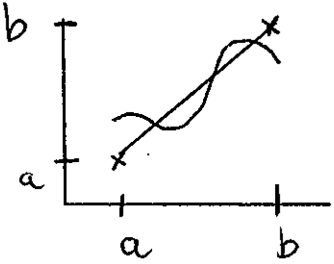
Première Partie



1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \phi(x) - x$.

On cherche à montrer que f s'annule. On a $\phi(a) \in [a,b]$ donc $f(a) = \phi(a) - a \geqslant 0$ et $f(b) \leqslant 0$

Comme f est continue, par théorème des valeurs intermédiaires, f possède au moins un point fixe dans $[a,b]$

2) Soit $c = \sup(\{|\phi'(x)|, x \in \mathbb{R}\})$. On pose $f(x) = \phi(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Il vient $f'(x) = \phi'(x) - 1 \leq c - 1 < 0$ (1)

Donc comme f est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x (c-1)dt$ pour $x \geqslant 0$

donc $f(x) \leq f(0) + (c-1)x$, avec $c - 1 < 0$.

Donc par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

De même, pour $x < 0$, $\int_x^0 f'(t)dt \leq \int_x^0 (c-1)dt$

donc $f(0) - f(x) \leq (1-c)x$ et $f(x) \geqslant (c-1)x + f(0)$

Donc par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

En outre, avec (1), f est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Avec les limites aux bornes, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $\exists!\, c \in \mathbb{R},\ f(c)=0$ et $\exists!\, c \in \mathbb{R},\ \phi(c)=c$

3) Soit $\psi(x)=\sqrt{1+x^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Si $\psi(x)=x$, alors $\sqrt{1+x^2}=x$, donc $1+x^2=x^2$, ce qui est absurde.

Donc ψ ne possède pas de point fixe dans $\mathbb{R}$

Pourtant, pour $x \in \mathbb{R}$, $|\psi'(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

Or $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$ et ainsi $|\psi'(x)| < 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

On peut avoir $\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi'(x)| < 1$ sans que ϕ possède un point fixe

4) a) On note $(V_n)_1, \dots (V_n)_e$ les coordonnées de V_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Alors pour $i \in [\![1, d]\!]$:

$$0 \leq |(V_n)_{i+1} - (V_n)_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{e} |(V_n)_{j+1} - (V_n)_j|^2} = \|V_{n+1} - V_n\|.$$

Or $\sum (\|V_{n+1} - V_n\|)$ converge donc la série $\sum((V_n)_{i+1} - (V_n)_i)$ est absolument convergente, donc convergente.

Avec le lien suite-série, $(V_n)_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} V_i^* \in \mathbb{R}$.

On pose $V^* = (V_1^*, \dots V_n^*)$.

Alors $V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V^*$ (on a la convergence coordonnée par coordonnée) 2

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \geq n+1$

Alors $\|V_n - V_p\| = \|V_p - V_n\| = \|\sum_{k=n}^{p-1} (V_{k+1} - V_k)\|$

$$\leq \sum_{k=n}^{p-1} \|V_{k+1} - V_k\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|V_{k+1} - V_k\|$$

On passe l'inégalité à la limite quand $p \to +\infty$:

$(V_p - V_n) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} V^* - V_n$ et par continuité de la norme (elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^l$, car $\forall x, y \in \mathbb{R}^l$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$),

$\|V_p - V_n) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|V^* - V_n\|$.

On obtient donc $\boxed{\|V_n - V^*\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|V_{k+1} - V_k\|}$

5) Comme $x_0 \in F$ et que $\phi : F \to F$, par récurrence, il vient

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$ et (x_n) est bien définie.

De plus, $\|\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\|$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Donc $\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\|$ et par récurrence,

$0 \leq \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$. Or $k \in [0,1[$, donc $\sum k^n$

converge et $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge.

Avec 4a), (x_n) est convergente vers $x \in \mathbb{R}^l$.

Comme F est fermée et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, on a aussi $\ell \in F$

(x_n) est convergente dans F

5b) On prouve d'abord l'unicité : si $\phi(a) = a$ et $\phi(b) = b$, avec $a, b \in F$, alors $\|\phi(a) - \phi(b)\| \leq k \|a - b\|$, donc $\|a-b\|(1-k) \leq 0$ et comme $1-k > 0$, $0 \leq \|a-b\| \leq 0$ donc $a = b$. Il y a unicité.

Pour l'existence, on prend la suite (x_n) définie au 5a).

On sait que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in F$ donc $x_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Par ailleurs, ϕ est lipschitzienne donc continue sur F,

Donc $\phi(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \phi(x)$ et $x_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \phi(x)$.

Par unicité de la limite, $\phi(x) = x$ et x est le point fixe de ϕ.

ϕ possède bien un unique point fixe dans F

5c) On a vu que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n - x^*\| = \|\phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)\| \leq k \|x_{n-1} - x^*\|$.

donc pour $n \geq 2$ $\|x_n - x^*\| \leq k^2 \|x_{n-2} - x^*\|$.

