Centrale PC 2022 : Maths 1

Q1) On procède par double implication pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est orthodiagonalisable, on considère $P \in O_n(\mathbb{R})$, D diagonale telles que $A = PDP^T$. Alors $A^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$ (une matrice diagonale est symétrique). Donc A est symétrique

$\boxed{\Leftarrow}$ $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique (réelle), donc par <u>théorème spectral</u>, elle est orthodiagonalisable.

<u>A est orthodiagonalisable $\Longleftrightarrow$ A est symétrique</u>

Q2) $A_1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A_1}$

et $\boxed{\lambda_1 = 7}$ est la valeur propre associée

Q3) $A_1 - 7I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Donc comme $\begin{cases} C_1 = 2C_2, \\ C_3 = -C_1 \end{cases}$ $rg(A_1 - 7I_3) = 1$

De plus, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A_1 - 7I_3)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre donc comme $\dim(\ker(A_1 - 7I_3)) = 3 - 1 = 2$ par théorème du rang,

$$\boxed{\ker(A_1 - 7I_3) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V} \right) \text{ et } \dim(\ker(A_1 - 7I_3)) = 2}$$

On sait que $\text{mult}(7, \chi_{A_1}) = 2 = \dim(\ker(A_1 - 7I_3))$ car $A_1 \in S_3(\mathbb{R})$ donc A_1 est diagonalisable.

De plus, si λ_2 est l'autre valeur propre de A_1, $\text{Tr}(A_1) = 2\lambda_1 + \lambda_2$

donc $\lambda_2 = -2$ et $\boxed{Sp(A_1) = \{-2, 7\}}$

Q4) $A_1 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout

$(A_1 + 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5x - 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \\ 4x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4y - 2x = 0 \\ x = -z \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -x \end{cases}$ ~~On prend $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker(A_1 + 2I_3)$~~

Pour orthodiagonaliser A_1, on veut une base orthonormée de vecteurs propres de A_1. On prend $W' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On prend $U' = \frac{1}{\sqrt{2}} U$. On cherche $V_1 = V + \alpha U$ tel que $V_1 \perp U$

On a $\langle V_1, U \rangle = 0 \iff \langle V, U \rangle + \alpha \|U\|^2 = 0 \iff 2\alpha + 1 = 0$

$\iff \alpha = -\frac{1}{2}$. On prend $V_1 = V - \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V' = \frac{V_1}{\|V_1\|}$,

donc $V' = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit alors a canoniquement associé à A_1, B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = (U', V', W')$. Les sous-espaces propres de a sont orthonormés.

On constate que (U', V', W') est orthonormée donc libre et comme elle comprend 3 vecteurs en dimension 3, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. (2

Soit $\boxed{P = P_{B,C} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \\ 3 & -1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}}$

P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre donc $P \in O_3(\mathbb{R})$. De plus, $\boxed{M_{C'}(a) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D}$

Par changement de base, $A_1 = PDP^{-1} = PDP^T$

Q5) Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\phi(P+\lambda Q, R) = \int_0^1 (P(t)+\lambda Q(t))R(t)\,dt = \phi(P,Q) + \lambda\,\phi(P,R)$.

Donc ϕ est linéaire par rapport à sa première variable.

De plus, $\phi(P,Q) = \phi(Q,P)$ donc ϕ est symétrique et par suite, ϕ est bilinéaire.

Enfin, $\phi(P,P) = \int_0^1 P^2(t)\,dt \geq 0$ et si $\phi(P,P) = 0$, comme P^2 est positive et continue sur $[0,1]$, il vient $\forall t \in [0,1], P(t) = 0$, donc P a une infinité de racines et $P = 0$.

