Kit de survie : algèbre linéaire

Dans la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) Polynômes

Division euclidienne : soient A et B deux éléments de $K[X]$. On suppose que B n'est pas le polynôme nul. Alors il existe un unique $(Q,R) \in K[X]^2$ tels que

- $A = BQ + R$
- $\deg(R) < \deg(B)$

Multiplicité d'une racine : soit $a \in K$ et $P \in K[X]$.

- a est racine d'ordre (ou de multiplicité) k de P si et seulement si une des deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
  - Il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$, avec $Q(a) \neq 0$.
  - $\forall i \in [\![0, k-1]\!], P^{(i)}(a) = 0, P^{(k)}(a) \neq 0$
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a est une racine d'ordre n de P dans $\mathbb{C}$. Alors $\overline{a}$ est aussi racine d'ordre n de P dans $\mathbb{C}$.
- On suppose que $mult(a,P) = n \in \mathbb{N}^*$ (a est racine de multiplicité n de P). Alors $mult(a,P') = n-1$.
- a est racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$

Nombre de racines d'un polynôme :

- Si $P \in K_n[X] \setminus \{0\}$ ($\deg(P) \leq n$ et P non nul), alors P admet au maximum n racines comptées avec leur multiplicité.
- Si un polynôme P a une infinité de racines distinctes, alors $P = 0$.
- On suppose que P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Si on trouve n racines distinctes de P , alors ce sont les seules et elles sont toutes simples.

Polynôme scindé : soit $P \in K[X]$

- P est **scindé** si et seulement si il est constant ou qu'il s'écrit sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\alpha_i}$, où $\lambda \in K$, $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1,..,x_k$ sont les racines de P, deux à deux distinctes, telles que pour $1 \leq i \leq k$, la multiplicité de x_i est $\alpha_i = mult(x_i, P)$.
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe (d'Alembert-Gauss).
- Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et que P est scindé dans $K[X]$, alors P admet exactement n racines dans K comptées avec leur multiplicité.

Relations entre coefficients et racines : soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme scindé de degré $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $P=a_n(X-x_1)...(X-x_n)$, avec $x_1,...,x_n\in K$, non nécessairement distinctes. Alors $\sum_{k=1}^{n} x_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{k=1}^{n} x_k=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$

Décomposition en éléments simples : soient $P,Q\in K[X]$. On suppose que $\deg(Q)\geq 1$, que $\deg(P)<\deg(Q)$ et que Q est scindé à racines simples : il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$, $x_1,x_2,...,x_k\in K$ deux à deux distincts et $\lambda\in K^*$ tels que $Q=\lambda(X-x_1)...(X-x_k)$.

Alors il existe $a_1,...,a_k\in K$ tels que $\forall x\in K\setminus\{x_1,...,x_k\},\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{(x-x_i)}$.

Cette décomposition est unique, C'est la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$.

B) Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans la suite, E,F,G sont des $K-$espaces vectoriels,

Sous-espace vectoriel : Soit $F\subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E\in F$
- $\forall(x,y)\in F^2,\forall\lambda\in K,x+\lambda.y\in F$

Familles : Une famille $(x_1,x_2,...,x_p)$ d'éléments de E est

- **génératrice** de E lorsque tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(x_i)_{1\leq i\leq p}$.
- **libre** si et seulement si $\forall(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in K^n,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0_E\Rightarrow(\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0)$
- Si $u\neq 0_E$ et que (u,v) est liée (c'est-à-dire non libre), alors $\exists\lambda\in K,v=\lambda u$.
- Si $(x_1,x_2,.....,x_n)$ est libre et $(x,x_1,x_2,.....,x_n)$ est liée (avec $x\in E$), alors x est combinaison linéaire de $(x_1,x_2,.....,x_n)$.
- Soit $(P_0,P_1,...,P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Alors la famille $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ est libre.

Bases d'un espace vectoriel :

- Une **base** de E est une famille qui est à la fois libre et génératrice de E.
- Si $\dim(E)=n\in\mathbb{N}^*$, toute famille libre (ou génératrice) de n vecteurs de E est une base de E.
- **Base incomplète :** Si E est de dimension finie, toute famille libre d'éléments de E peut être complétée en une base de E.

Polynômes d'interpolation de Lagrange. Soit $x_1,...,x_{n+1} \in K$, deux à deux distincts.

- Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, il existe un unique polynôme $P_i \in K_n[X]$ tel que $P_i(x_i) = 1$ et tel que $\forall j \neq i, P_i(x_j) = 0$.
- $B = (P_1, ...P_{n+1})$ est une base de $K_n[X]$. De plus, si $P \in K_n[X], P = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) P_k$

Pour trouver la dimension :

- La dimension de E est le nombre d'éléments d'une base.
- S'il existe un espace vectoriel F tel que $\dim(F) = p \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme $f : E \to F$, alors $\dim(E) = \dim(F) = p$.

Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux en dimension finie : deux possibilités.

- Prouver une double inclusion.
- Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

Dimension des espaces usuels :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dim\left(K_n[X]\right) = n+1$
- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\dim\left(M_{n,p}(K)\right) = n\,p$.

Somme directe : soit $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. $F_1, F_2, ..., F_p$ sont en somme directe (on la note $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$) si et seulement si une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\forall (x_1, x_2, .., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p, \left(x_1 + x_2 + .. + x_p = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = .. = x_p = 0_E\right)$.
- $\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i, \exists! (x_1, x_2, .., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p, x = x_1 + x_2 + .. + x_p$.

Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels : soit $F_1, F_2, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On suppose que pour $1 \leq i \leq p$, B_i est une base de F_i.
On note B la famille de vecteurs obtenue en concaténant les vecteurs des bases $B_1, B_2, ..., B_p$.

- $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$ **(Formule de Grassmann)**
- $\dim\left(F_1 + F_2 + ... + F_p\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\left(F_i\right)$
- Si $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$, alors B est une base de E, **adaptée** à la décomposition $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$.
- Réciproquement, si B est une base de E, alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$

  En particulier, $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(F_i\right)$.

Montrer que deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires : $F \oplus G = E$:

- En dimension finie, $F \oplus G = E$ si et seulement si $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$.
- En dimension finie, $F \oplus G = E$ si et seulement si en réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de E.
- En dimension quelconque, on peut prouver (souvent par analyse-synthèse) $\forall x \in E, \exists!(f,g) \in F \times G, x = f + g$
- Si $F_1 \oplus F_2 = E$ et $x \in E$, on n'a pas forcément $x \in F_1$ ou $x \in F_2$.

Applications linéaires : soit $f : E \to F$.

- f est linéaire si et seulement si $\forall \lambda \in K, \forall (x,y) \in E^2, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
- f est un isomorphisme si et seulement si f est linéaire et bijective.
- f est un endomorphisme de E si et seulement si f est linéaire, de E dans $E = F$.
- f est un automorphisme de E si et seulement si f est linéaire, bijective, de E dans E.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base si l'espace de départ est de dimension finie.
- Si E et F sont de dimension finie, $\dim(L(E,F)) = \dim E . \dim F$

Noyau et Image : soit $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$ Alors :

- L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = \{ y \in F, \exists x \in E, f(x) = y \}$
- $f \in L(E,F)$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- Le noyau de f est $Ker(f) = \{ x \in E, f(x) = 0_F \}$.
- f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.
- $g \circ f = 0_{L(E,G)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset Ker(g)$.

Projections : On suppose $A \oplus B = E$. Ainsi si $x \in E$, $\exists!(a,b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$.