On a donc $\|x_n - x^*\| \leq k^n \|x_0 - x^*\|$ par récurrence

donc $\boxed{\|x_n - x^*\| \leq k^n \|x_0 - x^*\|}$

On prouve d'abord l'unicité. Soient $a, b \in F$ tels que (3

$\begin{cases} \theta(a) = a \\ \theta(b) = b \end{cases}$. Alors $\begin{cases} \theta^m(a) = a \\ \theta^m(b) = b \end{cases}$ donc $\begin{cases} \phi(a) = a \\ \phi(b) = b \end{cases}$.

Or ϕ possède un unique point fixe, donc $a = b$

Prouvons l'existence. On a $\theta \circ \phi = \phi \circ \theta = \theta^{m+1}$

Donc $\theta(\phi(x^*)) = \phi(\theta(x^*))$ donc $\theta(x^*) = \phi(\theta(x^*))$.

Donc $\theta(x^*)$ est un point fixe de ϕ et par unicité, $\theta(x^*) = x^*$

Ceci prouve l'existence.

$\boxed{x^* \text{ est le seul point fixe de } \theta}$

6) Soit $E = \{x \in [0,1],\ x \leq g(x)\}$. $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$.

E est majoré par 1 donc $c = \sup(E)$ existe (c'est le "dernier moment" où la courbe de g est au dessus de la droite $y = x$, et comme g est croissante, elle ne peut pas plonger brutalement donc elle va couper $y = x$ en ce point)

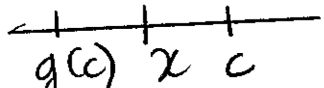
Soit (x_n), une suite d'éléments de E qui converge vers c.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq c$ car $c = \sup(E)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) \leq g(c)$ car g est croissante.

Comme, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$, il vient $x_n \leq g(x_n) \leq g(c)$, donc $g(c) \geq x_n$ et en passant l'inégalité à la limite, $\underline{\underline{g(c) \geq c}}$

Si par l'absurde on suppose $g(c) < c$



Comme $c = \sup(E)$, $\exists x \in E$, $\underline{g(c) < x}$ (car c est le plus petit majorant de E, donc $g(c)$ n'est pas un majorant de E)

On a alors $x \leq c$ (car $x \in E$), donc $\underline{g(x) \leq g(c)}$ (car g croissante)

Donc $g(x) \leq g(c) < x$ et $x \notin E = \{a \in [0,1], g(a) \geq a\}$.

Donc c'est absurde et $g(c) = c$

Donc <u>g possède au moins un point fixe</u>

<u>Deuxième Partie</u>

1) Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q(n)$: " $\exists\, U_n \in \mathbb{C}$, $T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & U_n \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$ ".

→ $Q(1)$ est vraie avec $U_1 = a$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q(n)$ vraie. Montrons $Q(n+1)$.

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^n & U_n \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & U_{n+1} \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix} \text{ où } \underline{\underline{U_{n+1} = \lambda U_n + a\mu^n}}$$

On a donc pour $n \geq 2$: $U_n = \lambda U_{n-1} + a\mu^{n-1}$

$= \lambda(\lambda U_{n-2} + a\mu^{n-2}) + a\mu^{n-1}$

$= \lambda^2 U_{n-2} + a[\lambda\mu^{n-2} + \mu^{n-1}]$.

Puis $U_n = \lambda^3 U_{n-3} + a[\lambda^2\mu^{n-3} + \lambda\mu^{n-2} + \mu^{n-1}]$.

donc avec $U_2 = \lambda U_1 + a\mu$, $U_n = \lambda^{n-1} U_1 + a[\lambda^{n-2}\mu + \dots + \mu^{n-1}]$

donc par récurrence $U_n = a\left[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k}\right]$. (vrai aussi pour $n=0$)

On distingue deux cas :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } \lambda = \mu,\ U_n = na \text{ et } T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & na\lambda^{n-1} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \\ \text{si } \lambda \neq \mu,\ U_n = a\left(\dfrac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}\right) \text{ et } T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & a\left(\dfrac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}\right) \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \end{array}}$$

(on a utilisé $\lambda^n - \mu^n = (\lambda - \mu)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k}\right)$).

2a) Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable et $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$, $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$ (par récurrence)

Les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires de ceux de T^n. Pour $i,j \in [\![1,2]\!]$, $\exists x,y,z \in \mathbb{C}$, $(A^n)_{ij} = x\lambda^n + \mu^n y + z U_n$.

Donc avec $|\lambda| \leq \rho(A), |\mu| \leq \rho(A)$, et $|U_n| \leq n|a|(\rho(A))^{n-1}$

$$0 \leq \frac{|(A^n)_{ij}|}{(\rho(A)+\varepsilon)^n} \leq |x| \left(\frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^n + |y| \left(\frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^n + |z| \frac{n\,|a|\,(\rho(A))^{n-1}}{(\rho(A)+\varepsilon)^n}$$

Comme $q = \dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} \in [0,1[$, par encadrement, $\underline{\dfrac{|(A^n)_{ij}|}{(\rho(A)+\varepsilon)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

donc la suite est bornée et $\exists \alpha_{ij} > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |(A^n)_{ij}| \leq \alpha_{ij}(\rho(A)+\varepsilon)^n$

En prenant $\alpha = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} (\alpha_{ij}) > 0$, on a bien

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall i,j \in [\![1,2]\!], |(A^n)_{ij}| \leq \alpha \,(\rho(A)+\varepsilon)^n}}$$

b) On note pour $n \in \mathbb{N}$: $A^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } \|A^n x\|^2 = |a_n x_1 + c_n x_2|^2 + |b_n x_1 + d_n x_2|^2$$
$$\leq 2\alpha^2(\rho(A)+\varepsilon)^{2n}\,(|x_1|+|x_2|)^2 \text{ avec 2a)}$$

Or $(|x_1|+|x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1 x_2| \leq 2\|x\|^2$ (car $|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}(|x_1|^2+|x_2|^2)$ avec $(|x_2|-|x_1|)^2 \geq 0$).