Donc ϕ est définie positive. C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Q6) Soient $i,j \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\phi(X^i,X^j)=\int_0^1 t^{i+j}\,dt=\boxed{\frac{1}{i+j+1}=h_{i,j}}$$

Donc $\boxed{H=\begin{pmatrix} h_{0,0} & \cdots & h_{0,n-1}\\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-1,0} & & h_{n-1,n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}}$

Q7) Soit $U\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\underline{U=\begin{pmatrix} u_0\\ \vdots \\ u_{n-1}\end{pmatrix}}$

Alors $U^T H U=\sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(HU)_i$

Or $(HU)_i=\sum_{j=0}^{n-1} h_{ij}u_j$ donc $\boxed{U^T H U=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} u_i u_j h_{ij}}$

Donc $U^T H U=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} u_i u_j\,\phi(X^i,X^j)$

$$\underline{\underline{U^T H U=\phi\left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i,\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i\right)}}$$

Q8) Soit $U\neq 0$. Alors on pose $P=\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i\neq 0$.

Alors $U^T H U=\phi(P,P)>0$ puisque ϕ est défini positif.

Donc $\underline{\underline{H\in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } Sp(H)\subset \mathbb{R}_+^*}}$ (on a clairement $\underline{H\in S_n(\mathbb{R})}$ par symétrie du produit scalaire $(\forall i,j\in[\![0,n-1]\!],\ h_{ij}=h_{ji})$)

Q9) On a $\rho(A) \in \mathbb{R}_+$ car $\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\} \subset \mathbb{R}_+$.

On sait que A possède une valeur propre complexe λ. On prouve que $\lambda = 0$

et on aura ainsi $Sp(A) = \{0\}$ et $\rho(A) = 0$.

Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors $A^p X = \lambda^p X$ par récurrence,

donc $\lambda^p X = 0$ et comme $X \neq 0$, $\lambda = 0$: c'est absurde.

On a donc bien $\rho(A) = 0$ si A est nilpotente

Q10) Soit (U_p) une suite d'éléments de C qui converge vers

$U \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que $U \in C$.

On note $U_p = \begin{pmatrix} U_{p,1} \\ \vdots \\ U_{p,n} \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$.

Comme $U_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} U$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $U_{p,j} \xrightarrow[p \to +\infty]{} U_j$ (convergence

coordonnée par coordonnée en dimension finie).

Donc $U_p^T U_p = \sum_{j=1}^{n} (U_{p,j})^2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{j=1}^{n} U_j^2 = U^T U$.

Or $U_p^T U_p = 1$ car $U_p \in C$ donc $U_p^T U_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$.

Par unicité de la limite, $U^T U = 1$ et $U \in C$.

Donc C est fermé dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

Remarque : on peut aussi poser $\varphi : U \to U^T U$ et montrer qu'elle est continue car $U \mapsto U^T$ est linéaire donc continue, et $(U,V) \longmapsto UV$ est bilinéaire en dimension finie donc continue. Alors $C = \varphi^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q11) $C = \{U \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|U\| = 1\}$ (où $\|U\| = \sqrt{U^T U}$ est la norme euclidienne usuelle).

Donc <u>C est fermé, borné.</u>

Par <u>théorème des bornes atteintes</u>, si on montre que l'application

$$d : \begin{array}{l} C \to \mathbb{R} \\ U \to |U^T A U| \end{array}$$

est <u>continue</u>, alors d admettra un maximum sur C. Prouvons la continuité de D :

Soit $b : \begin{array}{l} M_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ U \to U^T \end{array}$. b est linéaire donc continue (car $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie).

De plus $c : \begin{array}{l} (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (U,V) \to V^T A U \end{array}$ est bilinéaire en dimension finie, donc continue.

Enfin $v : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to |x| \end{array}$ est continue.

Pour $U \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $d(U) = \nu(c(U, b(U)))$. 4

d est continue sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ par opérations et admet donc un maximum sur C.

Q12) Soit $\lambda \in Sp(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$.

Soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$.

