$\boxed{\text{Corrigé CCP 2021}}$

Q1) Au départ, il y a b boules blanches et r boules rouges, donc au total b+r boules.

Donc $\begin{cases} P(X_1=1) = \dfrac{b}{b+r} \\ P(X_1=0) = 1-\dfrac{b}{b+r} = \dfrac{r}{b+r} \end{cases}$ $\boxed{X_1 \sim B\left(\frac{b}{b+r}\right)}$

X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

Q2) On a $X_2(\Omega) = \{0,1\}$.

$P(X_2=1/X_1=1) = \dfrac{b+1}{b+1+r}$ (la première boule prise étant blanche, on a rajouté une boule blanche dans l'urne).

On a $P(X_2=0/X_1=1) = 1-\dfrac{b+1}{b+1+r} = \dfrac{r}{b+1+r}$.

$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X_2 \text{ sachant } (X_1=1) \text{ est une } B\left(\frac{b+1}{b+1+r}\right)}$

Donc $P(X_2=1) = P(X_2=1/X_1=1)\,P(X_1=1) + P(X_2=1/X_1=0)\,P(X_1=0)$

donc $P(X_2=1) = \left(\dfrac{b+1}{b+1+r}\right)\times\dfrac{b}{b+r} + \dfrac{b}{b+1+r}\times\dfrac{r}{b+r} = \dfrac{b}{b+r}\times\left(\dfrac{b+1+r}{b+1+r}\right)$

Donc $\boxed{X_2 \sim B\left(\frac{b}{b+r}\right) \text{ et } X_2 \sim X_1}$

Q3) S_n est le nombre de boules blanches après le n-ème tirage dans l'urne. Si on n'a pris aucune boule blanche, il y en a b et si on en a pris une à chacun des n tirages, il y en a n+b.

On a donc $\boxed{S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]}$

Q4) Soit $k \in [\![b, n+b]\!]$.

$$\boxed{P(X_{n+1}=1 / S_n = k) = \frac{k}{b+1+n}}.$$

(après n tirages, il y a $n+b+1$ boules dans l'urne et parmi elles, k sont blanches).

Q5) $(S_n = k)_{b \leq k \leq n+b}$ est un système complet d'événements

(ces événements sont incompatibles et $\bigcup_{k=b}^{n+b} (S_n = k) = \Omega$).

Avec la formule des probabilités totales, il vient :

$$P(X_{n+1}=1) = \sum_{k=b}^{n+b} P(X_{n+1}=1 / S_n=k)\ P(S_n=k)$$

$$= \sum_{k=b}^{n+b} \frac{k\, P(S_n=k)}{b+1+n} = E(S_n) \times \frac{1}{b+1+n}.$$

On a bien $\boxed{P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{b+1+n} E(S_n)}$

Q6) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre "$X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+1}\right)$" $= H(n)$

→ $H(1)$ est vraie (et $H(2)$ aussi)

→ soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(k)$ vraie pour tout k compris entre 1 et n

Alors $P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{b+1+n} E\left(b + \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ avec Q5)

donc $P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{b+1+n}\left(b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right)$

Or pour $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$, donc

$E(X_k) = \frac{b}{b+r}$ et $P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{b+r+n}\left(b + \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{b+r}\right)$

donc $P(X_{n+1}=1) = \frac{b}{b+r+n}\left[1 + \frac{n}{b+r}\right] = \frac{b}{b+r+n}\left[\frac{b+r+n}{b+r}\right]$

donc $P(X_{n+1}=1) = \frac{b}{b+r}$ et $X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$ donc

$X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$ et $H(n+1)$ est vraie.

Donc $\boxed{X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)}$

Q7) $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k$. Comme $\forall \omega \in \Omega$, $X_k(\omega) \geqslant 0$,

$S_n(\omega) = 1 \iff \forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k(\omega) = 0$

Donc $\boxed{(S_n = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)}$

Q8) Donc $P(S_n = 1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)\right)$

On utilise la formule des probabilités composées.

Il vient $P(S_n = 1) = P(X_1=0)\,P(X_2=0 / X_1=0) \cdots P(X_n=0 / (X_1=0) \cap$

$\cdots \cap (X_{n-1}=0)) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}$

(en effet, si $(X_1=0) \cap \cdots (X_k=0)$, alors il y a 1 boule blanche et

$(k+1)$ rouges dans l'urne au moment du $(k+1)^e$ tirage. Ainsi, on a

$$P\left(X_{k+1}=0 \,/\, (X_1=0)\cap \ldots \cap (X_k=0)\right) = \frac{k+1}{k+2}\Big) .$$

On a bien $\boxed{P(S_n=1) = \dfrac{1}{n+1}}$

Q9) Soit $k \in [\![1, n+2]\!]$ et $\ell \in [\![1, n+1]\!]$.