Donc $\|A^n x\| \leq 2\alpha(\rho(A)+\varepsilon)^n \|x\|$

$$\boxed{\text{On pose } \beta = 2\alpha > 0. \text{ On a bien } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{C}^2, \|A^n x\| \leq \beta\,(\rho(A)+\varepsilon)^n \|x\|}$$

Soit $x \in \mathbb{C}^2$.

$$N(Ax) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^{n+1}x\|$$

$$= (\rho(A)+\eta) \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-(n+1)} \|A^{n+1}x\|$$

$$= (\rho(A)+\eta) \sum_{n=1}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^n x\|$$

$$\leq (\rho(A)+\eta) \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^n x\|$$

On a bien $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{C}^2,\ N(Ax) \leq (\rho(A)+\eta) N(x)}}$

c) Tout d'abord, pour $x \in \mathbb{C}^2$, on a $N(x) \geq (\rho(A)+\eta)^{-0} \|A^0 x\|$

donc $\underline{\|x\| \leq N(x)}$.

De plus, pour $\underline{\varepsilon = \frac{\eta}{2} > 0}$, on a pour $x \in \mathbb{C}^2$ $\|A^n x\| \leq \beta (\rho(A)+\varepsilon)^n \|x\|$,

avec $\beta > 0$ (avec 2(b)).

Donc $N(x) \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \beta (\rho(A)+\varepsilon)^n \right) \|x\|$.

(comme $\frac{\rho(A)+\varepsilon}{\rho(A)+\eta} \in [0,1[$, la série converge bien).

On pose $C = \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho(A)+\varepsilon}{\rho(A)+\eta} \right)^n$ et on a bien $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{C}^2,\ N(x) \leq C\|x\|}}$

4a) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Alors on considère $P \in GL_2(\mathbb{C})$

3a) Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Soit $\eta > 0$. On pose $\varepsilon = \frac{\eta}{2} > 0$ $(0 \leq \varepsilon \leq 1)$ (5

Alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}^2$

$$0 \leq (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^n x\| \leq \beta \|x\| \times \left(\frac{\rho(A)+\varepsilon}{\rho(A)+\eta}\right)^n$$

Or $q = \dfrac{\rho(A)+\varepsilon}{\rho(A)+\eta} < 1$ (et $q \geq 0$) donc $\sum q^n$ converge et

ainsi $\sum_n (\rho(A)+\eta)^{-\alpha} \|A^n x\|$ converge

b) Soient $x, y \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $N(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} |\lambda| \|A^n x\| = |\lambda| N(x)$
- $N(x+y) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \times \left[\|A^n x\| + \|A^n y\|\right] \leq N(x)+N(y)$

(en effet, les deux séries convergent avec 3a) quand on sépare)

- $N(x) \geq 0$ et si $N(x)=0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(A)+\eta)^{-n} \|A^n x\| = 0$.

Or $1 \|A^0 x\| \leq 0$ (car dans une somme de termes positifs, le premier terme est inférieur à la somme).

Donc $\|x\| = 0$ et $x = 0$

Donc N est une norme sur $\mathbb{C}^2$

$B = P^{-1} D P$. Ainsi $PB = DP$.

$\boxed{\text{On note pour } x \in \mathbb{C}^l : \|x\|_B = \|Px\|}$.

On prouve que $\| \ \|_B$ est une norme sur $\mathbb{C}^l$:

Soient $x, y \in \mathbb{C}^l$, $\lambda \in \mathbb{C}$. $\|\lambda x\|_B = \|\lambda Px\| = |\lambda| \, \|x\|_B$

$\|x+y\|_B = \|Px + Py\| \leq \|x\|_B + \|y\|_B$

$\|x\|_B \geq 0$

Si $\|Px\| = 0$, alors $Px = 0$ et comme P est inversible, $x = 0_E$

Donc $\| \ \|_B$ est une norme sur E

De plus, $\|Bx\|_B = \|PBx\| = \|D(Px)\|$

Or si $y \in \mathbb{C}^l$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_l \end{pmatrix}$ et si $D = \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_l)$, alors

$Dy = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ | \\ \lambda_l y_l \end{pmatrix}$ donc $\|Dy\|^2 = \sum_{k=1}^{l} |\lambda_k|^2 |y_k|^2 \leq \rho(D)^2 \|y\|^2$

Donc $\|Dy\| \leq \rho(D) \|y\|$

De plus, B et D sont semblables donc $Sp(D) = Sp(B)$ et $\rho(B) = \rho(D)$.