Donc $X^T A X = \lambda \|X\|^2$ et $\left(\frac{X}{\|X\|}\right)^T A \left(\frac{X}{\|X\|}\right) = \lambda$

On pose $U_0 = \frac{X}{\|X\|}$. On a $\|U_0\| = 1$ donc $U_0 \in C$

Donc $|\lambda| = |U_0^T A U_0| \leq \max\limits_{U \in C} |U^T A U|$

Q13) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

Soit $U \in C$. Alors on considère une base orthonormée $(X_1, \ldots X_n) := B_A$ de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (respectivement). On décompose U dans cette base. Soient $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $U = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$. $AU = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A X_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k X_k$

Alors $U^T A U = \langle U, AU \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\alpha_k \lambda_k)$ car B_A est orthonormée.

Donc $|U^T A U| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \lambda_k\right| \leq \rho(A) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$ car $\forall \lambda \in Sp(A)$, $|\lambda| \leq \rho(A)$. Donc $|U^T A U| \leq \rho(A) \|U\|^2$

On $U \in C$, donc $\|U\|^2 = U^\top U = 1$

Donc $|U^\top A U| \leq \rho(A)$ $(\forall U \in C)$.

Donc $\max\limits_{U \in C} |U^\top A U| \leq \rho(A)$

Avec Q12) : $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} |U^\top A U|$

Q14) Comme $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, on a $\forall U \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $U^\top A U \geqslant 0$

donc $|U^\top A U| = U^\top A U$ $(\forall U \in C)$.

Donc $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} U^\top A U$

Q15) $\rho : {}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$

$A \to \max\limits_{U \in C} |U^\top A U|$

- si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in {}_n(\mathbb{R})$, $\rho(\lambda A) = \max\limits_{U \in C} |\lambda (U^\top A U)|$

$$= |\lambda| \max_{U \in C} |U^\top A U| = |\lambda| \rho(A)$$

- Soient $A, B \in {}_n(\mathbb{R})$.

$\rho(A+B) = \max\limits_{U \in C} |U^\top (A+B) U|$.

Or si $U \in C$, $|U^\top (A+B) U| = |U^\top A U + U^\top B U|$

$$\leq |U^\top A U| + |U^\top B U|$$

$$\leq \rho(A) + \rho(B)$$

Cette inégalité est vraie pour tout U de C.

Donc en particulier, $\rho(A+B) = \max\limits_{U\in C} |U^T(A+B)U| \leq \rho(A)+\rho(B)$

On a bien l'inégalité triangulaire. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, si $\rho(A)=0$, alors $Sp(A) \subset \{0\}$ et comme $A\in S_n(\mathbb{R})$, elle est semblable à D diagonale dont les termes sont valeurs propres de A. Donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $A = P(0_n)P^T = 0_n$.

Donc $A = 0_n$

Donc $\boxed{\rho \text{ définit une norme sur } S_n(\mathbb{R})}$

Q16) Par définition, si $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & \cdots & M_{n,n} \end{pmatrix}$, où les coordonnées sont des variables aléatoires réelles, alors $E(M) = \begin{pmatrix} E(M_{1,1}) & \cdots & E(M_{1,n}) \\ \vdots & & \vdots \\ E(M_{n,1}) & \cdots & E(M_{n,n}) \end{pmatrix}$

Donc on calcule $(UU^T)_{ij}$ si $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$, $U^T = (U_1 \cdots U_n)$ et $i,j \in [\![1,n]\!]$.

Il vient $(UU^T)_{ij} = U_i U_j$. On note $M = (Y-E(Y))(Y-E(Y))^T$

Donc $[(Y-E(Y))(Y-E(Y))^T]_{ij} = (Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))$.

Donc $E(M_{ij}) = cov(Y_i, Y_j) = (\Sigma_Y)_{ij}$. Donc $E(M) = \Sigma_Y$

et $(\Sigma_Y)_{ij} = cov(Y_j, Y_i) = (\Sigma_Y)_{ji}$ donc $\Sigma_Y \in S_n(\mathbb{R})$

On a bien $\underline{\underline{\Sigma_Y = E\left((Y-E(Y))(Y-E(Y))^T\right)}}$

Soit $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ | \\ U_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, constant. Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$.