- La projection sur A parallèlement à B est l'endomorphisme p de E défini par $p(x) = a$.
- p est alors la projection sur $\mathrm{Im}(p) = A = \{ x \in E, p(x) = x \} = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $Ker(p) = B$.
- Si E est de dimension finie, alors p est diagonalisable dans une base obtenue en réunissant une base de $A = Ker(p - Id_E)$ et de $B = Ker(p)$
- Si $f \in L(E)$ vérifie $f \circ f = f$, alors $E = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $Ker(f)$.

Symétries : On suppose $A \oplus B = E$. Ainsi si $x \in E$, $\exists!(a,b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$.

- La symétrie par rapport à A parallèlement à B est définie par $s(x) = a - b$.
- $s \in GL(E)$, $s \circ s = Id_E$, $s^{-1} = s$.
- Soit $f \in L(E)$. Si $f \circ f = Id_E$, alors $E = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$ et f est la symétrie par rapport à $A = Ker(f - Id_E)$ parallèlement à $B = Ker(f + Id_E)$.
- s est diagonalisable dans une base obtenue en réunissant une base de A et de B.

Formes linéaires et hyperplans : on suppose $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $H \subset E$.

- Une forme linéaire est une application linéaire de E dans K.
- H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n-1$.
- Soit u une forme linéaire non nulle sur E. Alors $Ker(u)$ est un hyperplan.

C) Matrices et applications linéaires

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$.
Soient $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E et $C = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F.

Matrice d'une application linéaire. Soit $g \in L(E,F)$. La matrice $A = M_{B,C}(g) \in M_{np}(K)$ de g dans les bases B et C est obtenue en reportant dans la j-ème colonne les coordonnées du vecteur $g(e_j)$ dans la base C : $\forall\, j \in [\![1, p]\!], g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f_i$.

Matrice d'une composée : soit G un espace vectoriel de dimension $q \in \mathbb{N}^*$ et D base de G. Soit $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors $M_{B,D}(v \circ u) = M_{C,D}(v).M_{B,C}(u)$.

Produit matriciel : Soit $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$ et $X \in M_{p,1}(K)$. Soit g une application linéaire g telle que $M_{B,C}(g) = A$ Alors :

- $AB \in M_{n,q}(K)$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!], (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$.
- $AX \in M_{n,1}(K)$ et pour $i \in [\![1, n]\!], (AX)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} X_k$
- Pour trouver les coordonnées de l'image d'un vecteur x par g, on calcule AX.
- Pour trouver le noyau de g, on peut résoudre $AX = 0$.

Rang : Soit $g \in L(E,F)$ et $A = M_{B,C}(g) \in M_{np}(K)$. Soient $C_1, ..., C_p$ les colonnes de A

- $rg(A) = \dim\left(Vect(\{C_1, ..., C_p\})\right) = rg(A^T)$.
- $rg(g) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = rg(A)$
- $\dim(E) = rg(g) + \dim(Ker(g))$ (**théorème du rang**).
- $\ker(A) = \{X \in M_{p,1}(K), AX = 0\}$ et $\dim(Ker(A)) = p - rg(A)$.
- Si $B \in M_{p,q}(K)$, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$ et $rg(AB) = rg(A)$ si B est inversible.

Calculs de puissances de matrices : pour calculer A^n , avec $A \in M_p(K)$, on peut

- Calculer A^2, deviner le résultat ou sa forme et le prouver par récurrence.
- Utiliser le binôme de Newton : si $A = B + C$, où $BC = CB$, $(B+C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$
- Diagonaliser (ou trigonaliser) A et l'écrire $A = P\,D\,P^{-1}$, puis utiliser $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Inverse et transposée : Soit $A, B \in GL_n(K)$. Soient $C, D \in M_n(K)$ Alors :

- $(C\,D)^T = D^T C^T$
- $(AB) \in GL_n(K)$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $A^T \in GL_n(K)$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Matrices inversibles et bijectivité : Soit $g \in L(E)$ et $A = M_B(g) \in M_p(K)$.

- g est bijective si et seulement si $A \in GL_p(K)$. On a alors $A^{-1} = (M_B(g^{-1}))$.
- g est bijective si et seulement si g est injective (ou surjective).
- A est inversible si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
  - $\ker(A) = \{0\}$
  - $rg(A) = p$
  - $\det(A) \neq 0$
  - Les colonnes de A forment une famille libre dans K^n.

Trace : soient $A, B \in M_n(K)$. Alors :

- $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = tr(A^T)$
- $tr\,(A\,B) = tr\,(B\,A)$

Déterminant : soit $A, B \in M_n(K)$. Alors :

- Quand on échange deux colonnes de A, le déterminant est multiplié par (-1).
- Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.
- si $\lambda \in K$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est inchangé.
- $\det(AB) = \det(A).\det(B)$ et si $A \in GL_n(K)$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- $\det(A^T) = \det(A)$. Les opérations sur les lignes ont le même effet sur le déterminant que celles sur les colonnes.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne : soit $A \in M_n(K)$ et $n \geq 2$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M(i,j))$, où $M(i,j) \in M_{n-1}(K)$ est la matrice obtenue en supprimant la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne de A. Alors :

- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} D_{i,j}$ (développement par rapport à la $j-ème$ colonne de A).
- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} D_{i,j}$ (développement par rapport à la $i-ème$ ligne de A).

Déterminant de Van der Monde. Soit $n \geq 2$. Soit $x_1,...,x_n \in K$ et $V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice de Vandermonde. Alors V_n est inversible si et seulement si $x_1,...,x_n$ sont deux à deux distincts. On a par ailleurs $\det(V_n) = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i)$.

Matrices par blocs : Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in K$. On suppose :
$A, A' \in M_q(K), B, B' \in M_{q,n-q}(K), C, C' \in M_{n-q,q}(K), D, D' \in M_{n-q}(K)$. Alors :

- $M + \lambda N = \begin{pmatrix} A+\lambda A' & B+\lambda B' \\ C+\lambda C' & D+\lambda D' \end{pmatrix}$ et $M\,N = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$
- Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_n(K)$, est **triangulaire par blocs**, alors $\det(M) = \det(A).\det(D)$.

Sous-espaces stables et blocs : soit G un sous-espace vectoriel de E . Soit $f, g \in L(E)$.

- G est stable par f si et seulement si $f(G) \subset G$ ($\forall x \in G, f(x) \in G$).
- Les sous-espaces propres de f sont stables par f .
- Si $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces propres de f sont stables par g .
- Si B est une base adaptée à G (c'est-à-dire une base $(e_1,..,e_q)$ de G complétée en une base $e = (e_1,..,e_p)$ de E), G est stable par f si et seulement si $M_e(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in M_q(K), B \in M_{q,n-q}(K), D \in M_{n-q}(K)$.

D) <u>Changement de base. Réduction.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim(E) = n$. Soient B, B' deux bases de E . Soit $f \in L(E)$ et $A = M_B(f)$.

Eléments propres d'une application linéaire : soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in K$. Alors :

- λ est **valeur propre** de f si seulement si il existe $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda\, x$.
- Tout vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda\, x$ est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .
- Lorsque $\lambda \in Sp(f)$, $\ker(f - \lambda\, Id_E)$ est le **sous-espace propre** associé à λ
- Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et noté $Sp(f)$.

Eléments propres d'une matrice : soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors :

- λ est **valeur propre** de A si seulement si il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda\, X$.
- Tout vecteur $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda\, X$ est un **vecteur propre** associé λ .

- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A et noté $Sp(A)$.
- **le sous-espace propre** associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(A) = \ker\left(A - \lambda I_n\right)$.
- 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible. Alors $E_0(A) = \ker A$.
- Pour déterminer la dimension de $E_\lambda(A) = \ker\left(A - \lambda I_n\right)$, il suffit de trouver $rg\left(A - \lambda I_n\right)$ et d'utiliser le théorème du rang.
- Si $A \in M_n(K)$ est une matrice **triangulaire**, alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A.