Donc $\|Bx\|_B \leq \rho(B) \|Px\|$ et $\|Bx\|_B \leq \rho(B) \|x\|_B$

4(b) Au vu du résultat du 4(a), il faut prendre C non diagonalisable pour que cela puisse fonctionner. On pose $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Ainsi, $\rho(C) = 0$. Si N est une norme sur $\mathbb{C}^2$ et qu'on prend

$y \in \mathbb{C}^2$ tel que $Cy \neq 0$ (par exemple, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), alors

$N(Cy) > 0 = \rho(C) N(y)$.

Donc C convient.

5) Question très difficile. On pose $\rho(A) < \lambda < 1$ et.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - x^*$.

Dès lors $\| \phi(x_n) - x^* - A(x_n - x^*) \| \leq M \|x_n - x^*\|^2$

donc $\|y_{n+1} - Ay_n\| \leq M \|y_n\|^2$.

Avec 3), on peut considérer une norme N sur $\mathbb{C}^2$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{C}^2, \quad N(Ax) \leq \lambda N(x) \\ \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{C}^2, \quad \|x\| \leq N(x) \leq C \|x\| \end{cases}$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$: $N(y_{n+1}) \leq N(y_{n+1} - Ay_n) + N(Ay_n)$

$$\leq C \|y_{n+1} - Ay_n\| + \lambda N(y_n)$$

$$\leq CM \|y_n\|^2 + \lambda N(y_n).$$

Donc $N(y_{n+1}) \leq \lambda N(y_n) + CM\, N(y_n)^2$ $\quad (\lambda < 1)$

On considère alors (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 = N(y_0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; w_{n+1} = \lambda w_n + CM w_n^2 \end{cases}$

On étudie cette suite récurrente.

On pose $f(x) = \lambda x + CMx^2$ et $g(x) = f(x) - x$

Alors $g(x) = (\lambda - 1)x + CMx^2 = x\left((\lambda - 1) + CMx\right)$.

Donc

x	0		$\frac{1-\lambda}{CM}$
$g(x)$	0	$-$	0

On suppose $\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon$, avec $\boxed{\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2CM} > 0}$

Alors $0 \leq W_0 \leq \varepsilon$ donc $0 \leq W_0 < \frac{1-\lambda}{CM} = 2\varepsilon$

Si $x \in [0, 2\varepsilon[$, comme f est croissante, $f(x) \in [f(0), f(2\varepsilon)[$

donc $f(x) \in [0, 2\varepsilon[$ et $[0, 2\varepsilon[$ est stable par f donc comme $W_0 \in [0, 2\varepsilon[$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \in [0, 2\varepsilon[$.

Donc $g(W_n) \leq 0$ et (W_n) est décroissante, minorée par 0, donc elle converge vers $l \in [0, W_0] \subset [0, 2\varepsilon[$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, On doit avoir $f(l) = l \Leftrightarrow g(l) = 0$

Donc $l = 0$ car $l \in [0, 2\varepsilon[$. Donc $\underline{\underline{W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}}$

Puis par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq N(y_n) \leq W_n$ donc

$N(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et $y_n \to 0$ donc $\underline{\underline{x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*}}$

Partie 3

1a) Comme R est C^2 sur U, d'après le théorème de Schwarz, il vient $\hat{R}(s_1) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial R}{\partial s_1}\right)(s_1,s_2)\,ds_2$

donc $\hat{R}(s_1) = \left[\frac{\partial R}{\partial s_1}(s_1,s_2)\right]_c^d = \frac{\partial R}{\partial s_1}(s_1,d) - \frac{\partial R}{\partial s_1}(s_1,c)$.

Puis $\int_a^b \hat{R}(s_1)\,ds_1 = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial s_1}(s_1,d) - \int_a^b \frac{\partial R}{\partial s_1}(s_1,c)$

$$\int_a^b \hat{h}(s_1)\,ds_1 = h(b,d) - h(a,d) - h(b,c) + h(a,c)$$

1b) Pour $x \in [a,b]$, on pose $W(x) = \int_a^x \hat{R}(s_1)\,ds_1$.

On veut utiliser le théorème des accroissements finis.

Montrons que $\hat{h}$ est continue sur $[a,b]$.

- $s_2 \mapsto \frac{\partial^2 R}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1,s_2)$ est continue sur $[c,d]$ pour tout $s_1 \in [a,b]$
- $(s_1,s_2) \mapsto \frac{\partial^2 R}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1,s_2)$ est continue sur $[a,b] \times [c,d]$

qui est fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc par théorème des bornes atteintes, $\exists k > 0$, $\forall (s_1,s_2) \in [a,b]\times[c,d]$, $\left|\frac{\partial^2 R}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1,s_2)\right| \leq k$

et $s_2 \mapsto k$ est intégrable sur $[c,d]$

Par théorème de continuité des intégrales à paramètre, $\tilde{R}$ est continue sur $[a,b]$. Donc W est C^1 sur $[a,b]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis :

si $a<b$, $\exists \bar{s}_1 \in]a,b[\subset [a,b]$, $W'(\bar{s}_1) = \dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{b-a}$.