Alors $\left(\Sigma_{Y+U}\right)_{ij} = cov(Y_i+U_i, Y_j+U_j)$

$= E\left(\left(Y_i - E(Y_i) + U_i - E(U_i)\right)\left(Y_j - E(Y_j) + U_j - E(U_j)\right)\right)$

Or comme chaque coordonnée U_i de U est constante, $E(U_i)=U_i$ et

$E(U_j)=U_j$. Donc $\left(\Sigma_{Y+U}\right)_{ij} = cov(Y_i, Y_j) = \left(\Sigma_Y\right)_{ij}$:

---

les deux matrices ont mêmes coefficients et $\underline{\underline{\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y}}$

Q17) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, $Z_i = (MY)_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} Y_j$

Comme chaque Y_j possède une espérance, et que les M_{ij} sont des constantes, <u>par linéarité de l'espérance</u>, Z_i est d'espérance finie et $E(Z_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} E(Y_j) = [ME(Y)]_i$

<u>Chaque Z_i est d'espérance finie donc Z admet une espérance</u>

et $\boxed{E(Z) = ME(Y)}$

On étudie $Z - E(Z) = MY - ME(Y) = M(Y - E(Y))$

Donc pour $i,j \in [\![1,n]\!]$

$$(Z-E(Z))_i = Z_i - (E(Z))_i = [M(Y-E(Y_i))]_i = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}(Y_k - E(Y_k))$$

$$(Z-E(Z))_j = \sum_{\ell=1}^{n} M_{j,\ell}(Y_\ell - E(Y_\ell)).$$

Donc $(Z-E(Z))_i(Z-E(Z))_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} M_{j,\ell}M_{i,k}(Y_k-E(Y_k))(Y_\ell-E(Y_\ell))$

Comme Σ_Y est bien définie, chaque $\mathrm{cov}(Y_k,Y_\ell)$ existe bien donc par linéarité de l'espérance, $\mathrm{cov}(Z_i,Z_j)$ est bien définie.

Donc $\underline{\underline{\Sigma_Z \text{ existe bien}}}$

De plus, si $i,j \in [\![1,n]\!]$, $(\Sigma_Z)_{ij} = \mathrm{cov}(Z_i,Z_j)$

donc $(\Sigma_Z)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} M_{j,\ell}M_{i,k}(\Sigma_Y)_{k,\ell}$

Donc pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, $(\Sigma_Z)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n}(M\Sigma_Y)_{i,\ell}(M^T)_{\ell,j}$

$$= (M\Sigma_Y M^T)_{i,j}.$$

On a bien $\boxed{\Sigma_Z = M\Sigma_Y M^T}$

Q18) $\underline{\text{On utilise Q17)}}$: Σ_X existe et $\Sigma_X = P^T\Sigma_Y P$

Si on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et C la base orthonormée formée de vecteurs propres de Σ_Y donnée par l'énoncé, on a $P = P_{B,C}$. Donc $\Sigma_X = P_{B,C}^T \Sigma_Y P_{B,C}$ et par formule de changement de base (ici $P_{B,C}^T = P_{B,C}^{-1}$ car $P_{B,C} \in O_n(\mathbb{R})$ en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre), il vient $\Sigma_X = \mathcal{M}_C(u)$, où u est canoniquement associé à Σ_Y

les vecteurs de C sont des vecteurs propres de u donc

$$\underline{\underline{\Sigma_X = \mathcal{M}_C(u) \text{ est diagonale}}}$$

Q19) On sait que les valeurs propres de Σ_Y, ~~qui sont celles de u,~~ sont sur la diagonale de $\Sigma_X = \mathcal{M}_C(u)$

Donc comme $\underline{(\Sigma_X)_{i,i} = \mathrm{cov}(X_i, X_i) = V(X_i) \geq 0}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$,

<u>les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives</u>

Q20) On calcule $V_T(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} (\Sigma_X)_{i,i} = \mathrm{Tr}(\Sigma_X)$.