• $P(S_{n+1}=k \,/\, S_n=\ell) = 0$ si $\ell \notin \{k-1, k\}$ (en effet, après le $(n+1)^e$ tirage, on a au maximum une boule blanche de plus dans l'urne par rapport à la situation après n tirages).

• $P(S_{n+1}=k \,/\, S_n=k-1) = \dfrac{k-1}{n+2}$ (il y a $(k-1)$ boules blanches dans l'urne après n tirages et la boule prise au $(n+1)^e$ tirage doit être blanche, avec au total $n+b+1 = n+2$ boules dans l'urne avant le $(n+1)^e$ tirage).

• De même, $P(S_{n+1}=k \,/\, S_n=k) = 1 - \dfrac{k}{n+2} = \dfrac{n+2-k}{n+2}$

(on doit prendre une boule rouge au $(n+1)^e$ tirage)

Q10) $(S_n=\ell)_{1\leq \ell \leq n+1}$ est un système complet d'événements.

Donc avec la formule des probabilités totales pour $k \in [\![2, n+1]\!]$,

$$P(S_{n+1}=k) = P(S_{n+1}=k \,/\, S_n=k-1)\, P(S_n=k-1) + P(S_{n+1}=k \,/\, S_n=k)\, P(S_n=k)$$

Donc

$$\boxed{P(S_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+2}P(S_n=k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n=k)}$$

Q11) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$: " $S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$ "

→ $S_0 = b = 1$ donc $S_0 \sim \mathcal{U}([\![1,1]\!])$ et $Q(1)$ vraie

→ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ vraie.

Alors avec Q8 et Q9, $P(S_{n+1}=1) = P(S_{n+1}=n+2) = \frac{1}{n+2}$

Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.

$$P(S_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \quad \text{avec } Q(n)$$

donc $P(S_{n+1}=k) = \frac{1}{n+2}\left[\frac{n+2-k+1-1}{n+1}\right] = \frac{1}{n+2}$. donc

$Q(n+1)$ est vraie.

Donc $\boxed{S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])}$

Q12) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ On étudie $\sum \varphi_k(x) = \sum \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

On a $\left|\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| = \frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$.

Or $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est de signe fixe et par critère de Riemann, $\sum_{k\geq1} \frac{1}{k^2}$ converge,

donc $\sum_{k\geq0} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ est <u>absolument convergente, donc convergente</u>

$\sum \varphi_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

Q13)

Soit $x>0$ Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$. (1)

On regarde $\displaystyle\Delta_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

Par somme télescopique,

$\displaystyle\Delta_N(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{(-1)^{N+1}}{(x+N+1)^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2}$.

Or avec (1), $\Delta_N(x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x+1) + \varphi(x)$.

Par unicité de la limite, on a bien $\boxed{\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}}$

Q14) Soit $x>0$, soit $n \in \mathbb{N}$. $\varphi_k(x) = (-1)^k \times U_k$, où $U_k = \dfrac{1}{(x+k)^2}$.

(U_k) est décroissante, de limite nulle, positive.

Donc d'après le théorème spécial sur les séries alternées,

on peut majorer la valeur absolue du reste par le premier terme

en valeur absolue : $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$

Q15) On a déjà prouvé $\forall x>0$, $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Montrons $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On applique le résultat précédent pour $x \geqslant 0$ et $n=0$:

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Donc $|\varphi(x)| = \left|\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

Par encadrement, $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et φ est une solution de (P)

Q16) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ solution de (P). Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(\forall x > 0)$.

Donc pour $x>0$, $\frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = (-1)^k\left[f(x+k+1) + f(x+k)\right]$.

donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(x+k) + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} f(x+k)$ en faisant un changement d'indice.

Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = f(x) + (-1)^n f(x+n+1)$ par télescopage.

