13-Fonctions de plusieurs variables

A) <u>Fonctions vectorielles</u>

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'étude des fonctions de la forme $f : I \to \mathbb{R}^n$

1) <u>Dérivation</u>

Définition : soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si et seulement si son taux d'accroissement $T(t) = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ admet une limite finie quand t tend vers t_0. Cette limite est alors notée $f'(t_0)$.

Remarque : la dérivabilité et la valeur de $f'(t_0)$ ne dépendent pas du choix de la norme dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété : soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. Pour $t \in I$, on note $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)\right)$. Soit $t_0 \in I$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est dérivable en t_0 et on a alors $f'(t) = \left(f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)\right)$ (on peut dériver coordonnée par coordonnée).

Preuve :

Remarque : en identifiant une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ avec un élément de $\mathbb{R}^{n^2}$ (constitué de ses n^2 coefficients), on peut étendre les résultats précédents aux applications à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$, et plus généralement dans n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie.

Exemples :

- On prend $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- On note $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Montrer que R est dérivable et calculer R'.

Propriété : soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \in I$. Soit $D = \{h \in \mathbb{R}, t_0 + h \in I\}$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : D \to \mathbb{R}^n$ tels que $\forall h \in D, f(t_0 + h) = f(t_0) + h\,a + h\,\varepsilon(h)$ et $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$.
On a alors $f'(t_0) = a$.
On note aussi $f(t_0 + h) = f(t_0) + h\,f'(t_0) + o(h)$

Preuve rapide : on se ramène aux fonctions coordonnées.

Exemple : Soit $f(t)=\left(e^t,\ln(1-t)\right)$. En donner un développement limité à l'ordre 1 en 0.

Définition : soit $f:I\to\mathbb{R}^n$. Alors f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. f est de classe C^1 sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et que f' est continue sur I.

Interprétation cinématique : si on prend $n=2$ (ou $n=3$), et que le paramètre *t* désigne le temps, $f(t)=(x(t),y(t))$ désigne la position d'un mobile ponctuel à l'instant *t*. $f'(t)$ est alors **le vecteur vitesse** instantanée du mobile.

2) Opérations sur les fonctions dérivables.

Propriété : soient $f,g:I\to\mathbb{R}^n$. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On suppose f et g dérivables sur I. Alors $\alpha f+\beta g$ est dérivable sur I et $\left(\alpha f+\beta g\right)'=\alpha f'+\beta g'$

Proposition : soient $f:I\to\mathbb{R}^n$ et $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, une application linéaire. On suppose que f est dérivable sur I. Alors $L\circ f$ est dérivable sur I et pour $t\in I$, $\left(L\circ f\right)'(t)=L\left(f'(t)\right)$.

Preuve : on regarde le taux d'accroissement et on utilise la continuité des applications linéaires.

Exemples : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = I_n + t^2 A$, $g(t) = tr\left(I_n + t^2 A\right)$ et $h(t) = PM(t)P^{-1}$. Montrer que g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

Proposition : soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : J \to I$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I et que φ est dérivable sur J. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et pour tout $t \in J$, $\left(f \circ \varphi\right)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Preuve rapide : on écrit $f \circ \varphi(t)$ pour $t \in J$ à l'aide des coordonnées.

Exemple : Soit $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = A + t\,I_n$ et $g(t) = f(\sin(t))$. Déterminer $g'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Propriété : soient $f, g : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, bilinéaire.
On pose alors pour $t \in I$: $h(t) = B\left(f(t), g(t)\right)$. On suppose f, g dérivables sur I. Alors h est dérivable sur I et on a $\forall t \in I, h'(t) = B\left(f'(t), g(t)\right) + B\left(f(t), g'(t)\right)$.

Preuve : On sait que B est continue car elle est bilinéaire.

Soit $T(t) = \dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{B\left(f(t), g(t)\right) - B\left(f(t), g(t_0)\right)}{t - t_0} + \dfrac{B\left(f(t), g(t_0)\right) - B\left(f(t_0), g(t_0)\right)}{t - t_0}$.

Exemple : Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = M(t)N(t)$ et $g(t) = M^2(t)$, avec, pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t), N(t) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Justifier que f, g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(t)$ et $g'(t)$.

Propriété : $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle , \rangle$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions dérivables sur I. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Alors l'application $\langle f, g \rangle$ définie sur I par $\langle f, g \rangle(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ est dérivable sur I et $\langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$.