Or <u>deux matrices semblables ont même trace</u>.

Donc $\underline{\underline{V_T(X) = \mathrm{Tr}(\Sigma_Y) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = V_T(Y)}}$

Q21) On considère <u>n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots X_n$</u>

telles que pour $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ si $\lambda_i > 0$ et $X_i = 0$ (7

sinon (lorsque $\lambda_i = 0$). Alors pour $i,j \in [\![1,n]\!]$:

→ si $i \neq j$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ par indépendance

→ si $i = j$, $\mathrm{cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = \lambda_i$ (si $X_i = 0$, $V(X_i) = 0$)

Alors $Z = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ convient : $\Sigma_Z = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Q22) Comme $A \in S_n(\mathbb{R})$, par théorème spectral, on considère D diagonale à valeurs propres positives, et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$A = PDP^T$ (ainsi $P^T = P^{-1}$)

Avec Q21), on considère une variable discrète Z à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Z = D$

On pose alors $Y = P^T Z$. Ainsi $Y = P^{-1} Z$ et $Z = PY$

Avec Q17) appliquée pour $M = P^T$, Σ_Z existe et il vient

$$\Sigma_Z = P^T \Sigma_Y P \quad \text{donc} \quad \Sigma_Y = P \Sigma_Z P^T = PDP^T = A$$

Q23) Soit $X = U^T Y = \sum_{k=1}^{n} U_k Y_k$. Sous réserve d'existence :

Alors $V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} U_k Y_k\right) = E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} U_k (Y_k - E(Y_k))\right)^2\right)$

donc $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} U_i U_j \, E\big((Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))\big)$

donc $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i u_j (\Sigma_Y)_{ij} = \sum_{i=1}^{n} u_i (\Sigma_Y U)_i$

donc $\underline{\underline{V(X) = U^T \Sigma_Y U}}$

Au cours du calcul, on constate que $(X-E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j (Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))$

est bien d'espérance finie comme somme de termes d'espérance finie. <u>Ceci justifie que X admet une variance finie</u>

Q24) On suppose $r = n$.

Alors $\mathrm{Im}(\Sigma_Y) = M_{n,1}(\mathbb{R})$.

En effet, $\mathrm{Im}(\Sigma_Y) \subset M_{n,1}(\mathbb{R})$ et ici $\dim(\mathrm{Im}(\Sigma_Y)) = n = \dim(M_{n,1}(\mathbb{R}))$

Donc $\forall \omega \in \Omega$, $Y - E(Y) \in \mathrm{Im}(\Sigma_Y)$ et

$\underline{\underline{P(Y - E(Y) \in \mathrm{Im}(\Sigma_Y)) = P(\Omega) = 1}}$

Q25) Soit f canoniquement associée à Σ_Y.

Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\Sigma_Y)$ et $\ker(f) = \ker(\Sigma_Y)$.

<u>Par théorème spectral, comme $\Sigma_Y \in S_n(\mathbb{R})$,</u> il existe une base orthonormée C de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{M}_C(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$,

avec quitte à réordonner les vecteurs $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et

$\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$.

Alors
$$\mathcal{M}_C(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} U_1 & \cdots U_k & U_{k+1} & \cdots U_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{k+1} & \\ & 0 & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \qquad C = (U_1, \dots U_n).$$

Ici, $rg(f) = n-k$ et comme $U_{k+1}, \dots U_n \in \mathrm{Im}(f)$ (en effet, pour $j \in [\![k+1, n]\!]$, $f(U_j) = \lambda_j U_j$ et $U_j = f\left(\frac{U_j}{\lambda_j}\right) \in \mathrm{Im} f$).

On a une famille libre de $n-k$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

De même, $\dim(\ker f) = k$ et $(U_1, \dots U_k)$ est une base de $\ker f$.