Polynôme annulateur : soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K\left[X\right]$. Soient $u, v \in L(E)$ et $A, B \in M_n\left(K\right)$.

- On définit $P(u) \in L(E)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u \circ u + ... + a_p u^p$.
- P est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0_{L(E)}$.
- On définit $P(A) \in M_n\left(K\right)$ par $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$.
- P est un polynôme annulateur de A si et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle.
- Si P est un polynôme annulateur de A et λ est valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.

Polynôme caractéristique : soit $A \in M_n(K)$.

- Le polynôme caractéristique de A est χ_A défini par $\chi_A(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - A\right)$. Ses racines sont les valeurs propres de A.
- χ_A est unitaire, de degré n, et $\chi_A = X^n - Tr(A) X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A)$
- Si $\lambda \in Sp(A)$, sa multiplicité $mult\left(\lambda\right)$ comme valeur propre de A est sa multiplicité comme racine de χ_A. On a alors $1 \le \dim\left(E_\alpha(A)\right) \le mult(\lambda)$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$ de A, alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A de multiplicité p.
- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, A possède n valeurs propres complexes comptées avec leur multiplicité (en particulier, A possède au moins une valeur propre complexe).
- La somme des valeurs propres complexes de A (comptées avec leur multiplicité) est égale à $tr(A)$ et leur produit à $\det(A)$.
- $\chi_A(A) = (0)$ (théorème de Cayley-Hamilton).

Matrice de passage et matrices semblables : soient $A, A' \in M_n(K)$, avec $A = M_B(f)$.

- La matrice de passage de B à B', notée $P = P_{B,B'}$, est obtenue en reportant en colonnes les coordonnées des vecteurs de la base B' dans B. Si $M_B(f) = A$ et $M_{B'}(f) = A'$, alors $A = P A' P^{-1}$.
- A et A' sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P A' P^{-1}$
- A et A' sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

- Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique.
- Si $\lambda \in K$, la seule matrice semblable à λI_n est λI_n.

Endomorphisme diagonalisable : f est diagonalisable si et seulement si on a un des critères suivants :

- il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est diagonale (B est ainsi constituée de vecteurs propres de f).
- $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$
- $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = \dim(E)$.
- Il existe un polynôme $P \in K[X]$, scindé à racines simples, tel que $P(f) = 0_{L(E)}$

Endomorphisme induit : Soient $f \in L(E)$, et F sous-espace vectoriel de E ,stable par f.

- L'endomorphisme induit par f sur F est $f_F : \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.
- Si f est diagonalisable, alors f_F est diagonalisable.

Matrice diagonalisable : soit $A \in M_n(K)$ et $f \in L(E)$ tel que $A = M_B(f)$. Alors A est diagonalisable si et seulement si on a un des critères suivants :

- f est diagonalisable.
- A est semblable à une matrice diagonale.
- $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = n$
- χ_A est scindé sur K et pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(A)$, $mult(\lambda) = \dim\left(E_\lambda(A)\right)$
- Il existe un polynôme $P \in K[X]$, scindé à racines simples, tel que $P(A) = 0$.

Cas particuliers fondamentaux :

- Si A possède une unique valeur propre $\lambda \in K$, A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.
- Si $A \in M_n(K)$ admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Matrice trigonalisable : soit $A \in M_n(K)$ et $f \in L(E)$ tel que $A = M_B(f)$. Alors A est trigonalisable si et seulement si on a un des critères équivalents suivants :

- A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- χ_A est scindé sur K (en particulier, dans $M_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable).

E) **Produit scalaire, expaces euclidiens.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire : Soit h une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit que h est **bilinéaire** si et seulement si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables ($\forall x, x', y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} h(\lambda x + x', y) = \lambda h(x, y) + h(x', y) \\ h(x, \lambda y + y') = \lambda h(x, y) + h(x, y') \end{cases}$)
- On dit que h est **symétrique** si et seulement si $\forall x, y \in E, h(x, y) = h(y, x)$
- On dit que h est **définie positive** si et seulement si $\forall x \in E, \begin{cases} h(x, x) \geq 0 \\ h(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$

h est un **produit scalaire** sur E si et seulement si h est symétrique, bilinéaire, définie positive.
Un **espace euclidien** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.
Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x / x \rangle}$. $\| \ \|$ est une norme sur E : c'est la norme euclidienne. De plus :

- $\forall (x, y) \in E^2, \left| \langle x, y \rangle \right| \leq \|x\| . \|y\| \quad (1)$
- Il y a égalité dans (1) si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Base orthonormée : soit $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien. Soit $f \in L(E)$. Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille d'éléments de E.

- $(u_1, ..., u_n)$ est orthonormée si et seulement si $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$.
- Toute famille orthonormée est libre.
- Il existe une base orthonormée de E.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormée** de E.

Si $M = M_B(f)$, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $X = M_B(x)$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ et $Y = M_B(y)$. alors :

- $\forall i \in \{1, 2, .., n\}, x_i = \langle x, e_i \rangle$.
- $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y = Y^T X$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = X^T X$
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!], M_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel : soit $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien. Soit A un sous-espace vectoriel de E.

- L'orthogonal de A dans E est défini par $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.
- Si $A \perp B$ ($\forall x \in A, \forall y \in B, \langle x, y \rangle = 0$), alors $A \subset B^\perp$
- Si $(a_1, .., a_k)$ est une base de A et si $x \in E$, on a $x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, .., k\}, \langle x | a_i \rangle = 0$.
- Si A **est de dimension finie,** alors $A \oplus A^\perp = E$.
- Si E est de dimension finie, $(A^\perp)^\perp = A$

Projection orthogonale : Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(e_1,..,e_p)$ une base **orthonormée** de V.

- La projection orthogonale p_V sur V est la projection sur V parallèlement à $V^{\perp}$.
- $p_V(x)=\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle e_i$ (utile si on a une base orthonormée).
- La symétrie orthogonale s_V par rapport à V est la symétrie par rapport à V parallèlement à $V^{\perp}$. On a $s_V=2p_V-Id_E$.

Orthogonalisation de Gram-Schmidt : Soit $(e_1,...,e_n)$ une famille **libre** d'éléments d'un espace préhilbertien**.** Alors il existe une famille orthogonale $(f_1,...,f_n)$ de vecteurs non nuls tels que $\forall k\in[\![1,n]\!], Vect(e_1,...,e_k)=Vect(f_1,...,f_k)$. De plus, si on note $F_k=Vect(e_1,...,e_k)$, on peut prendre $f_{k+1}=e_{k+1}-p_{F_k}(e_{k+1})$, où p_{F_k} est la projection orthogonale sur F_k.

Distance à un sous-espace vectoriel : Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie. Soit $x\in E$. La distance de x à V est $d(x,V)=\inf_{v\in V}(\|x-v\|)=\|x-p_V(x)\|$. Avec Pythagore, $d^2(x,V)=\|x\|^2-\|p_V(x)\|^2$.

Matrices orthogonales : soit $M\in M_n(\mathbb{R})$.Soit $(C_1,...,C_n)$ les colonnes de M et $(L_1,...,L_n)$ ses lignes.

- M est une matrice orthogonale (on note $M\in O_n(\mathbb{R})$) si et seulement si $M^TM=I_n$, ce qui équivaut aussi à $(C_1,...,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, ou encore à $(L_1,...,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.
- La matrice de passage d'une base **orthonormée** à une autre est une matrice orthogonale.
- Si $M\in O_n(\mathbb{R})$, alors $|\det(M)|=1$ (la réciproque est fausse).