Donc on a bien $\boxed{f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}}$

Q17)
On sait que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car f est solution de (P)), donc

$f(x+n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (caractérisation séquentielle)

De plus, $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$

Chaque membre converge donc en passant l'égalité à la limite, il vient $f(x) = \varphi(x) \quad (\forall x>0)$

Il y a bien unicité et existence de la solution de (P)

Q18) Soit $\varepsilon>0$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

~~$\|\varphi_k\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$. Or $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$ converge la série~~

$\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ est normalement convergente sur $[\varepsilon,+\infty[$, donc

$\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$

Q19) → chaque φ_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

→ $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$

(c'est vrai sur tout $[\varepsilon,+\infty[$, avec $\varepsilon>0$ quelconque)

Donc $\boxed{\varphi = \sum_{k\geq 0} \varphi_k \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

Comme φ est solution de (P), il vient pour $x>0$:

$$\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$$

Donc $x^2 \varphi(x) = 1 - x^2 \varphi(x+1)$. (5

Or $\varphi(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \varphi(1)$ par continuité de φ en 1.

Donc $x^2\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}}$

Q20) • $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

• Chaque φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $k \geq 0$,

$\varphi_k'(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

• Pour $\varepsilon > 0$, $\|\varphi_k'\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = \frac{2}{(\varepsilon+k)^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^3} > 0$

Or $\sum_{k\geq 1} \frac{2}{k^3}$ converge et comme $\left(\frac{2}{k^3}\right)$ est de signe fixe,

$\sum \varphi_k'$ converge normalement sur tout $[\varepsilon, +\infty[$, avec $\varepsilon > 0$.

Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\underline{\underline{\varphi'(x) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}}}$

Q21) On utilise de nouveau le théorème spécial sur les séries alternées pour φ'. $\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(x)$, $V_k(x) = 2\frac{(-1)^k}{(x+k-1)^3}$

Pour $x>0$ fixé, $(|V_k(x)|) = \left(\frac{2}{(x+k)^3}\right)$ est décroissante et tend vers 0. Donc la série est alternée et pour $n \in \mathbb{N}$,

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} V_k(x)$ est du signe de $V_{n+1}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}}{(x+n)^3}$

donc pour $n=0$, $\varphi'(x)$ est négatif.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

Q22) Soit $x>0$. $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2}$

donc comme $\varphi(x+1) \leq \varphi(x)$, $2\varphi(x) \geq \frac{1}{x^2}$.

De plus, pour $x>1$, $\varphi(x-1) + \varphi(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

Comme φ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) \leq \varphi(x-1)$

---

donc $2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$ et $\varphi(x) \leq \frac{1}{2(x-1)^2}$

On a bien pour $x>1$, $\frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$

Donc comme $(x-1)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, par théorème d'encadrement sur les équivalents, $2\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}}$

Q23) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g_k(t) = t^{x+k-1}\ln(t)$, avec $x>0$.

$\rightarrow$ g_k est continue sur $]0,1]$.

$\rightarrow$ On a $x-1>-1$. Soit $y \in]-1, x-1[$

Alors $g_k(t) = t^y \left[t^{x-1-y} \ln t \right] t^k$

Or $x-1-y > 0$ donc par croissance comparée, $t^{x-1-y} \ln t \, t^k \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

donc $g_k(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{-y}}\right)$, où $-y < 1$ et $\frac{1}{t^{-y}}$ est de signe

fixe sur $]0,1]$. Donc comme $t \mapsto \frac{1}{t^{-y}}$ est intégrable sur $]0,1]$,

<u>g_k est intégrable sur $]0,1]$</u>

Puis on fait une intégration par partie $I_k = \int_0^1 t^{x+k-1} (\ln t)\, dt$.

$a(t) = \ln t \quad a'(t) = \frac{1}{t}$

$b'(t) = t^{x+k-1}$ et $b(t) = \frac{1}{(x+k)} t^{x+k}$ a et b sont C^1.

$a(t)\, b(t) = \frac{\ln t}{x+k} t^{x+k} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $a(1)\, b(1) = 0$

Comme I_k est convergente, il vient directement

$I_k = -\frac{1}{(x+k)} \int_0^1 t^{x+k-1} dt$ (les valeurs finies des limites

aux bornes de ab assurent que cette dernière intégrale est

convergente). On a $I_k = -\frac{1}{(x+k)^2} \left[t^{x+k} \right]_0^1 = -\frac{1}{(x+k)^2}$

Q24) On note $h(t) = \frac{t^{x-1} \ln t}{1+t}$. <u>$x > 0$ est fixé</u>

Pour $t \in [0,1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} (-1)^k t^k$.

Donc $\int_0^1 h(t)\,dt = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^k\, t^{x+k-1} (\ln t)}_{(-1)^k g_k(t)}\Big) dt$.

→ Chaque $(-1)^k g_k$ est continue et intégrale sur $]0,1]$, donc sur $]0,1[$.

→ $\sum (-1)^k g_k$ converge simplement vers h continue sur $]0,1[$.