En réunissant une base de $\ker f = \ker(\Sigma_Y)$ et une base de $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}(\Sigma_Y)$, on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $\underline{\ker f \oplus \mathrm{Im} f = M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

De plus, $C = (U_1, \dots U_n)$ est une base orthonormée donc $\underline{\ker(\Sigma_Y) \text{ et } \mathrm{Im}(\Sigma_Y) \text{ sont orthogonaux}}$ (si $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_k U_k \in \ker f$ et $y = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_k U_k$, $\langle x | y \rangle = 0$ car si $i \le k$ et $j > k$, $\langle U_i ; U_j \rangle = 0$)

Donc $\underline{\underline{\ker(\Sigma_Y) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\Sigma_Y) = M_{n,1}(\mathbb{R})}}$

Q26) $\underline{\text{On utilise Q23)}}$ avec $U = V_j$ et $(Y - E(Y))$.

Le vecteur $E(Y)$ est constant donc $\underline{\Sigma_{Y - E(Y)} = \Sigma_Y}$ avec Q16)

Il vient $V(X) = V_j^T \Sigma_{Y-E(Y)} V_j = V_j^T \Sigma_Y V_j = 0$

car $V_j \in \ker(\Sigma_Y)$.

On a donc bien $\underline{\underline{V\left(V_j^T (Y - E(Y))\right) = 0 \quad (\forall j \in [\![1, d]\!])}}$

Q27) Soit $W = V_j^T (Y - E(Y))$.

Alors $V(W) = 0$ donc $E\left((W - E(W))^2\right) = 0$.

Donc $P\left((W - E(W))^2 = 0\right) = 1$ car $(W - E(W))^2$ est positive.

Donc $P(W = E(W)) = 1$. Si $v_j = \begin{pmatrix} v_{j,1} \\ \vdots \\ v_{j,n} \end{pmatrix}$, alors

---

$E(W) = E\left(\sum_{k=1}^{n} v_{j,k} (Y_k - E(Y_k)) \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} v_{j,k} \times 0$ par linéarité de l'espérance.

Donc $E(W) = E\left(V_j^T (Y - E(Y))\right) = 0$ et

$$\boxed{P(W=0) = 1 = P\left(V_j^T (Y - E(Y)) = 0\right)}$$

Q28) On a $\begin{cases} \operatorname{Im}(\Sigma_Y) \perp \ker(\Sigma_Y) \text{ donc } \operatorname{Im}(\Sigma_Y) \subset \ker(\Sigma_Y)^\perp \\ \dim(\operatorname{Im}(\Sigma_Y)) = \dim(\ker(\Sigma_Y^\perp)) \text{ par théorème du rang.} \end{cases}$

Donc $\underline{\underline{\operatorname{Im}(\Sigma_Y) = \ker(\Sigma_Y)^\perp}}$

Donc, $P(Y-E(Y)\in \mathrm{Im}(\Sigma_Y)) = P(Y-E(Y)\in \ker(\Sigma_Y)^{\perp})$ (9

donc $P(Y-E(Y)\in \mathrm{Im}(\Sigma_Y)) = P\left(\bigcap_{j=1}^{d} (Y-E(Y)) \perp V_j\right)$

$$= P\left(\bigcap_{j=1}^{d} \left(V_j^T (Y-E(Y)) = 0\right)\right)$$

Une intersection finie ou dénombrable d'événement presque sûrs est presque sûre :

Donc $\boxed{P(Y-E(Y)\in \mathrm{Im}(\Sigma_Y)) = 1}$

Q29) A_2 est une matrice diagonale à coefficients positifs.

Avec Q21), $\exists Z$ à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\Sigma_Z = A_2$

Q30) Soit $U\in C$. Alors $q_Y(U) = V(U^T Y)$.

On utilise Q23) : $q_Y(U) = U^T \Sigma_Y U = U^T A_2 U$

Les valeurs propres de A_2 sont positives. Donc avec Q14),

$\rho(A_2) = \max\limits_{U\in C} (U^T A_2 U)$ (avec Q11), on sait que ce maximum existe). Ici $Sp(A_2) = \{4,5,9\}$ et $\rho(A_2) = 9$.