Isométries : Soit $B=(e_1,...,e_n)$ une base **orthonormée** de E euclidien. Soit $f\in L(E)$. f est une **isométrie** de E (on note $f\in O(E)$) si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- f conserve la norme : $\forall x\in E, \|f(x)\|=\|x\|$.
- f conserve le produit scalaire : $\forall x,y\in E, \langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$
- $f(B)=(f(e_1),...,f(e_n))$ est orthonormée.
- $M_B(f)\in O_n(\mathbb{R})$.

Sous-espaces stables : soit $f\in O(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f. Alors $f(F)=F$ et $F^{\perp}$ est stable par f.

Groupe orthogonal en dimension 2 : les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ sont (avec $\theta \in \mathbb{R}$) :

- Les matrices de rotations $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, qui sont les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$.
- Les $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Lorsque $\theta \neq 0[\pi]$, les matrices de rotations n'admettent pas de valeur propre réelle.

Endomorphismes autoadjoints ou symétriques (ne pas confondre avec les symétries) **:** Soit B une base **orthonormée** de E euclidien. Soit $f \in L(E)$. Soit $A = M_B(f)$
f est **autoadjoint** si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- $\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
- $A = M_B(f) \in S_n(\mathbb{R})$ (ou encore $A = A^T$).

Projecteurs autoadjoints : soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors p est autoadjoint si et seulement si p est une projection orthogonale.

Théorème spectral :

- $f \in L(E)$. On suppose que f est autoadjoint. Alors f est diagonalisable et il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f.
- Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, symétrique **réelle**. Alors A est diagonalisable et il existe une matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs : Soit $f \in S(E)$, autoadjoint.

- f est **autoadjoint positif** (on note $f \in S^+(E)$) si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
  - $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle \geq 0$.
  - $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$.
- f est **autoadjoint défini positif** (on note $f \in S^{++}(E)$) si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
  - $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle f(x), x \rangle > 0$.
  - $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Matrices symétriques définies positives ou définies positives : Soit B une base **orthonormée** de E euclidien. Soit $f \in S(E)$, autoadjoint. Soit $A = M_B(f) \in S_n(\mathbb{R})$, symétrique.

- A est **symétrique positive** (on note $A \in S_n^+(\mathbb{R})$) si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
  - $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$
  - $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T AX \geq 0$
  - $f \in S^+(E)$

- A est **symétrique définie positive** (on note $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
  - $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$
  - $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T AX > 0$
  - $f \in S^{++}(E)$

F) <u>Espaces vectoriels normés</u>

Norme : soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel et N une application de E dans $\mathbb{R}$. Alors N est une norme sur E si et seulement si :

- $\forall u \in E, N(u) \geq 0$
- $\forall u \in E, N(u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$
- $\forall u, v \in E, N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (Inégalité triangulaire)

Suite : Soit une suite (x_n) d'éléments de E et $a \in E$. $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a \Leftrightarrow \|x_n - a\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Suites de matrices :

- Une suite de matrices (M_n) d'éléments de $M_p(K)$ converge vers $M \in M_p(K)$ si et seulement si elle converge vers M coefficient par coefficient.
- Toute matrice $A \in M_p(K)$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

Equivalence des normes : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E.

- On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** si et seulement s'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x \in E, \begin{cases} N_1(x) \leq aN_2(x) \\ N_2(x) \leq bN_1(x) \end{cases}$.
- Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes. Dans ce cas, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie.

Topologie d'un espace vectoriel normé : soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

- A est **convexe** si et seulement si $\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1], tx + (1-t)y \in A$.
- A est **fermé** si et seulement si pour tout suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $a \in E$, on a $a \in A$.
- A est **borné** si et seulement si $\exists M > 0, \forall x \in E, \| x \| \leq M$.
- A est **ouvert** si et seulement si son complémentaire dans E est fermé.
- A est ouvert si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$.
- $a \in E$ est **adhérent** à A si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$. L'adhérence de A, notée $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.
- Soit $D \subset A$. On dit que D est **dense** dans A si et seulement si pour tout élément $a \in A$, il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a.

Continuité : Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés $f : E \to F$. Soit $a \in E$. Soit $A \subset E$.

- f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{\to} f(a)$.
- Caractérisation séquentielle : f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$, on a $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\to} f(a)$.
- Soit $k \in \mathbb{R}_+$. f est $k-$lipschitzienne sur A si et seulement si $\forall x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$. Elle est alors continue sur A.
- Si f est continue sur E :
  - Si G est un fermé de F, alors $f^{-1}(G) = \{x \in E, f(x) \in G\}$ est un fermé de E.
  - Si O est un ouvert de F, alors $f^{-1}(O) = \{x \in E, f(x) \in O\}$ est un ouvert de E.

Continuité en dimension finie : Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés $f : E \to F$. On suppose E **de dimension finie**. Soit $A \subset E$.

- **Théorème des bornes atteintes :** On suppose que A est non vide, **fermé et borné**. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet donc un minimum et un maximum global sur A).
- Les applications linéaires et bilinéaires sur E sont continues sur E.
- $\det : M_n(K) \to K$ est continue sur $M_n(K)$.

Kit de survie : Probabilités

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé**.**

A) Probabilité sur un univers fini ou dénombrable.

Union ou intersection infinie. Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements.

- $\mathrm{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.
- $\mathrm{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.

Conditionnement : Soient $A, B \in T$, avec $P(B) > 0$. Alors $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A/B) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

Formule de probabilités composées. Soit $n \geq 2$ et soit $A_1,..A_n$ des événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors $\forall k \leq n-1, \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_k) \neq 0$ et on a
$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2 / A_1) ... \mathrm{P}(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$

Système complet d'événements : Soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de T.
$\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un **système complet d'événements** si et seulement si $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω : $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Quand on remplace $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(A_n\right) = 1$, on parle de système quasi-complet.

Formule des probabilités totales : soit $B \subset \Omega$ un événement.
Si $A \subset \Omega$, on adopte la convention $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A) = 0$ si $\mathrm{P}(A) = 0$.

- Si $(A_1, A_2, ..., A_n)$ est un système complet d'événements, alors :

  $$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B / A_i)$$

- Soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet ou quasi-complet d'événements. Alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B / A_n) P(A_n)$

Evénements indépendants : Soit $n \geq 2$ et $A_1, ..., A_n \subset \Omega$ des événements.

- $A_1, ..., A_n$ sont indépendants si et seulement si pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, pour tous $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, on a $\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\mathrm{P}(A_{i_2})...\mathrm{P}(A_{i_k})$
- Si $A_1, ..., A_n$ sont indépendants et $\forall k \in [\![1, n]\!], B_k \in \left\{A_k, \overline{A_k}\right\}$. Alors $B_1, B_2, .., B_n$ sont indépendants.

B) Variables aléatoires

Loi d'une variable aléatoire X : il s'agit de trouver l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire, et de déterminer $P(X=x)$ pour chaque $x \in X(\Omega)$

Couple de variables aléatoires : Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

- **La loi** conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, des $\mathrm{P}((X=x) \cap (Y=y)) = \mathrm{P}(X=x, Y=y)$.
- Les **lois marginales** du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y. Elles se déduisent de la loi du couple (X, Y) : $\mathrm{P}(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathrm{P}(X=x, Y=y)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Indépendance des variables aléatoires : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, X, Y$ des variables aléatoires discrètes sur Ω.