Exemple : On se place dans $\left(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle\right)$ euclidien usuel. On considère $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur I, ne s'annulant pas sur I. Pour $t \in I$, on pose $g(t) = \| f(t) \|$. Montrer que g est dérivable sur I et calculer g'.

Propriété : soit $p \in \mathbb{N}^*$. soient $f_1,..,f_p : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions dérivables.
Soit $M : \left(\mathbb{R}^n\right)^p \to \mathbb{R}$, $p-$linéaire. Pour $t \in I$, on pose $h(t) = M(f_1(t),...,f_p(t))$.
Alors h est dérivable sur I et :
$\forall t \in I, h'(t) = M(f_1'(t), f_2(t)...,f_p(t)) + M(f_1(t), f_2'(t)...,f_p(t)) + ... + M(f_1(t), f_2(t)...,f_p'(t))$

Remarque : on a ainsi une somme de p termes, et on dérive un à chaque fois en laissant les autres inchangés.

Cas du déterminant : Soit B une base de $\mathbb{R}^n$ et $f_1,..,f_n : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions dérivables.
Pour $t \in I$, on pose $h(t) = \det_B(f_1(t),...,f_n(t))$. Alors h est dérivable sur I et on a :
$h'(t) = \det_B(f_1'(t), f_2(t)...,f_n(t)) + \det_B(f_1(t), f_2'(t)...,f_n(t)) + ... + \det_B(f_1(t),...,f_n'(t))$

Exemple : soit $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$: $h(t) = \det\left(I_n + t\,A\right)$.
On note $B = (E_1,..,E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(C_1,...,C_n)$ les colonnes de A.
Ainsi, $h(t) = \det_B\left(E_1 + t\,C_1,...,E_n + t\,C_n\right)$. Montrer que $h(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + tr(A)\,t + o(t)$

Définition : soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors f est de classe C^k sur I si et seulement si elle est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I.
Si on note $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t),...,f_n(t)\right)$ pour $t \in I$, on a $f^{(k)}(t) = \left(f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t),...,f_n^{(k)}(t)\right)$.
Elle est de classe C^∞ sur I si et seulement si elle est de classe C^k sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

B) Dérivées partielles

Dans la suite, on pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, on s'intéresse ici aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^p$ est muni d'une norme notée $\| \ \|$ que l'on peut choisir.

Les résultats sur les espaces vectoriels normés s'appliquent donc.
On considère U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une application.

1) Continuité des fonctions de plusieurs variables

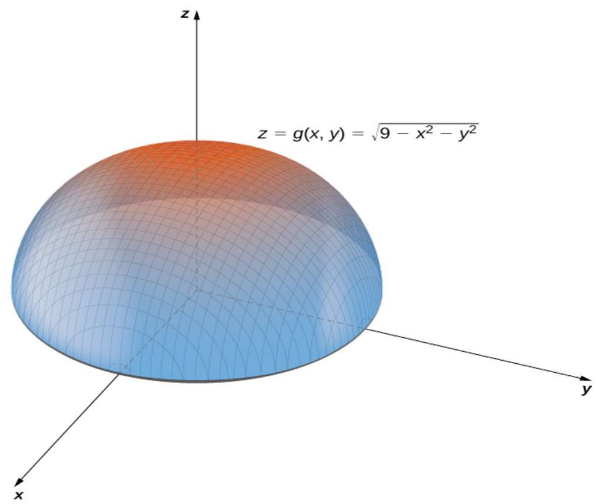
Rappels :

- Si $a \in U$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{\to} f(a)$ (autrement dit, pour toute suite (U_n) d'éléments de U telle que $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$, on a $f(U_n) \underset{n \to +\infty}{\to} f(a)$).
- Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (U_n) et (V_n) qui tendent vers a mais telles que $\left(f(U_n)\right)$ et $\left(f(V_n)\right)$ aient des limites différentes.

Exemples : Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

- $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
- $g(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$

Remarque : Soit $S=\{(x,y,z)\in U\times\mathbb{R}, z=f(x,y)\}$. S est une surface qui représente graphiquement la fonction f.



2) <u>Définition des dérivées partielles</u>

Définition : Soit $v\in\mathbb{R}^p$ et g définie au voisinage de 0 par $g(t)=f(a+tv)$. On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si et seulement si g est dérivable en 0. On note alors $D_v f(a)=g'(0)$. C'est la dérivée de f en a suivant le vecteur v.