On a bien $\displaystyle\int_a^b \hat{h}(s_1)\,ds_1 = (b-a)\,\hat{h}(\bar{s}_1)$ (et cela reste vrai si $a=b$ car on a $0=0$ en prenant $\bar{s}_1 = a = b$)

$\bar{s}_1$ étant maintenant fixé, on procède de même :

$$\hat{h}(\bar{s}_1) = \int_c^d \underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\bar{s}_1, s_2)}_{g(s_2)}\,ds_2 \qquad g \text{ est continue sur } [c,d],$$

et $x \to \displaystyle\int_c^x g(s_2)\,ds_2$ est C^1 sur $[c,d]$ donc avec le théorème des accroissements finis, $\exists \bar{s}_2 \in [c,d]$, $g(\bar{s}_2) = \dfrac{\hat{h}(\bar{s}_1)}{d-c}$ (si $c<d$)

On a bien $\hat{h}(\bar{s}_1) = (d-c)\dfrac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, d'où le résultat.

2) f est continue, strictement croissante sur I. Elle réalise donc une bijection de I sur $f(I)$ par théorème de la bijection

De plus, si $I =]a,b[$, avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a<b$,

alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$ est un intervalle ouvert

De plus, $\underline{\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0}$ donc on peut appliquer le théorème de dérivation des fonctions réciproques :

g est dérivable sur $f(I)$ et $\forall y \in f(I),\ g'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (1)

Ici $\boxed{g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}}$

Avec la dérivée d'une composée ((1) prouve que g' est dérivable puisque $g = f^{-1}$ l'est et f est C^3).

Donc $g''(f(x)) \times f'(x) = \dfrac{-f''(x)}{f'^2(x)}$

Donc $\boxed{g''(f(x)) = \dfrac{-f''(x)}{(f'(x))^3}}$

3) Soient $x, y \in I$. On suppose $y \neq x$. Alors $f(y) \neq f(x)$ puisque f est injective sur I. On pose $w(\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Donc $\displaystyle\int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))\, d\lambda = \int_0^1 g'(w(\lambda))\, d\lambda$

Donc $\displaystyle\int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))\, d\lambda = \frac{1}{f(x)-f(y)} \times \int_0^1 g'(w(\lambda))\, w'(\lambda)\, d\lambda$

$\displaystyle = \frac{1}{f(x)-f(y)} \left[g(w(1)) - g(w(0)) \right]$

Donc $\displaystyle\int_0^1 g'(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))\,d\lambda = \frac{g(f(x))-g(f(y))}{f(x)-f(y)} = \frac{x-y}{f(x)-f(y)}$ (9

On $\displaystyle x - f(x)\left(\frac{x-y}{f(x)-f(y)}\right) = \frac{x(f(x)-f(y))-f(x)(x-y)}{f(x)-f(y)} = H_f(x,y)$

On a donc bien $\displaystyle H_f(x,y) = x - f(x)\int_0^1 g'(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))\,d\lambda$

(b) H_f est définie et C^2 donc continue sur $I\times I \setminus \Delta$, où

$\Delta = \{(x,x), x\in I\}$. On fixe $x\in I$.

Soit (x_n,y_n) une suite d'éléments de $I\times I\setminus\Delta$ telle que :

$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \end{cases}$. Alors $H_f(x_n,y_n) = x_n - f(x_n)\,J_n$, avec ici

$\displaystyle J_n = \int_0^1 g'(\lambda f(x_n)+(1-\lambda)f(y_n))\,d\lambda$. Alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

par continuité de f. On pose $w_n(\lambda) = g'(\lambda f(x_n)+(1-\lambda)f(y_n))$.

Alors $w_n(\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g'(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x)) = g'(f(x))$ par continuité de f et

de g' sur I et $f(I)$.

Or $(x_n),(y_n)$ sont convergentes donc bornées.

Soient $a,b\in I$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} x_n\in[a,b] \\ y_n\in[a,b]\end{cases}$

Comme f est croissante sur I, $\begin{cases} f(a) \leq f(x_n) \leq f(b) \\ f(a) \leq f(y_n) \leq f(b) \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Donc $\lambda f(x_n) + (1-\lambda) f(y_n) \in [f(a), f(b)]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Or par théorème des valeurs intermédiaires, $f(I)$ est un intervalle donc $[f(a), f(b)] \subset f(I)$ et g' est continue sur le segment $[f(a), f(b)]$ donc bornée et $\exists M > 0, \forall r \in [f(a), f(b)], |g'(r)| \leq M$

Ainsi, $\forall \lambda \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, |W_n(\lambda)| \leq M$ et $\lambda \mapsto M$ est intégrable sur $[0,1]$ donc on a l'hypothèse de domination

Par théorème de convergence dominée, $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 g'(f(x)) \, d\lambda = g'(f(x))$

donc le seul prolongement par continuité possible de H_f à $I \times I$ est tel que $\boxed{\forall x \in I, H_f(x,x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - f(x) \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)) \, d\lambda}$

Vérifions qu'il convient :

$\forall x, y \in I, \quad H_f(x,y) = x - f(x) \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \, d\lambda$.

Si $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$ alors $H_f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} H_f(x, y)$

(on procède par convergence dominée, comme ci-dessus)

Donc par caractérisation séquentielle, H_g est bien continue sur $I \times I$.

(c) : $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto f(x)$ sont bien C^2 sur $I \times I$.

On pose pour $x, y \in I$: $K(x,y) = \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))\, d\lambda$.