- On dit qu'elles sont **indépendantes** si et seulement si on a : $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, \forall x_n \in X_n(\Omega), \mathrm{P}((X_1 = x_1) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X_k = x_k)$
- Pour prouver que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$ tels que $\mathrm{P}(X=x) > 0$ et $\mathrm{P}(Y=y) > 0$, mais $\mathrm{P}(X=x, Y=y) = 0$.
- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et que pour $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est une fonction définie sur $X_k(\Omega)$.Alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.
- **Lemme des coalitions :** si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, que $1 \leq p < n$, alors si f et g sont deux fonctions, $f(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Loi d'un maximum ou d'un minimum : lorsque X est le maximum (ou le minimum) d'un nombre fini de variables aléatoires réelles discrètes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes, mieux vaut calculer $\mathrm{P}(X \leq x)$ (ou $\mathrm{P}(X \geq x)$) pour $x \in X(\Omega)$.

C) Espérance et variance

Espérance : Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe discrète sur Ω.

- Alors X est d'espérance finie si et seulement si la famille $(x P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X est définie par $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$.
- Si $X(\Omega) \subset [0, +\infty]$, on définit toujours $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) \in [0, +\infty]$.
- Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$

Propriétés de l'espérance : Soient $X_1, X_2, ..., X_n, X, Y$ des variables aléatoires discrètes sur Ω. On suppose Y à valeurs réelles et $X_1, X_2, ..., X_n, X$ à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On suppose que Y est d'espérance finie et que $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq Y(\omega)$. Alors X est d'espérance finie.
- L'espérance est linéaire : si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont d'espérance finie et que $a_1, a_2, .., a_n \in K$, alors $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$.
- Si $X_1, ..., X_n$ sont **indépendantes** et d'espérance finie, alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ est également d'espérance finie et $E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$.

Théorème de transfert : Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω.et $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$.

- $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2 ... x_n\}$ est fini, on a directement $E(f(X)) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)P(X = x_j)$.

Variance et écart-type : Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω. On suppose que X^2 est d'espérance finie. Alors X est d'espérance finie et admet une variance $V(X)$. On a :

- $V(X) = E((X - EX)^2) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 \geq 0$.
- L'écart-type de X est égal à $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, il vient alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- X est centrée si et seulement si $E(X) = 0$. Elle est centrée réduite si et seulement si $V(X) = 1$.

Covariance : soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie.

- Alors XY est d'espérance finie et $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$ (Cauchy-Schwarz).
- $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$ est la covariance de X et Y.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X,Y) = 0$

Variance d'une somme : Soit $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω. On suppose que $X_1^2, X_2^2, .., X_n^2$ sont d'espérance finie. Alors :

- $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}\left(X_i, X_j\right)$.
- On suppose que $X_1, X_2, .., X_n$ sont deux à deux indépendantes.
  Alors $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$

Inégalité de Markov. Soit Y une variable aléatoire réelle discrète sur Ω. On suppose Y **à valeurs positives** et d'espérance finie. Alors : $\forall a > 0, \mathrm{P}(Y \geq a) \leq \dfrac{E(Y)}{a}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω. On suppose qu'elle admet une variance. Alors $\forall \lambda > 0, P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{\lambda^2}$.

Loi faible des grands nombres : Soit $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω. On suppose que $X_1^2, X_2^2, .., X_n^2$ sont d'espérance finie et que $X_1, X_2, .., X_n$ ont même loi et sont indépendantes. On pose $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Alors pour tout $\lambda > 0$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geq \lambda\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\lambda^2}$ et donc $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geq \lambda\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Fonction génératrice : soit X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est définie en tout réel t tel que t^X est d'espérance finie et donnée par $G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$. Cette **série entière** a un rayon de convergence $R \geq 1$.

- Il y a convergence normale sur $[-1,1]$, donc G_X est continue sur $[-1,1]$.
- La loi de X est entièrement déterminée par sa fonction génératrice. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \dfrac{G_X{}^{(k)}(0)}{k!}$.
- X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $E(X) = G_X{}'(1)$.
- Soient $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!], G_{X_k}(t)$ existe. Alors $G_{X_1+...+X_N}(t)$ est défini et $G_{X_1+...+X_N}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.

D) <u>Lois usuelles</u>

Lois usuelles finies : Ici, $X(\Omega) = \{x_1, x_2 ... x_n\}$ est fini.

- X suit une loi **uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
- X suit une loi de **Bernoulli** $B(p)$ de paramètre $p \in [0,1]$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X = 1) = p$. On a alors $P(X = 0) = 1 - p$.
- Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. X suit une loi **binomiale** $B(n, p)$ si et seulement si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et que pour $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Si $X_1, X_2, .., X_n$ sont de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et sont indépendantes, alors $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi binomiale $B(n, p)$.

Loi de Poisson. Soit X,Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur Ω.
X suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda>0$, notée $P(\lambda)$ si et seulement si $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et
$\forall n\in\mathbb{N}, P(X=n)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

Loi géométrique. Soit $p\in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω. On dit que X suit **une loi géométrique** de paramètre p, notée $G(p)$ si et seulement si $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$.
C'est la loi du **temps d'attente d'un premier succès**.
On a en particulier pour $n\in\mathbb{N}^*$: $P(X>n)=(1-p)^n$

Tableau récapitulatif : (avec $q=1-p$)

Loi	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$	$G_X(t)$
$B(p)$	$\{0,1\}$		p	$p(1-p)$	$pt+1-p$
$B(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(pt+1-p)^n$
$U(n)$	$[\![1,n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$		
$P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$
$G(p)$	$\mathbb{N}^*$	pq^{n-1}	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pt}{1-qt}$

Kit de survie : Analyse

Les DL à connaître (lorsque x tend vers 0)

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} ..... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} ..... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $Arc\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
- $ch(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} ..... + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $sh(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

Quelques primitives :

Ici, f désigne une fonction d'une variable réelle et F une primitive de f.
u est une fonction d'une variable réelle, dérivable et à valeurs réelles.

1. si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = x^a$, $F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
2. si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = u'(x)\,(u(x))^a$, $F(x) = \dfrac{(u(x))^{a+1}}{a+1}$
3. si u ne s'annule pas, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $F(x) = \ln|u(x)|$
4. Si $a \in \mathbb{C}^*$, $f(x) = e^{ax}, F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax}$
5. $f(x) = \ln(x), F(x) = x\ln(x) - x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = Arc\sin(x)$
7. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{a} Arc\tan(\dfrac{x}{a})$

Quelques formules de trigonométrie :

Pour tous réels x et y, on a :

- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos(x).\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Les DSE à connaître

Sur $\mathbb{C}$

- $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
- Si $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Sur $\mathbb{R}$

- $\forall x \in \left]-1,1\right[, \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$
- $\forall x \in \left]-1,1\right[, \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-1,1\right[, (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, sh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall x \in \left]-1,1\right[, \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n$

1) Complexes

Formule du binôme de Newton. Soit a,b deux complexes et n un entier naturel. Alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Angle moitié : pour trouver l'expression trigonométrique d'une somme (ou d'une différence), on utilise souvent la méthode de « l'angle moitié ».

Ainsi, si $a,b \in \mathbb{R}$, $e^{ia} - e^{ib} = e^{i(\frac{a+b}{2})}\left(e^{i(\frac{a-b}{2})} - e^{i(\frac{b-a}{2})}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(\frac{a+b}{2})}$.

Racines n-èmes : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$. Ce sont les $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ avec $0 \le k \le n-1$. On les appelle les racines n-ièmes de l'unité.
- Si $Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors l'équation $z^n = Z$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$. Ce sont les $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}.e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, avec $0 \le k \le n-1$.

Inégalités triangulaires : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $z_1, z_2, ..., z_n, z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

1) $|z+z'| \le |z| + |z'|$ et $|z-z'| \le |z| + |z'|$.
2) $|z-z'| \ge \big||z| - |z'|\big|$
3) $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |z_i|$

2) Fonctions : continuité et dérivation.