Exemple : on prend $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\to xy\end{array}$. Déterminer la dérivée de f suivant le vecteur $v=(1,1)$ en $a=(2,1)$.

Définition : Soit $a=(a_1,..,a_p)\in U$. La $j-$ème fonction partielle associée à f en a est la fonction f_j définie par $f_j(t)=f(a_1,..,a_{j-1},t,a_{j+1},..,a_p)$.

Définition : Soit $a=(a_1,..,a_p)\in U$ .On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa $j-$ème variable si et seulement si la $j-$ème fonction partielle associée à f en a, définie lorsque $(a_1,..,a_{j-1},t,a_{j+1},..,a_p)\in U$ par $f_j(t)=f(a_1,..,a_{j-1},t,a_{j+1},..,a_p)$, est dérivable en a_j . Lorsque cette dérivée existe, on la note $\partial_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Remarque : lorsqu'elle existe, la dérivée partielle de f en a par rapport à sa $j-$ème variable est la dérivée de f suivant le vecteur e_j, où $B=\left(e_1,...,e_p\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Exemples :

- Soit $f(x,y,z)=x^2+e^{yz}\sin(x)$. Déterminer les dérivées partielles de f par rapport à chacune de ses variables.

- soit $g(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$. Montrer que g admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

Remarque (*) : essentiel pour bien comprendre les notations.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ se lit « dérivée partielle de f par rapport à sa j – ème variable ». Elle est moins claire que la notation $\partial_j f$.

Par exemple, on prend $f(x,y)=x^3-y^2$. Quand on écrit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, les deux x ne désignent pas la même chose : le premier exprime que l'on dérive par rapport à la première variable, et le second que l'on évalue cette fonction en (x,y).

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

Définition : soit $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur U si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues en tout point de U.

Propriétés : Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f, g sont C^1 sur U. Alors pour $a \in U$ et $j \in [\![1, p]\!]$:

- $f + \lambda g$ est C^1 sur U et $\dfrac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(a)$. Ainsi, $C^1(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de U dans $\mathbb{R}$.
- $f\,g$ est C^1 sur U et $\dfrac{\partial(f\,g)}{\partial x_j}(a) = g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(a)$
- Si g ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{f}{g}$ est C^1 sur U.
- Si f est à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est C^1 sur I, alors $\varphi \circ f$ est C^1 sur U et $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\varphi'(f(a))$
- Les fonctions polynomiales sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$.

Exemple : si $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$.

3) Développement limité d'ordre 1. Gradient et différentielle.

Définition : soit $g : U \to \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in U$. On écrit $g(h) \underset{h \to 0}{=} o(\|h\|)$ ou plus simplement $g(h) \underset{h \to 0}{=} o(h)$ lorsqu'il existe une fonction ε définie de U dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall h \in U, g(h) = \|h\| \varepsilon(h) \\ \qquad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0 \end{cases}$$

Théorème (*) (développement limité d'ordre 1 ; admis) : soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1 sur U. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de tout élément $a = (a_1, .., a_p) \in U$.
Plus précisément, pour $h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$, on a :

$$f(a + h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|).$$

Explication : si $p=1$, on obtient $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a)+h\,f'(a)+o(h)$.
On ajoute les contributions apportées par chacune des dérivées partielles.

Exemple : on pose $f(x,y)=x\cos y+2y$. Donner un développement limité à l'ordre 1 en $a=(1,0)$ de la fonction f

Corollaire : toute fonction de classe C^1 sur U est continue sur U.

Définition : soit $a\in U$. Soit $f:U\to\mathbb{R}$, de classe C^1. On appelle différentielle de *f* en *a* et on note $df(a)$ l'application définie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par : si $h=(h_1,h_2,...,h_p)\in\mathbb{R}^p$, $df(a)(h_1,h_2,...,h_p)=\sum_{i=1}^{p} h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On note aussi $df(a).h=\sum_{i=1}^{p} h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Remarques :

- Si $a\in U$ est fixé, l'application $df(a): \begin{array}{l}\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}\\ h\to\sum_{i=1}^{p} h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\end{array}$ est une forme linéaire.
- Si $p=1$, on a $df(a)(h)=h\,f'(a)$.
- Le développement limité à l'ordre 1 de f s'écrit $f(a+h)\underset{h\to 0}{=} f(a)+df(a).h+o(h)$.