K est continue sur $I \times I$. On fixe $y \in I$.

On pose $a(x,\lambda) = g'(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

- $x \mapsto a(x,\lambda)$ est C^1 sur I et $\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) = \lambda f'(x)\, g''(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$
- Si $x \in I$, $\lambda \mapsto a(x,\lambda)$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue par composée sur $[0,1]$.
- Si $x \in I$, $\lambda \mapsto \frac{\partial a}{\partial x}(x,\lambda)$ est intégrable sur $[0,1]$ de manière analogue
- On domine sur tout segment : soient $u, v \in I$, $u \leq v$.

Pour $K = [u,v] \times [0,1]$ est un fermé borné et la fonction $(x,\lambda) \mapsto \lambda f'(x)\, g''(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$ est continue sur K donc par théorème des bornes atteintes, $\exists C_K \in \mathbb{R}$,

$\forall x \in [u,v]$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\left|\frac{\partial a}{\partial x}(x,y)\right| \leq C_K$ et $\lambda \mapsto C_K$ est intégrable sur $[0,1]$.

Par théorème de dérivation des intégrales à paramètre,

$\dfrac{\partial H_f}{\partial x}(x,y)$ existe et est continue sur $I \times I$.

On procède de même pour $\dfrac{\partial H_f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial y \partial x}$,

$\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial y^2}$ qui existent et sont continues sur $I \times I$

(par exemple, $\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x,y) = \lambda \left[f''(x)\, g''(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) + \lambda f'^2(x) \times g^{(3)}(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \right]$

qui sera continue car f est C^3 donc g aussi puisque f' ne s'annule pas).

Donc H_f est C^2 sur $I \times I$

(d) On a prouvé au (b) $\boxed{H_f(x,x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \quad (\forall x \in I)}$

(On peut aussi utiliser $H_f\left(x+\frac{1}{n}, x\right) = \dfrac{\left(x+\frac{1}{n}\right) f(x) - x f\left(x+\frac{1}{n}\right)}{-\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]}$

donc $H_f\left(x+\frac{1}{n}, x\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\frac{1}{n}\left(f(x) - x f'(x)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n} f'(x) + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f(x) - f'(x) \times x}{-f'(x)}$

donc $H_f(x,x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ avec un DL à l'ordre 1)

4)(a) Pour simplifier, on écrit $I_x = [x^*, x]$ et $I_y = [x^*, y]$. 11

On veut utiliser 1). H_f est C^2 sur $I \times I$, ouvert

On veut calculer $\Delta = H_f(x,y) - H_f(x^*,y) - H_f(x,x^*) + H_f(x^*,x^*)$

→ si $x = x^* = y$: $\Delta = 0$

et $H_f(x^*,x^*) - x^* = -\dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)} = 0$ car $f(x^*) = 0$

En prenant $\bar{x} = \bar{y} = x^*$, on a bien

$$0 = H_f(x,y) - x^* = (x - x^*)(y - y^*)\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}).$$

→ si $x = x^*$, $y > x$: on a $H_f(x^*, x^*) = x^*$.

$\Delta = H_f(x,y) - H_f(x^*,y) - x^* + x^*$.

Or $H_f(x^*,y) = \dfrac{x^* f(y)}{f(y)} = x^*$ (car $f(x^*) = 0$)

Donc $\Delta = H_f(x,y) - x^*$.

On conclut avec (1) : $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in I_x \times I_y$, $\Delta = (x - x^*)(y - y^*)\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})$

→ si $x > x^*$ et $y > x^*$.

$\Delta = H_f(x,y) - H_f(x^*,y) - H_f(x,x^*) + x^*$.

Or $H_f(x,x^*) = \dfrac{x f(x^*) - x^* f(x)}{f(x^*) - f(x)} = x^*$ car $f(x^*) = 0$

donc $\Delta = H_f(x,y) - x^*$ et on conclut de même

4 (b) <u>On prend $x > x^*$, $y = x$.</u>

Alors $\exists\, \overline{x} \in [x^*, x]$, $\overline{y} \in [x^*, x]$ tels que

$$Hf(x,x) - x^* = (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 Hf}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y})$$

Or si $x \to x^*$, par encadrement $(\overline{x}, \overline{y}) \to (x^*, x^*)$

et par continuité de $\frac{\partial^2 Hf}{\partial x \partial y}$ (Hf est C^2), il vient

$$\frac{\partial^2 Hf}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \underset{x \to x^*}{\longrightarrow} \frac{\partial^2 Hf}{\partial x \partial y}(x^*, x^*) \quad (1)$$

Or $\frac{\partial^2 Hf}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{Hf(x,x) - x^*}{(x - x^*)^2} = w(x)$. On pose $x = x^* + h$

et on cherche la limite de cette quantité quand $h \to 0$.

$$w(x^* + h) = \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x^*}{h^2} = \frac{h f'(x^*+h) - f(x^*+h)}{h^2 f'(x)}$$