Partie entière : soit x un réel. Il existe un unique entier relatif p tel que $p \le x < p+1$. p est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. On a alors $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x$.

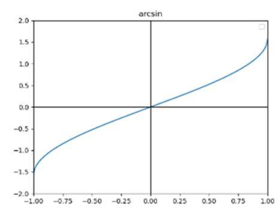
Propriétés : des inégalités utiles.

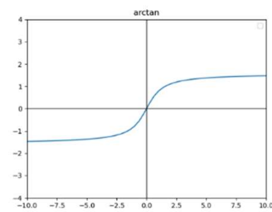
- $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \ln(1+x) \le x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \ge 1+x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \le |x|$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}, |ab| \le \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Croissance comparée : On considère $\alpha, \beta > 0$. On a alors $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. $x^\beta |\ln x|^\alpha \underset{x\to0^+}{\to} 0$ $|x|^\beta e^{\alpha x} \underset{x\to-\infty}{\to} 0$

Fonctions usuelles :

- $Arc\sin$ est continue sur $[-1{,}1]$, dérivable sur $]-1{,}1[$, à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\forall x \in]-1{,}1[, \mathrm{Arcsin}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $Arc\tan$ est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. On a : $\mathrm{Arctan}(0)=0$; $\mathrm{Arctan}(1)=\dfrac{\pi}{4}$ et $\mathrm{Arctan}(x)\underset{x\to+\infty}{\to}\dfrac{\pi}{2}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{Arctan}'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$





Théorème des valeurs intermédiaires : soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a,b\in I$. Alors si t est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c)=t$. En particulier, lorsque $f(a).f(b)\le 0$, f s'annule entre a et b.

Théorème de la bijection (exemple) : si f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles et $f(x)\underset{x\to0^+}{\to}1$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$, alors pour tout $t\in]1,+\infty[$, l'équation $f(x)=t$ admet une unique solution x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Dérivée de la réciproque.
Soit f C^∞ sur I, strictement monotone donc bijective de I sur $J=f(I)$. On suppose aussi $\forall a\in I, f'(a)\neq 0$. Alors f^{-1} est C^∞ sur $J=f(I)$ et $\forall b\in J, \left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$

Théorème des bornes atteintes : soient a et b deux réels, avec $a<b$, et f continue sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles. Alors f est bornée et admet un minimum m et son maximum M sur $[a,b]$.

Formule de Leibniz : soit $n\ge1$**.** Soient f et g deux fonctions C^n sur I, alors fg est C^n sur I et on a $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$

Théorème de Rolle : soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. On suppose que f est à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème des accroissements finis : soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. On suppose que f est à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

Inégalité des accroissements finis : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose $\exists M\in\mathbb{R}_+,\forall x\in I,|f'(x)|\le M$ Alors $\forall x,y\in I,|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$.

Inégalité de Taylor-Lagrange : Soit $n\in\mathbb{N}$; soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. Soit $a,b\in I$. On suppose qu'il existe $M_{n+1}\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall x\in I,\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_{n+1}$. Alors $\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\le\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$.

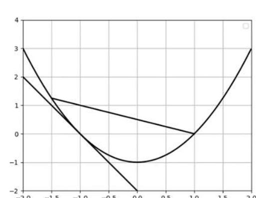
Théorème de la limite de la dérivée. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a\in I$. On suppose que :

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I\setminus\{a\}$.
- $f'(x)\underset{x\to a}{\to} l\in\mathbb{R}$

Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\underset{x\to a}{\to} l$. En particulier, f est dérivable en a et f' est continue en a.

Fonction convexe : Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On note C la courbe représentative de f.

- f est convexe sur I si et seulement si
  $\forall(x_1,x_2)\in I^2,\forall\lambda\in[0,1],f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\le(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$
  « L'image de la moyenne est plus petite que la moyenne des images »
- Si f convexe et dérivable sur I. Alors C est au-dessus de ses tangentes : $\forall a,x\in I,f(x)\ge f(a)+(x-a)f'(a)$ et en dessous de ses cordes (ou sécantes), qui sont les segments qui relient deux points de la courbe.
- Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si $\forall x\in I,f''(x)\ge0$



- f est concave sur I si et seulement si $(-f)$ est convexe sur I. On a les mêmes résultats avec des inégalités dans l'autre sens.

Fonctions équivalentes en a **:** on a trois manières de traduire que deux fonctions f et g sont équivalentes en a (ou que deux suites (U_n) et (V_n) sont équivalentes en $+\infty$) ;

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 1$ (ou $\dfrac{U_n}{V_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$)
- Il existe une fonction h définie sur I telle que $h(x) \underset{x\to a}{\to} 1$ et $f = g\,h$ au voisinage de a.

  (ou il existe (W_n) telle que $W_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $U_n = V_n W_n$ pour n assez grand).
- $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$ (ou $U_n \underset{n\to+\infty}{=} V_n + o(V_n)$)

DL d'une primitive. On suppose que $a \in I$ et que f admet un $DL_n(a)$. On suppose aussi que f admet une primitive F sur I. Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a. Si $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$, alors $F(a+h) \underset{h\to 0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1} h^{k+1} + o(h^{n+1})$.

Formule de Taylor-Young : Si f est de classe C^n sur I, et si $a \in I$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$, avec $h = x - a \underset{x\to a}{\to} 0$. On a aussi $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$.

3) Suites et série de nombres et de fonctions.

Définition de limite : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Soit $a \in K$. $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|x_n - a\right| \leq \varepsilon$.
- Soit (x_n) une suite **réelle**. $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \geq A$.

Théorème de la limite monotone : soit (x_n) une suite réelle.

- On suppose que (x_n) est croissante et majorée. Alors la suite (x_n) est convergente.
- On suppose que (x_n) est croissante et ne converge pas. Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

Suites adjacentes : Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Elles convergent alors vers la même limite.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : soit $(U_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Soit $a, b \in K$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$. Soit $S = \left\{U \in K^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n\right\}$. Alors on étudie l'équation (C) : $x^2 = a\,x + b$.

- Si (C) admet deux solutions distinctes $\alpha, \beta \in K$, alors $S = \left\{U \in K^{\mathbb{N}}, \exists A, B \in K, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = A\alpha^n + B\beta^n\right\}$
- si (C) admet une racine double $\alpha \in K$, alors $S = \left\{U \in K^{\mathbb{N}}, \exists A, B \in K, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = (A + Bn)\alpha^n\right\}$.

Limites possibles d'une suite récurrente : on considère $U_0 = c \in D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to D$. On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$. On suppose que f est **continue** en $a \in D$ et que (U_n) converge vers a. Alors $f(a) = a$.

Passage des inégalités à la limite : soit $(U_n), (V_n)$ deux suites réelles. On suppose que $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$ et $V_n \underset{n \to +\infty}{\to} b$. On suppose aussi $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \leq V_n$. Alors $a \leq b$.

Théorème d'encadrement pour les équivalents : soient $(U_n), (V_n)\ (W_n)$ trois suites. On suppose $V_n \underset{n \to +\infty}{\sim} W_n$ et $\exists N, \forall n \geq N, V_n \leq U_n \leq W_n$ **.** Alors $U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} V_n$

Formule de Stirling : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Croissance comparée, si $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$:
$(\ln n)^\alpha \underset{n \to +\infty}{=} o(n^\beta)$; $n^\alpha \underset{n \to +\infty}{=} o(e^{\beta n})$; $n^\alpha \underset{n \to +\infty}{=} o(a^n)$; $a^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n!)$.