Notation : pour $j \in [\![1, p]\!]$, on considère $g_j : \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) \to x_j \end{array}$.

Alors si $a \in \mathbb{R}^p$, $dg_j(a).h = 1h_j$. Cette quantité ne dépend pas de a. On note alors $dg(a) = dx_j$

On a alors $\forall\, h \in \mathbb{R}^p, dg_j(a).h = dx_j.h$

Avec cette notation, il vient $\forall\, h \in \mathbb{R}^p, df(a).h = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.h$, donc $df(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j$.

Il s'agit formellement d'une égalité d'applications linéaires.

Définition (*) : soit $a = (a_1, .., a_p) \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que *f* est de classe C^1 sur U. On appelle gradient de f en *a,* et on note $\nabla f(a)$ le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$.

Propriété : on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne usuelle. Alors pour tout $a \in U$, pour tout $h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$, on a $df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Ainsi, $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|)$.

Exemple : Calcul du gradient et de la différentielle en $(0,0)$ et en $(2,0)$ pour la fonction $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, définie sur $O=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2<9\right\}$

Remarque : On suppose $a\in U$ et $\nabla f(a)\neq 0$, avec $f:U\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U.
Soit $h\in\mathbb{R}^p$, un vecteur unitaire. Soit g définie au voisinage de 0 par $g(t)=f(a+t\,h)$. Alors $D_h f(a)=\langle\nabla f(a),h\rangle$.
Ainsi, le vecteur gradient est colinéaire au vecteur unitaire h selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

4) **Règle de la chaîne.**

Proposition (*, règle de la chaine) : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f: U \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur U et soient $x_1, ..., x_p$ des fonctions dérivables sur I telles que $\forall t \in I, \left(x_1(t), ..., x_p(t)\right) \in U$. Soit $g: I \to \mathbb{R}$, avec pour $t \in I$, $g(t) = f\left(x_1(t), ..., x_p(t)\right)$. Alors $g: I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et on a $\forall t \in I, g'(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1(t), ..., x_p(t)\right) x_j'(t)$.

Remarque : on dérive ainsi comme une composée en se rappelant qu'il faut ensuite ajouter les composantes suivant les différentes directions.

Idée de preuve pour $p = 2$. On fixe $t \in I$ et on étudie $g(t+k)$ pour $k \in \mathbb{R}$ tel que $t + k \in I$.
On pose $a = (x_1(t), x_2(t))$.
On note $h = (x_1(t+k) - x_1(t), x_2(t+k) - x_2(t)) = (h_1, h_2)$.
Alors $g(t+k) - g(t) = f(a+h) - f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + o(\|h\|)$.

Exemples :

- pour $t\in\mathbb{R}$, on considère $g(t)=(\cos(t),\sin(t))$ et f une fonction quelconque de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $h(t)=f(\cos t,\sin t)$.
- pour $t\in\mathbb{R}$, on considère $k(t)=f(t,2t)$, où f une fonction quelconque de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de k sur $\mathbb{R}$ en fonction des dérivées partielles de f.

Corollaire : on suppose ici que U est un ouvert **convexe** de $\mathbb{R}^p$. Soit $f:U\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U. Alors f est constante si et seulement si $\forall a\in U,\nabla f(a)=0$ (ou encore $\forall j\in[\![1,p]\!],\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=0$).

Preuve : on procède par double implication.

$\Leftarrow$ Soient $a=(a_1,...,a_p),b=(b_1,...,b_p)\in U$ et $g(t)=a+t(b-a)=tb+(1-t)a\in U$ pour $t\in[0,1]$. On pose $h(t)=f\circ g(t)=f(a_1+t(b_1-a_1),...,a_p+t(b_p-a_p))$.

Remarque : le résultat n'est vrai que sur un ouvert convexe. On prend $U=\mathbb{R}^*$, $p=1$et $f(t)=\arctan(t)+\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ pour $t\in\mathbb{R}^*$.