Donc $\boxed{\max\limits_{C} (q_Y) = 9}$. $\boxed{\text{Si on prend } U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$ un vecteur propre associé à la valeur propre 9, alors il vient

$V(U_0^T Y) = U_0^T \Sigma_Y U_0 = g \, \|U_0\|^2 = g$ car $\|U_0\|^2 = U_0^T U_0 = 1$

On a bien $U_0 \in C$ et $\max\limits_{U \in C} V(U^T Y) = g = V(U_0^T Y)$

Q31) oubliée = voir fin

Q32) Pour $i \neq j$, $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = E(\underbrace{[Y_i - E(Y_i)]}_{B_i} \underbrace{[Y_j - E(Y_j)]}_{B_j})$

B_i^2 et B_j^2 sont d'espérance finie :

On peut donc appliquer Cauchy-Schwarz (ou $B_i B_j \leq \frac{1}{2}(B_i^2 + B_j^2)$)

$|E(B_i B_j)| \leq \sqrt{E(B_i^2)} \sqrt{E(B_j^2)}$ donc $\sigma^2 \gamma \leq \sigma^2$

~~Comme $\sigma^2 > 0$, il vient bien $\gamma \leq 1$.~~ De plus, $\Sigma_Y = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\gamma \\ \sigma^2\gamma & \sigma^2 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\Sigma_Y = \sigma^2 \gamma J + \sigma^2 (1-\gamma) I_n}$

Q33) $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Tout d'abord, $rg(J) = 1$

donc par théorème du rang, $\dim(\ker J) = n - 1$

donc $\mathrm{mult}(0, \chi_J) \geq n-1$ et $\chi_J = X^{n-1}(X - \alpha)$
$= X^n - \alpha X^{n-1}$.

Or $\chi_J = X^n - Tr(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$

donc $\alpha = Tr(A)$ et $\chi_J = X^{n-1}(X - Tr(A)) = X^{n-1}(X - n)$.

Or $1 \leq \dim(E_n(J)) \leq 1 = \mathrm{mult}(n, \chi_J)$ et $\dim(E_n(J)) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ainsi } Sp(J)=\{0,n\} \\ \dim(E_0(J))=n-1=\dim(\ker J) \\ \dim(E_n(J)=1) \quad \text{et} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in E_n(J)\end{array}}$$

Q34) $V(U_0^T Y) = U_0^T \Sigma_Y U_0$ et $\Sigma_Y = \sigma^2 \gamma J + \sigma^2(1-\gamma) I_n$

On cherche le valeurs propres et le rayon spectral de Σ_Y

$J \in S_n(\mathbb{R})$ donc elle est diagonalisable et $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

telle que $J = PDP^T = PDP^{-1}$

Alors $\Sigma_Y = P\left(\sigma^2\gamma D + \sigma^2(1-\gamma)I_n\right)P^T$

et $Sp(\Sigma_Y) = Sp(\sigma^2\gamma D + \sigma^2(1-\gamma)I_n) = Sp\left(\begin{pmatrix} \sigma^2(1+(n-1)\gamma) & 0 & 0 \\ & \sigma^2(1-\gamma) & 0 \\ 0 & & \sigma^2(1-\gamma)\end{pmatrix}\right)$

car deux matrices semblables ont même spectre.

Donc $Sp(\Sigma_Y) = \{\sigma^2(1-\gamma), \sigma^2(1+(n-1)\gamma)\}$.