Convergence d'une série : soit $(U_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. La série $\sum U_n$ est **convergente** si et seulement si la suite (S_n) est convergente. **En cas de convergence**,

- $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \lim_{n \to +\infty} S_n$ désigne sa somme (c'est donc un nombre).
- $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$ est **le reste** de la série. On a alors $R_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Lien suite-série : soit (U_n) une suite d'éléments de K. Alors (U_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (U_n - U_{n-1})$ est convergente.

Théorème spécial des séries alternées (TSSA) : on considère une série alternée $\sum U_n$. On suppose que $(|U_n|)$ est décroissante et converge vers 0. Alors $\sum U_n$ converge. De plus, si on note alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$, alors R_n a même signe que U_{n+1} et $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |U_{n+1}|$.

Séries de Riemann : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Sommes géométriques : soit $q \in \mathbb{C}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- On suppose $q \neq 1$ et $n \geq n_0$. Alors $\sum_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0} \dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$.
- Si $a,b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$
- $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^{n_0}}{1-q}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$.

Définition : $\sum_n U_n$ est dite absolument convergente (on dit aussi que (U_n) est sommable) si la série $\sum_n |U_n|$ est convergente. Si $\sum_n U_n$ est absolument convergente, alors $\sum_n U_n$ est convergente.

Méthode de comparaison série-intégrale : soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, monotone, positive, Si on peut trouver une primitive de f, on peut utiliser $\int f(t)dt$ pour estimer $\sum f(n)$.

Produit de Cauchy : soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries absolument convergentes. Soit $W_n = \sum_{p=0}^{n} U_p V_{n-p}$. Alors $\sum W_n$ converge absolument et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} U_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} V_q\right)$.

Résultats de convergence :

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq V_n$ et que $\sum_n V_n$ converge, alors $\sum_n U_n$ converge.
- On suppose $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ et V_n **de signe fixe**. Alors $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ ont même nature.
- On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{C}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $U_n = O(V_n)$ (c'est en particulier le cas si $U_n = o(V_n)$). **Si** $\sum_n V_n$ converge, **alors** $\sum_n U_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Règle de d'Alembert **:** Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\to} a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

  Si $0 \leq a < 1$, alors $\sum U_n$ converge. Si $a > 1$, alors $\sum U_n$ diverge grossièrement.

Convergence d'une suite de fonctions : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- Elle converge **simplement** vers f sur I si et seulement si $\forall x \in I, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$ (on fixe x et on regarde la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini).
- elle converge **uniformément** vers f sur I si et seulement si pour n assez grand, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Continuité de la limite : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge **uniformément** vers f sur I. Alors f est continue sur I.

Permutation limite-intégrale : deux possibilités.

- Sur un segment $I=[a,b]$, avec $a<b$. Si chaque f_n est continue et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors $\int_a^b f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)\,dt$.
- Sur un intervalle I quelconque (**Théorème de convergence dominée**). On suppose :
  - $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f
  - il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t\in I, \forall n\in\mathbb{N}, |f_n(t)|\leq\varphi(t)$ **(domination).**
  - Les f_n et f sont continues par morceaux sur I (accessoire).

  Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_I f(t)\,dt$.

Modes de convergence d'une série de fonctions : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I à valeurs dans K. La série de fonctions $\sum U_n$:

- converge **simplement** sur I si et seulement si chaque élément x fixé de I, la série $\sum U_n(x)$ est convergente. On peut alors définir S sur I par $\forall x\in I, S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$
- converge **uniformément** sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et que si on note $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$ pour $x\in I$, on a $\|R_n\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- converge **normalement** sur I si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction U_n est bornée sur I, et que la série $\sum\|U_n\|_\infty$ est convergente.
- La convergence normale sur I entraîne la convergence uniforme qui entraîne la convergence simple sur I.
- si $\|U_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum U_n$ ne converge pas uniformément sur I,

Continuité de la somme d'une série de fonctions : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K. On suppose que :

- Chaque U_n est continue sur I.
- $\sum U_n$ converge **uniformément** vers $S=\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ sur I

Alors S est continue sur I.
Il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment de I.

Théorème de la double limite : soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction U_n de I dans K. Soit a une borne de I qui peut être finie ou infinie. On suppose que :

- $\sum U_n$ converge uniformément sur I (ou sur $J \subset I$ contenant un voisinage de a)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(x) \underset{x \to a}{\to} W_n \in K$

Alors : $\sum W_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \underset{x \to a}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} W_n$

Dérivation : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- Chaque fonction U_n est C^k sur I.
- Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum U_n^{(i)}$ converge simplement sur I.
- $\sum U_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est de classe C^k sur I et $\forall x \in I, \forall i \in [\![1, k]\!], S^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n^{(i)}(x)$.
Il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment de I.

Permutation série-intégrale : soit $\sum U_n$ une série de fonctions définies sur I.

- Si chaque U_n est continue et que $\sum U_n$ converge **uniformément** vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ sur un **segment** $I = [a, b]$, alors $\sum \left(\int_a^b U_n(t)\, dt \right)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b U_n(t)\, dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t) \right) dt$.
- Sur un intervalle I **quelconque** : théorème d'intégration terme à terme. On suppose :
  - $\sum U_n$ converge simplement vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ sur I,
  - Chaque U_n est intégrable sur I,
  - La série $\sum \int_I |U_n(t)|\, dt$ converge **(hypothèse clé)**.
  - S continue par morceaux sur I (accessoire).

  Alors S est intégrable sur I, $\sum \int_I U_n(t) dt$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I U_n(t)\, dt \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t) \right) dt$

4) <u>Intégration. Intégrales impropres et intégrales à paramètres.</u>

On prend $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Formule de Taylor avec reste intégral : soient $a, b \in I$, et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} (b-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

Sommes de Riemann : soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $a\le b$. Alors $R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(a+j\frac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)dt$.

En particulier, $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{j}{n}) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)dt$ et $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)dt$

Théorème fondamental. soit f une fonction **continue** sur I à valeurs dans K. Soit $a\in I$. Alors f admet une primitive sur I et F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. En particulier, $F'=f$.

Convergence des intégrales et intégrabilité : Soit f continue par morceaux de I dans K.

- f est **intégrable** sur I si et seulement si $\int_I |f(t)|dt$ converge ($\int_I f(t)dt$ converge absolument).
- Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f(t)dt$ converge.
- Si f est de signe fixe sur I, alors (f intégrable sur I) $\Leftrightarrow$ ($\int_I f(t)dt$ converge).

Théorème de changement de variable. L'important est de savoir faire en pratique et d'avoir compris que les deux intégrales **ont même nature et sont égales si une des deux converge**.

Intégration par parties. Soient f et g des fonctions de classe C^1 sur I, un intervalle d'extrémités $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$. **On suppose que** fg **admet des limites finies en** a **et en** b. Alors les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ ont même nature et lorsqu'une des deux converge, on a l'égalité $\int_a^b f'(t)g(t)dt=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(t)g'(t)dt$.

Fonction continue, positive, d'intégrale nulle : soit $f:I\to\mathbb{R}$.
Si f est intégrable, **positive et continue** sur I et $\int_I f(t)dt=0$, alors $\forall t\in I, f(t)=0$.

Intégrales de référence : soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors :

- $t\to\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha<1$
- $t\to\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>1$
- $t\to\ln(t)$ est intégrable en 0^+
- $t\to e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>0$.
- On prend ici $I=]a,b]$ ou $I=]a,b[$. Alors f est intégrable en a si et seulement si $h\to f(a+h)$ est intégrable en 0^+. De même en b.

Outils pour étudier la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$, a,b bornes de I.