Corollaire : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ Soit $f:U\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U et soient $x_1,...,x_p$ des fonctions C^1 sur Ω. On suppose que $\forall a=(a_1,...,a_n)\in\Omega$, $\left(x_1(a),...,x_p(a)\right)\in U$. Alors l'application $g:\begin{array}{c}\Omega\to\mathbb{R}\\(a_1,...,a_n)\to f\left(x_1(a_1,...,a_n),...,x_p(a_1,...,a_n)\right)\end{array}$ est de classe C^1 sur Ω et $\forall a=(a_1,...,a_n)\in\Omega,\forall i\in[\![1,n]\!],\frac{\partial g}{\partial a_i}(a)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1(a),...,x_p(a)\right)\frac{\partial x_j}{\partial a_i}(a)$

Cas particulier (*) : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère les fonctions $x:\begin{array}{c}\Omega\to\mathbb{R}\\(u,v)\to x(u,v)\end{array}$ et $y:\begin{array}{c}\Omega\to\mathbb{R}\\(u,v)\to y(u,v)\end{array}$ telles que $\forall(u,v)\in\Omega,(x(u,v),y(u,v))\in U$. On suppose que x et y sont de classe C^1sur Ω.
On définit sur Ω la fonction g par $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$.
Alors g est de classe C^1sur Ω. De plus, :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Preuve rapide du cas particulier : on étudie la fonction partielle $h(u)=g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. On calcule la dérivée de *h* à l'aide de la règle de la chaine.

Exemples (*) :

- Soit $h(x,y)=f(x^2+y^2,x\,y)$, où *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. Calculer les dérivées partielles de *h*.

- Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

  (coordonnées polaires). Soient $u_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $u_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$
  Pour $r,\theta\in\mathbb{R}$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$
  Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$.
  Montrer, lorsque $r\neq 0$, la relation $\nabla f(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)u_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)u_\theta$ (expression du gradient dans le repère polaire).

Notations : on considère $T = g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) = f(x,y)$. Alors pour un physicien, la grandeur physique est plus importante que la fonction correspondante : on la note aussi bien T comme fonction de (u,v) que de (x,y).
Si on prend par exemple $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = uv$ et $f(x,y) = xy$, on a pour $a,b \in \mathbb{R}$: $f(a,b) = ab$ et $g(a,b) = (a+b)ab$.
Les fonctions f et g ne sont pas identiques et les mathématiciens ne les notent pas pareil. En physique, on peut écrire $\dfrac{\partial T}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial T}{\partial x}\big(x(u,v), y(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial T}{\partial y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)$,
ou encore $\dfrac{\partial T}{\partial u} = \dfrac{\partial T}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ (et de même $\dfrac{\partial T}{\partial v} = \dfrac{\partial T}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$).

5) <u>Dérivées partielles d'ordre 2</u>

Définition : soit $p \in [\![2,3]\!]$ et $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $1 \leq j,k \leq p$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est définie sur U. Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ se notent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ou $\partial_{k,j}(f)$. Ici, on dérive d'abord par rapport à x_j puis par rapport à x_k.

Définition : soit $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^2 sur U si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U.

Exemple : calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ si $f(x,y) = x^3 e^{x+2y}$

Théorème (Schwarz-admis) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que *f* est de classe C^2 sur U. Alors $\forall a \in U, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Définition (*) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur U. Soit $a \in U$. La matrice Hessienne de f en a, notée $H_f(a)$ est définie par $\forall i, j \in [\![1, p]\!], \left(H_f(a)\right)_{i,j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Avec le théorème de Schwarz, $H_f(a) \in S_p\left(\mathbb{R}\right)$.

Exemples :

1) On prend $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x^3 y^2 \end{array}$. On pose $a = (1,1)$. Déterminer $\nabla_f(a)$ et $H_f(a)$
2) On prend $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to e^{xy} \end{array}$. On pose $a = (0,0)$. Déterminer $\nabla_f(a)$ et $H_f(a)$

Théorème (*) (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 ; admis) : soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que *f* est de classe C^2 sur U. Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de tout élément $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in U$. Plus précisément, pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$, on a :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

On rappelle que $g(h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|^2)$ signifie qu'il existe une fonction ε définie de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall h \in U, g(h) = \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \end{cases}$

Remarque : ce développement limité à l'ordre 2 s'écrit aussi :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, H_f(a) h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Exemples :

1) Ecrire cette formule dans les cas $p = 1$ et $p = 2$
2) On prend $f(x, y) = x^3 y^2$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en $a = (1,1)$
3) Même question pour $f(x, y) = e^{xy}$ en $a = (0,0)$.