→ $\int_0^1 |(-1)^k g_k(t)|\,dt = -\int_0^1 g_k(t)\,dt = \frac{1}{(x+k)^2}$ avec Q23)

Donc $\underline{\underline{\sum \int_0^1 |(-1)^k g_k(t)|\,dt \text{ converge}}}$. (car $\sum \frac{1}{(x+k)^2}$ converge

puisque $\frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge).

Donc $\int_0^1 h(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_0^1 (-1)^k g_k(t)\Big) dt = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^2} = -\varphi(x)$

On a donc bien $\boxed{\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln t}{1+t}\,dt}$

Q25) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$(f_k(x))^2 - x = \frac{1}{2}\Big(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} - 2 f_{k-1}(x)\frac{x}{f_{k-1}(x)}\Big)$

Donc $f_k(x)^2 - x = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \geq 0$ (7

Or $(f_k(x))^2 - x = (f_k(x) - \sqrt{x})(f_k(x) + \sqrt{x})$, donc comme $f_k(x) + \sqrt{x} > 0$,

on a $(f_k(x)) - \sqrt{x} \geq 0$ donc $\underline{\underline{f_k(x) \geq \sqrt{x}}}$ ($\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*}$)

Q26) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, fixé. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{f_{k-1}(x)} - f_{k-1}(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x - f_{k-1}^2(x)}{f_{k-1}(x)}\right)$$

Or $f_{k-1}^2(x) \geq (\sqrt{x})^2 = x$ donc $f_k(x) - f_{k-1}(x) \leq 0$

$\boxed{(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$

Q27) $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, minorée par $\sqrt{x}$, donc

elle converge vers une limite $\ell(x) \geq \sqrt{x}$.

De plus, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$

donc en passant à la limite quand $k \to +\infty$, par opération, il

vient $\ell(x) = \frac{1}{2}\left(\ell(x) + \frac{x}{\ell(x)}\right) \Leftrightarrow \ell^2(x) = x \Leftrightarrow \ell(x) = \sqrt{x}$ car

$\ell(x) \geq 0$. Donc

$\underline{\underline{(f_k) \text{ convergence simplement vers } f : x \to \sqrt{x}}}$

Q28) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$.

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)} - 2\sqrt{x}\right)$$

Or $\left(\dfrac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f_k(x) - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \dfrac{x}{f_k(x)}\right)$.

donc on a bien $\underline{\underline{f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \dfrac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)}}$

Q29) On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ $P(k)$:

" $|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \dfrac{1+x}{2^k}$ ".

→ pour $k=1$: $|f_1(x) - \sqrt{x}| = \left|\frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x}\right| = \frac{1}{2}\left((1-\sqrt{x})^2\right)$

Or $(1-\sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x} \leq 1+x$ car $\sqrt{x} \geq 0$.

Donc $|f_1(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2}(1+x)$ et $P(1)$ vraie.

→ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ vraie.

$|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| = f_{k+1}(x) - \sqrt{x}$ avec Q25).

donc $|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| = \dfrac{1}{2}|f_k(x) - \sqrt{x}| \times \underbrace{\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)}_{\in [0,1]} \leq \dfrac{1}{2}|f_k(x) - \sqrt{x}|$

donc $|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| \leq \dfrac{1}{2}|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}(1+x)$ avec $P(k)$

On a bien $\boxed{|f_n(x)-\sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^n}}$

Q30). On suppose $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$, $A = B^2$. Soit une telle B.

Alors $\det(A) = \det(B^2) = (\det(B))^2 \geq 0$

Q31) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\det A \geq 0$. Supposons qu'il existe $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Alors $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)b = 1 \\ (a+d)c = 0 \\ a^2+bc = 0 \\ d^2+bc = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)b = 1 \\ c = 0 \\ a^2 = 0 \\ d^2 = 0 \end{cases}$ (si $a+d=0$, $(a+d)b \neq 1$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0b = 1 \\ a = d = c = 0 \end{cases}$ absurde.

donc on peut avoir $\det A \geq 0$ et A qui ne possède pas de racine carrée.

Q32) S est symétrique réelle donc avec le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

Q33) Soit $R = P\Delta P^{-1}$.

P est orthogonale donc $P^{-1} = P^T$

Donc $R^T = (P\Delta P^T)^T = (P^T)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T$ car $\Delta \in S_n(\mathbb{R})$.