- On commence par dire que f est continue (par morceaux) sur I.
- On étudie ce qui se passe aux bornes de l'intervalle qui ne sont pas contenues dans I.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, g est intégrable en b **si et seulement si** f est intégrable en b.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O\big(g(x)\big)$ ou $f(x) \underset{x\to b}{=} o\big(g(x)\big)$ et g est intégrable en b, **alors** f est intégrable en b.
- Si $\forall t \in I, 0 \le |f(t)| \le g(t)$ et g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Continuité des intégrales à paramètres : On suppose que :

1) Pour tout $t \in I$, $x \to g(x,t)$ est continue sur A.
2) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |g(x,t)| \le \varphi(t)$ **(domination, hypothèse clé).**
3) Pour tout $x \in A$, $t \to g(x,t)$ est continue par morceaux sur I (accessoire).

Alors la fonction $f\ : x \mapsto \int_J g(x,t)\,dt$ est définie et continue sur I.

Il suffit d'avoir la domination pour tout $x \in [a,b]$, avec $a \le b$ éléments quelconques dans A.

Dérivation des intégrales à paramètres : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

1) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est C^n sur A.
2) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I.
3) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall t \in I, \forall x \in A, \left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \le \varphi(t)$ (Il suffit d'avoir cette **domination** sur tout segment $[a,b] \subset A$).
4) Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur J (accessoire)

Alors $f\ : x \to \int_J g(x,t)\,dt$ est définie et C^n sur I et $\forall k \in [\![1,n]\!], f^{(k)}(x) = \int_J \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\,dt$

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et a une extrémité, finie ou infinie, de A. Soit $g : \begin{array}{l} A \times I \to K \\ (x,t) \mapsto g(x,t) \end{array}$. On suppose que :

- $\forall t \in I, g(x,t) \underset{x\to a}{\to} l(t)$
- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |g(x,t)| \le \varphi(t)$ (si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $a = +\infty$, il suffit d'avoir cette domination pour $x \in [c, +\infty[$, avec $c > 0$)
- Pour tout $x \in A, t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto l(t)$ sont continues par morceaux sur I (accessoire)

Alors l est intégrable sur I et $\int_I g(x,t)\,dt \underset{x\to a}{\to} \int_I l(t)\,dt$.

5) Séries entières et équations différentielles

Rayon de convergence d'une série entière : Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

Le **rayon de convergence** R de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \left\{+\infty\right\}$.

- Si $|z| < R$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est grossièrement divergente.
- Si $|z| = R$, tout est possible.

Outils pour trouver le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. Soit $r > 0$.

- Utiliser la règle de d'Alembert si tous les a_n sont **non nuls** : si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} b \in \mathbb{R}$, alors $R = \dfrac{1}{b}$ si $b \in \mathbb{R}_+^*$, et $R = +\infty$ si $b = 0$.
- Si $\left(a_n r^n\right)$ est bornée, alors $R \geq r$ et si $\left(a_n r^n\right)$ ne tend pas vers 0, alors $R \leq r$
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n\right)$.

Produit de Cauchy de deux séries entières.
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p\, b_{n-p}$

Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, si $|z| < \min\left(R_a, R_b\right)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\right)$

Rayon de convergence et dérivation :

- Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Le rayon de convergence est inchangé par dérivation ou intégration terme à terme

Propriétés : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$, série entière de la variable réelle. On suppose $R = R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n\right) > 0$

- Alors $F : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_{n-1}}{n} t^n$ est une primitive de f sur $\left]-R, R\right[$. De plus, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ converge normalement sur tout segment de $\left]-R, R\right[$ (en particulier, on peut intégrer terme à terme sur tout segment $\left[c, d\right] \subset \left]-R, R\right[$).

- Pour $t \in \left]-R,R\right[$, on pose $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors f est de classe C^∞ sur $\left]-R,R\right[$. On obtient les dérivées successives de f en dérivant terme à terme.
- Il y a **unicité** du développement en séries entières : on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et si $\forall x \in \left]-r,r\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Equations différentielles du premier ordre : $(E): y' = a(x)y + b(x)$ et $(H): y' = a(x)y$. Soit A une primitive de a.

- L'ensemble des solutions de (H) est donné par $S(H) = \{(x \to \lambda \exp(A(x))), \lambda \in K\}$
- Les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant n'importe quelle solution particulière de (E) aux solutions de l'équation homogène (H).
- Pour trouver une solution particulière de (E), on peut utiliser **la méthode de variation de la constante** : si $S(H) = \{(x \to \lambda\, h(x)), \lambda \in K\}$, on cherche une solution de (E) de la forme $f(x) = \lambda(x)\, h(x)$, avec λ dérivable sur I.
- Problème de Cauchy : Soit $x_0 \in I$. Pour tout $\alpha \in K$, il existe une unique solution de (E) satisfaisant la condition initiale $h(x_0) = \alpha$.

Equation homogène du second ordre à coefficients constants. On suppose $a, b \in \mathbb{R}$ et
On note $(H): y'' + a\, y' + b\, y = 0$ et $(C): x^2 + a\, x + b = 0$

- Si (C) admet deux solutions réelles distinctes q et s, alors les solutions à valeurs réelles de l'équation (H) sont les $t \to A e^{qt} + B e^{st}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.
- Si (C) admet une unique solution réelle r, alors les solutions à valeurs réelles de l'équation (H) sont les $t \to \left(At + B\right)e^{rt}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.
- Si (C) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\omega, \alpha - i\omega$ (avec $\omega > 0$), alors les solutions de (H) sont les $t \to e^{\alpha t}\left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Equations avec second membre : soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation $(E): y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.
$(H): y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est l'équation homogène associée.

- Problème de Cauchy : Soit $t_0 \in I$. Soit y deux fois dérivable sur I. Soient $y_0, v_0 \in K$.

  Le problème de Cauchy $(P): \begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$ admet une unique solution.
- Les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant n'importe quelle solution particulière de (E) aux solutions de l'équation homogène (H).

Dans la suite, on considère U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une application.

Vecteur gradient, matrice Hessienne, développement limité : soit $a = (a_1,..,a_p) \in U$. On suppose que *f* est de classe C^2 sur U.

- Le gradient de f en a est le vecteur $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$.
- La matrice Hessienne de f en a, notée $H_f(a)$ est définie par $\forall i, j \in [\![1, p]\!], \left(H_f(a)\right)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Avec le théorème de Schwarz, $H_f(a) \in S_p\left(\mathbb{R}\right)$.
- f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage en $a = (a_1,..,a_p) \in U$. Pour $h = (h_1, h_2,..., h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$, on a :
  $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$.

Règle de la chaine : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur U et soient $x_1,..., x_p$ des fonctions dérivables sur I telles que $\forall t \in I, \left(x_1(t),..., x_p(t)\right) \in U$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$, avec pour $t \in I$, $g(t) = f\left(x_1(t),..., x_p(t)\right)$. Alors g est dérivable sur I, et on a $\forall t \in I, g'(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1(t),..., x_p(t)\right) x_j'(t)$.

Extrema locaux et points critiques : on suppose que f est de classe C^2 sur **l'ouvert** U. Soit $a \in U$.

- a est **un point critique** si et seulement si $\nabla f(a) = 0$.
- Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique.
- Si a est un point critique, alors :
  - Lorsque $H_f(a)$ possède une valeur propre strictement négative et une autre strictement positive, il n'y a pas d'extremum local en a.
  - Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives, il y a un minimum local strict en a.
  - Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives, il y a un maximum local strict en a.
  - Lorsque $Sp\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+$ (ou que $Sp\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-$), et que 0 est valeur propre de $H_f(a)$, on ne peut pas conclure.