suit une loi binomiale $B(n,p)$.
Alors $E(X) = n\,p$ et $V(X) = n\,p\,(1-p)$

Preuve : l'espérance et la variance ne dépendent que de la loi d'une variable aléatoire. On peut donc considérer $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, où $X_1, X_2, .., X_n$ ont même loi $B(p)$ et sont indépendantes. Donc $E(X) = E\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = n\,p$
$V(X) = V\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = n V(X_1) = n\,p\,(1-p)$

Interprétation (HP) : soit X,Y deux variables aléatoires telles que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. On suppose $V(X)>0$ et $V(Y)>0$. Alors le coefficient de corrélation entre X et Y est égal à $\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. Alors :

- $-1\leq \rho(X,Y)\leq 1$ (avec Cauchy-Schwarz appliquée à $X-E(X)$ et à $Y-E(Y)$).
- Si X,Y sont indépendantes, alors $\rho(X,Y)=0$ (les variables sont décorrélées).
- Deux variables sont positivement corrélées quand elles ont tendance à être grandes en même temps : $\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)$ est positive lorsque X et Y sont supérieures à leur moyenne en même temps, et inférieures en même temps.

Exemple : $n=28$ élèves jouent aux chaises musicales. Chacun se lève et se rassoit sur une chaise choisie au hasard (il y a un seul élève sur chaque chaise).
On note $X_i=1$ si le $i-ème$ élève se rassoit sur sa chaise, et $X_i=0$ sinon.
On note N le nombre d'élèves qui se rassoient sur leur chaise.

1) Calculer $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$ pour $i\neq j$ et pour $i=j$.
2) Déterminer l'espérance et la variance de N.

3) Loi faible des grands nombres.

Corollaire (loi faible des grands nombres) : Soit $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de variance finie sur Ω. On pose $m=E(X_1)$ et $\sigma^2=V(X_1)$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=X_1+...+X_n$. Alors $\forall\lambda>0, P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-m\right|\geq\lambda\right)\leq\dfrac{\sigma^2}{n\lambda^2}$.

En particulier, $\forall\lambda>0, P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-m\right|\geq\lambda\right)\underset{n\to+\infty}{\to}0$

Preuve : on applique Bienaymé-Tchebychev à $Z_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{X_1+...+X_n}{n}$.

On a $E\left(Z_n\right)=\dfrac{E(S_n)}{n}=\dfrac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}=E(X_1)=m$ (linéarité de l'espérance)

De plus, $V(Z_n)=\dfrac{1}{n^2}V(X_1+X_2+...+X_n)=\dfrac{1}{n}V(X_1)$.

Donc $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-m\right|\geq\lambda\right)=P\left(\left|Z_n-E\left(Z_n\right)\right|\geq\lambda\right)\leq\dfrac{V(Z_n)}{\lambda^2}=\dfrac{\sigma^2}{n\lambda^2}$

Remarque : en appliquant Markov, cela ne fonctionne pas.

4) Fonction génératrice et indépendance

Rappels :
Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice associée à cette variable aléatoire est définie en tout réel t tel que t^X est d'espérance finie et donnée par $G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$.

$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X=n)t^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

G_X est continue sur $\left[-1,1\right]$ et C^∞ sur $\left]-R, R\right[$.

La loi de X est entièrement déterminée par sa fonction génératrice. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = \frac{G_X{}^{(k)}(0)}{k!}$.

Remarque : si deux variables aléatoires X et Y ont même fonction génératrice, alors elles ont même loi.

Proposition (*) : soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que t^X et t^Y sont d'espérance finie. Alors $G_{X+Y}(t)$ est défini et $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

Preuve : Comme X, Y sont indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi. Donc $G_{X+Y}(t) = E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X\right)E\left(t^Y\right)$ (et $t^{X+Y} = t^X t^Y$ est d'espérance finie).

Exemple : soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
Retrouver que $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Avec $G_{X+Y}(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$

Proposition : soient $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!], G_{X_k}(t)$ existe. Alors $G_{X_1+...+X_N}(t)$ est défini et $G_{X_1+...+X_N}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$

Exemple : retrouver la fonction génératrice d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.