<u>On f est C^2 donc avec Taylor-Young</u> :

$$f(x^* + h) \underset{h \to 0}{=} f(x^*) + h f'(x^*) + \frac{h^2}{2} f''(x^*) + o(h^2) \quad (\underline{f(x^*) = 0})$$

$$f'(x^* + h) \underset{h \to 0}{=} f'(x^*) + h f''(x^*) + o(h)$$

Donc $$w(x^* + h) \underset{h \to 0}{=} \frac{\underline{h\,[f'(x^*) - f'(x^*)]} + h^2 \left(f''(x^*) \frac{1}{2}\right) + o(h^2)}{h^2 (f'(x^*) + o(1))}$$

Donc $w(x^*+h) \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{1}{2} \dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$

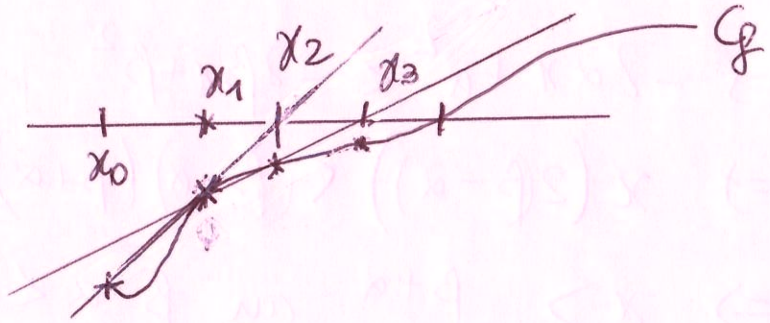
$$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow[x \to x^*]{} \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \quad (2)$$

Avec (1) et (2) et par unicité de la limite :

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*) = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}}$$

Quatrième Partie

1)



On suppose $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$. On détermine une équation de Δ_n : $y = f(x_n) + \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$ si $x_n \neq x_{n-1}$

On a donc $f(x_n) + \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) = 0$

Donc $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$ (f est strictement croissante sur I donc $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$)

Donc $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = H_f(x_{n-1}, x_n)$

<u>Si $x_n = x_{n-1}$</u> : la tangente au point d'abscisse x_n a pour équation

$y = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n)$ donc $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = H_f(x_{n-1}, x_n)$ car $x_{n-1} = x_n$.

Donc $\boxed{x_{n+1} = H_f(x_{n-1}, x_n)}$

2(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|h(x)| < 1 \iff |x - \alpha| < |x - \beta|$

$\iff (x-\alpha)^2 < (x-\beta)^2$

donc $|h(x)| < 1 \iff -2\alpha x + \alpha^2 < -2\beta x + \beta^2$

$\iff x(2(\beta - \alpha)) < (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$

$\iff x > \dfrac{\beta + \alpha}{2}$ car $\beta - \alpha < 0$

Donc $\boxed{|h(x)| < 1 \iff x \in I}$ (c'est vrai aussi pour $x = \beta$ car $\beta \notin I$)

2(b) Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = h(x_{n+1}) = \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta}$ si $x_{n+1} \neq \beta$

<u>• On suppose d'abord $x_n \neq x_{n-1}$</u>.

Alors $x_{n+1} - \alpha = H_f(x_{n-1}, x_n) - \alpha = \dfrac{f(x_n)(x_{n-1} - \alpha) - f(x_{n-1})(x_n - \alpha)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

De même, $x_{n+1}-\beta = \dfrac{f(x_n)(x_{n-1}-\beta) - f(x_{n-1})(x_n-\beta)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ (13

(on a $\forall x \in I, f'(x) = 2x-(\alpha+\beta) > 0$ car $x > \frac{\alpha+\beta}{2}$ donc f est strictement monotone et $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ si $x_{n-1} \neq x_n$)

Donc avec $f(x_n) = (x_n-\beta)(x_n-\alpha)$:

$$U_{n+1} = \frac{(x_n-\beta)(x_{n-1}-\beta)(x_n-\alpha) - (x_{n-1}-\beta)(x_{n-1}-\alpha)(x_n-\beta)}{(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)(x_n-\beta) - (x_{n-1}-\alpha)(x_{n-1}-\beta)(x_n-\alpha)}$$

$$= \frac{(x_{n-1}-\beta)(x_n-\beta)}{(x_{n-1}-\alpha)(x_n-\alpha)} \times \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = U_n U_{n-1}.$$

• si $x_n = x_{n-1}$: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{x_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$

donc $x_{n+1} - \alpha = \dfrac{(x_n-\alpha) f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$

et $U_{n+1} = \dfrac{(x_n-\beta) f'(x_n) - f(x_n)}{(x_n-\alpha) f'(x_n) - f(x_n)} = \dfrac{(x_n-\beta)(2x_n-\alpha-\beta) - (x_n-\beta)(x_n-\alpha)}{(x_n-\alpha)[2x_n-\alpha-\beta-x_n+\beta]}$

donc $U_{n+1} = \left(\dfrac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}\right)^2 = U_n U_{n-1}$

Dans tous les cas, sous réserve de définition, $\boxed{U_{n+1} = U_n U_{n-1}}$

Pour montrer que (x_n) est bien définie, il suffit de prouver $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ (ainsi, comme $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, les calculs précédents sont validés).

Par récurrence double, on prouve "$x_n \in I$" $= H(n)$

→ $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies

→ soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n-1)$ et $H(n)$ sont vraies. Alors comme $x_{n-1} \in I$ et $x_n \in I$, $|h(x_n)| < 1$ et $|h(x_{n-1})| < 1$ (2(a))

Donc $|U_{n+1}| = |U_n U_{n-1}| < 1$ et comme $U_{n+1} = h(x_{n+1})$, $x_{n+1} \in I$ (2a) est une équivalence).