Donc $R^T = R$ et <u>R est symétrique</u>

De plus, $R^2 = (P\Delta P^T)^2 = P\Delta P^{-1} P \Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$

Donc $\boxed{R \text{ est une racine carrée de } S}$

Q34) $\mathcal{C}_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P^{-1}MP \in D_n^+\}$

~~On calcule $P^{-1} I_n P = I_n \in D_n^+$ (c'est une matrice diagonale~~

à coefficients dans $\mathbb{R}_+^*$).

Soit $M \in \mathcal{C}_P$. Alors soit $D = P^{-1}MP$. $\det(D) = \prod_{k=1}^{n} D_{kk} > 0$ et $D \in GL_n(\mathbb{R})$

Il vient <u>$M = PDP^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$</u> (c'est un produit de

matrices inversibles).

Puis $P^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(M + SM^{-1}\right)\right)P = \frac{1}{2}(D) + \frac{1}{2} P^{-1} S M^{-1} P. = A$

Or $S = PDP^{-1}$ donc $P^{-1}S = DP^{-1}$ et

$A = \frac{1}{2}\left(D + D\left(P^{-1}M^{-1}P\right)\right)$ Or $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

Donc $A = \frac{1}{2}(D + DD^{-1}) = \frac{1}{2}(D + I_n)$

9

Or si $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, $\frac{I_n + D}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+d_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{2}(1+d_n) \end{pmatrix}$

qui est bien diagonale à coefficients diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\underline{\underline{\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_p}}$

Q35) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $S = PDP^{-1}$.

$V_k = P^{-1}\left(\frac{1}{2}(U_{k-1} + SU_{k-1}^{-1})\right)P = \frac{1}{2} V_{k-1} + \frac{1}{2} DP^{-1}U_{k-1}^{-1}P$

Or $V_{k-1} = P^{-1}U_{k-1}P$, produit de matrices inversibles, et

$V_{k-1}^{-1} = P^{-1}U_{k-1}P$ donc $\boxed{V_k = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1})}$

On prouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ $Q(k)$: $V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$

→ $V_0 = P^{-1}U_0P = I_n$ et comme $f_0(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $Q(0)$ vraie

→ Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $Q(k)$ est vraie. Montrons $Q(k+1)$.

$V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + DV_{k}^{-1})$. Or $V_k^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_k(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{f_k(\lambda_n)} \end{pmatrix}$.

Donc $V_{k+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{f_k(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{k+1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{k+1}(\lambda_n) \end{pmatrix}$

donc $\underline{Q(k+1) \text{ est vraie}}$

On a bien $\underline{(V_k)_{ii} = f_k(\lambda_i) \ (\forall i \in [\![1, n]\!]) \text{ et } (V_k) \in D_n^+}$

36) Soit $k \in \mathbb{N}$. $N(B) = \sqrt{Tr(BB^T)}$

Or $tr(BB^T) = \sum_{i=1}^{n} (BB^T)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (B_{ij})^2$ (utile après ; *)

On a $R - U_k = P\Delta P^{-1} - PV_kP^{-1} = P(\Delta - V_k)P^{-1}$

donc $\underline{(R-U_k)P = P(\Delta - V_k)}$ (1)

Or si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $N(AP) = \sqrt{Tr(APP^TA^T)}$.

Or $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $PP^T = PP^{-1} = I_n$ et $\underline{N(AP) = N(A)}$

De même, $N(PA) = \sqrt{Tr(\underbrace{PAA^T}\underbrace{P^T})} = \sqrt{Tr(P^TPAA^T)}$ avec

$\underline{Tr(XY) = Tr(YX) \text{ si } X, Y \in M_n(\mathbb{R})}$.

Donc $\underline{N(PA) = N(A)}$

Donc avec (1), $N((R-U_k)P) = N(P(\Delta - V_k))$ donne

$$\underline{\underline{N(R-U_k) = N(\Delta - V_k)}}$$

37) On regarde $\Delta - V_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$

Donc $N(\Delta - V_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1+\lambda_i}{2^k}\right)^2}$ avec (*)

Donc $N(\Delta - V_k) \leq \frac{1}{2^k} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)^2} \leq \frac{1}{2^k} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)\right)^2}$

(en effet, si $b_1, \dots b_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i \neq j} b_i b_j \geq \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \Big).$$

Donc $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k) \leq \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i)$

On a bien $\boxed{N(R - U_k) \leq \frac{T_n(S) + n}{2^k}}$

38) Ici, n est fixé. Donc $0 \leq N(R - U_k) \leq \frac{T_n(S) + n}{2^k}$ et

par encadrement, $N(R - U_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

Donc $\boxed{U_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} R}$