4) **Résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP,HP).**

Exemple : soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Trouver les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Exemple : Equation de propagation des ondes à une dimension : soit $c>0$ fixé. Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe C^2 telles que $\forall x,t\in\mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=0$ (on posera $u=x+ct$ et $v=x-ct$).

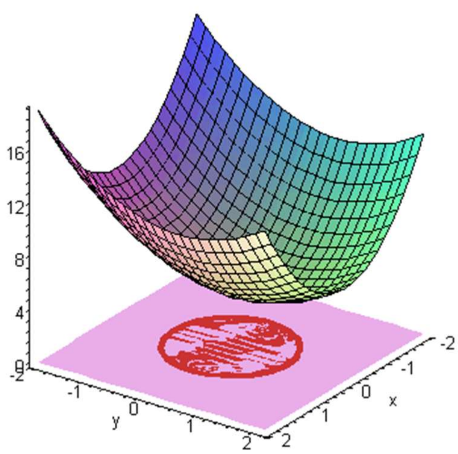
On prend f une fonction quelconque de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on pose ici $f(x,t)=g(u,v)=g(x+ct,x-ct)$.

On a alors $g(u,v)=g(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2c})$ et g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

A) Extrema d'une fonction de plusieurs variables.

1) Extremum global

Définition : soit D une partie quelconque de $\mathbb{R}^p$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum global égal à $f(a)$ (resp. un minimum global) en un point $a \in D$ si et seulement si $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$ (resp. $\forall x \in D, f(x) \geq f(a)$). f admet un extremum global en $a \in D$ si et seulement si elle admet un maximum ou un minimum global en a.



Rappel : théorème des bornes atteintes (*) : soit $D \subset \mathbb{R}^p$. On suppose que D est **fermé et borné**. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet donc un minimum et un maximum global sur D).

Remarque : pour montrer qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ n'admet pas de maximum global sur D, il suffit de trouver une suite (x_n) d'éléments de D telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

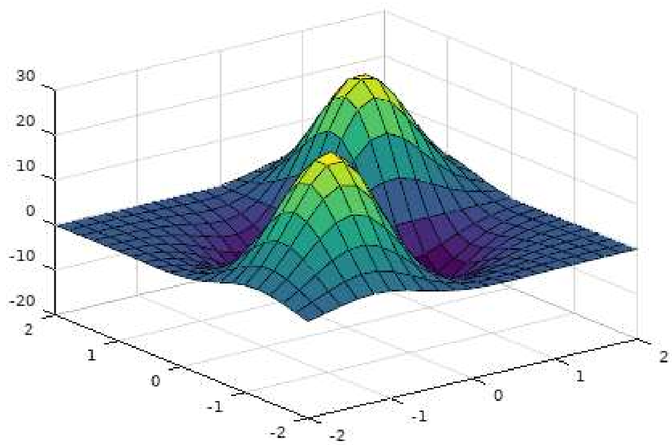
Exemples :

1) On considère $f(x,y)=2x^3+y^3-3xy+1$. Montrer qu'elle n'a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'elle possède un maximum et un minimum global sur $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\right\}$. On ne demande pas de les calculer.
2) On peut utiliser le théorème des bornes atteintes même si f n'est pas définie sur une partie fermée et bornée. Par exemple, on prend $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\to xy\,e^{-(x^2+y^2)}\end{array}$.

   Montrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra passer en polaires et considérer $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$).

3) <u>Extremum local. Point critique.</u>

Définition : soit D une partie de $\mathbb{R}^p$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que *f* admet un maximum local en un point $a \in D$ si et seulement si $\exists \alpha > 0, \forall x \in D \cap B(a,\alpha), f(x) \leq f(a)$.
Ce maximum local est strict si et seulement si $\exists \alpha > 0, \forall x \in D \cap B(a,\alpha) \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$.
De même pour un minimum local.



Définition (*) : Soit de nouveau U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $f : U \to \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^1 sur D. Soit $a \in D$. a est **un point critique** si et seulement si $\nabla f(a) = 0$.