Donc (x_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n > \frac{\alpha+\beta}{2} > \beta$ donc $U_n = h(x_n)$ est bien définie. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n U_{n-1}$ et $\forall n$, $U_n \in]-1, 1[$

Donc $|U_{n+1}| \leq |U_n|$ pour $n \geqslant 1$ donc $(|U_n|)$ est décroissante, minorée par 0 et tend vers $\ell \in [0, |U_0|[\subset [0, 1[$.

De plus, $\ell = \ell^2$ (en passant à la limite), donc $\ell \in \{0, 1\}$ et $\ell = 0$ donc $\boxed{U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

Dès lors, pour $n \in \mathbb{N}$, $(x_n - \alpha) = (x_n - \beta)(U_n)$. (14

donc $(x_n - \alpha) = (x_n - \alpha) U_n + (\alpha - \beta) U_n$.

Donc $(x_n - \alpha)[1 - U_n] = (\alpha - \beta) U_n$ et $x_n - \alpha = \dfrac{(\alpha-\beta)U_n}{1 - U_n}$ (1)

donc $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha}$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n U_{n-1}$

On distingue deux cas :

- si $\exists N$, $U_N = 0$, alors par récurrence, $\forall n \geq N$, $U_n = 0$

et $x_n = \alpha$ donc $x_n - \alpha = 0 = O\left(e^{\alpha \phi^n}\right)$ $(s = -1)$

- sinon : On pose $V_n = \ln(|U_n|)$

Alors $V_{n+1} = \ln(|U_n U_{n-1}|) = V_n + V_{n-1}$

C'est une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$

Alors $\exists A, B \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A\phi^n + B\psi^n$

Montrons $A < 0$.

Si $A = 0$, comme $|\psi| < 1$, $V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|U_n| = e^{V_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

C'est absurde car $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $A > 0$, $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A\phi^n$ et $V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Or $|U_n|<1$ donc $V_n=\ln(|U_n|)<0$ donc c'est exclu.

Donc on a $\underline{\underline{A<0}}$ et $|U_n|=\exp(V_n)=\exp(A\phi^n)\exp(B\psi^n)$

Or $x_n-\alpha=\frac{\alpha-\beta}{1-U_n}U_n$ donc $x_n-\alpha\underset{n\to+\infty}{=}O(U_n)$

$\left(\frac{\alpha-\beta}{1-U_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\alpha-\beta\right.$ donc la suite est bornée$\left.\right)$

Donc $\exists M>0, \forall n\in\mathbb{R}, \left|\frac{x_n-\alpha}{U_n}\right|\leq M$

Ainsi, $|x_n-\alpha|\leq Me^{A\phi^n}\exp(B\psi^n)$, avec

$Me^{B\psi^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}M$, donc $(Me^{B\psi^n})$ est bornée et

$$\underline{\underline{\exists A=\Delta<0 \quad x_n-\alpha\underset{n\to+\infty}{=}O(e^{\Delta\phi^n})}}$$

3a) f est C^3 donc $\underline{f' \text{ est continue en } x^*}$. Comme $\underline{I \text{ est}}$ $\underline{\text{ouvert}}$, pour $\alpha>0$ assez petit, $[x-\alpha,x+\alpha]\subset I$.

Par continuité de f' en x^*, au voisinage de x^*, $f'(x)>0$.

Donc $\boxed{\exists\varepsilon>0, \begin{cases}[x^*-\varepsilon,x^*+\varepsilon]\subset I\\ \forall x\in[x^*-\varepsilon,x^*+\varepsilon], f'(x)>0\end{cases}}$

3b) Avec les notations de la troisième partie, on a

$f(x^*)=0$ donc $x^* = g(0)$. f est C^3 et $\forall x \in I, f'(x) > 0$.

On prend $\begin{cases} x_n = x \in I \\ x_{n-1} = y \in I \end{cases}$ et on utilise (4a) :

$\exists\, \bar{x}, \bar{y} \in I_x \times I_y \subset [x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]^2$ tels que

$$H_f(x_{n-1}, x_n) - x^* = (x_{n-1} - x^*)(x_n - x^*) \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})$$

Avec 4.1), $x_{n+1} = H_f(x_{n-1}, x_n)$.

Donc $|x_{n+1} - x^*| \leq |x_{n-1} - x^*|\,|x_n - x^*|\, M$

3(c) Soit $\varepsilon' > 0$ tel que $M\varepsilon' < 1$.

Si $x_0, x_1 \in [x^*-\varepsilon', x^*+\varepsilon']$, $|x_2 - x^*| \leq (M\varepsilon')\,\varepsilon' \leq \varepsilon'$

donc $x_2 \in [x^*-\varepsilon', x^*+\varepsilon']$ et par récurrence double,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [x^*-\varepsilon', x^*+\varepsilon']$.

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - x^*| \leq M\varepsilon' \,|x_n - x^*|$

Par récurrence, $|x_n - x^*| \leq (M\varepsilon')^n\, |x_0 - x^*|$

Par encadrement, $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^*}$