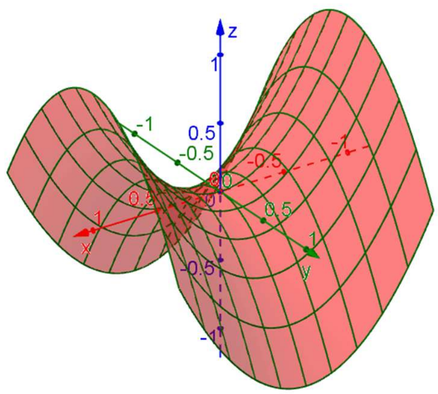
Rappels :

- On suppose que I est un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ soit *f* une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I. Si *f* admet un extremum local en un point a, alors $f'(a) = 0$.
- Ce résultat devient faux si on ne suppose plus que I est un ouvert.

Proposition (*) : soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1 sur U et qu'elle admet un extremum local en $a \in U$.
Alors a est un point critique (on a $\nabla f(a) = 0$, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles s'annulent en a).

Preuve : on traite le cas d'un minimum local. Les fonctions partielles aussi admettent des extrema. Donc leurs dérivées s'annulent.

Remarque (*) : cette condition n'est pas suffisante. On peut avoir un point critique qui n'est pas un extremum local. C'est le cas d'un « point col » ou d'un « point selle ».
On a alors un maximum local dans une direction et un minimum local dans une autre.



Exemple : on prend $f(x,y) = x\,y$ en $a = (0,0)$.

Proposition (*) : soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2 sur U et qu'elle admet un point critique en $a \in U$ (c'est-à-dire que $\nabla f(a) = 0$). Alors :

1) Si $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $Sp\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$), alors f atteint un minimum local strict en a .
2) Si $H_f(a) \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $Sp\left(H_f(a)\right) \not\subset \mathbb{R}_+$, ou encore qu'il existe une valeur propre strictement négative de $H_f(a)$), alors f n'admet pas de minimum local en a.

Preuve : avec le développement limité d'ordre 2.

Corollaire : soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1 sur U et qu'elle admet un point critique en $a \in U$ (c'est-à-dire que $\nabla f(a) = 0$). Alors :

1) Si $Sp\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors f atteint un maximum local strict en a .
2) Si $Sp\left(H_f(a)\right) \not\subset \mathbb{R}_-$, alors f n'admet pas de maximum local en a

Preuve : non faite. C'est pareil que celle du résultat précédent.

Remarque (*) : sous les mêmes hypothèses :

- Lorsque $H_f(a)$ possède une valeur propre strictement négative et une autre strictement positive, il n'y a pas d'extremum local en a.
- Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives, il y a un minimum local strict en a.
- Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives, il y a un maximum local strict en a.
- Lorsque $Sp\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+$ (ou que $Sp\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-$), et que 0 est valeur propre de $H_f(a)$, on ne peut pas conclure et il se peut qu'il y ait un extremum local ou pas. Il faut alors étudier directement la fonction au voisinage du point critique.

Proposition (*) : cas particulier en dimension 2. Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2 sur U et qu'elle admet un point critique en $a \in U$ (c'est-à-dire que $\nabla f(a) = 0$). Alors :

- Si $\det(H_f(a)) < 0$, f n'admet pas d'extremum local en a.
- Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $Tr(H_f(a)) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $Tr(H_f(a)) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a.

Preuve :

Méthode (*) : pour chercher les **extrema locaux ou/et globaux** de $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}^2$ (ceci se généralise à $\mathbb{R}^p$ pour $p \geq 2$), on peut commencer par **dessiner** D. On note $Fr(D)$ la frontière (le bord) de D s'il existe ($Fr(D)$ est vide si D est ouvert). On pose $U = D \setminus Fr(D)$ qui est un ouvert.

1) On cherche les points critiques $a \in U$. Ce sont les seuls extrema possibles pour f dans U. Si on veut savoir si f possède un extremum local en a, on peut utiliser $H_f(a)$.
2) On peut montrer l'existence d'extrema globaux avec le théorème des bornes atteintes (si D est un fermé borné, ou qu'on se place sur un sous-ensemble de D).
3) S'il y a lieu, on cherche le maximum et le minimum de f sur $Fr(D)$. On peut comparer avec les valeurs aux points critiques pour déterminer les extrema globaux de f sur D.

Exemples :

1) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$. Etudier le nature des extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Trouver les extrema globaux de la fonction définie par : $f(x,y) = x^2 - x + 2y^2$ sur $D = \overline{D}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.
3) Trouver les extrema globaux de $(x,y) \mapsto g(x,y) = x^2 + y^2 - 3(x+y) + xy + 1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sur $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, x + y \leq 1\right\}$.