Donc $\boxed{\rho(\Sigma_Y) = \sigma^2(1+(n-1)\gamma)}$

Si on prend $\boxed{U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \text{ unitaire}}$, alors $U_0 \in E_n(J)$

donc $V(U_0^T Y) = U_0^T \Sigma_Y U_0 = U_0^T\left(\sigma^2 n\gamma + \sigma^2(1-\gamma)\right)U_0$

$= \sigma^2(1+(n-1)\gamma)\, \|U_0\|^2 = \sigma^2(1+(n-1)\gamma) = \rho(\Sigma_Y)$

Or la variance de $Z = U^T Y$ vaut $V(Z) = U^T \Sigma_Y U$ (Q23) et comme les valeurs propres de Σ_Y sont positives, la valeur maximale de $V(U^T Y)$ est égale à $\rho(\Sigma_Y)$ avec Q14)

Donc pour $U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ |\\ 1\end{pmatrix}$, la variance de $Z = U_0^T Y$ est maximale

---

Q35) On vient de voir que $V(U_0^T Y) = \sigma^2(1+(n-1)\gamma) = V(Z)$

En outre, $V_T(Y) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \mathrm{Tr}(\Sigma_Y) = n\sigma^2$.

Donc $\boxed{\frac{V(Z)}{V_T(Y)} = \frac{1+(n-1)\gamma}{n}}$ Ce pourcentage est d'autant plus élevé que γ est grand.

~~Q36) Pour $U \in C'$~~, $q_Y(U) = V(U^T Y) = U^T \Sigma_Y U$

Comme en Q 11), q_Y est continue sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$

Montrons que C' est fermée.

Soit $(U'_p) \in (C')^{\mathbb{N}}$ telle que $U'_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} U' \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

On note $U'_p = \begin{pmatrix} U'_{p,1}\\ |\\ U'_{p,n}\end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} U'_1\\ |\\ U'_n\end{pmatrix}$.

Alors $U_p'^T U'_p = \sum_{k=1}^{n} U_{p,k}'^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} U_k'^2$ et comme $U_p'^T U'_p = 1$,

$U'^T U' = \sum_{k=1}^{n} U_k'^2 = 1$.

De plus, $U_0^T U'_p = \sum_{k=1}^{n} U_{0,k} U'_{p,k} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} U_{0,k} U'_k = 0$

Donc $U_0^T U' = 0$ donc $\underline{U' \in C'}$ et $\underline{C'}$ est fermé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ 11

Par théorème des bornes atteintes, q_Y admet un maximum sur C'

---

37) On sait que les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives avec Q19). On a donc $\lambda_1 > \lambda_2 \cdots > \lambda_n \geq 0$.

Donc $\lambda_1 = \rho(\Sigma_Y)$ et $\max\limits_{U \in C} V(U^T Y) = \max\limits_{U \in C} U^T \Sigma_Y U = \rho(A) = \lambda_1$

On prend $(X_1, \ldots X_n)$ base orthonormée de vecteurs propres de Σ_Y, avec pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\Sigma_Y X_k = \lambda_k X_k$

Alors $U_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$ donc $V(U_0^T Y) = \langle U_0, \Sigma_Y U_0 \rangle$ $(= U_0^T \Sigma_Y U_0)$

avec $\Sigma_Y U_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \Sigma_Y X_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k X_k$.

Donc $V(U_0^T Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \lambda_k$

Si $\exists k \geq 2$, $\alpha_k \neq 0$, alors $V(U_0^T Y) < \lambda_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2$

donc $V(U_0^T Y) < \lambda_1 \cdot \|U_0\|^2 = \lambda_1$ et c'est absurde.

Donc $\forall k \geq 2$, $\alpha_k = 0$ et $U_0 = \alpha_1 X_1$

et $\boxed{U_0 \text{ est une base orthonormée de } E_{\lambda_1}(\Sigma_Y)}$

Comme il y a n valeurs propres distinctes, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1)

Donc $\underline{C' = \{ U \in C \cap E_{\lambda_1}(\Sigma_Y)^{\perp} \}}$

Soit $U \in C'$. On a $U = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k$ et $\langle U, X_1 \rangle = 0$ donc

$\alpha_1 = 0$ et $U = \sum_{k=2}^{m} \alpha_k X_k$.

$$V(U^T Y) = U^T \Sigma_Y U = \sum_{k=2}^{m} \alpha_k^2 \lambda_k \leq \lambda_2 \|U\|^2 = \lambda_2 .$$

De plus, soit $\boxed{U_1 \text{, unitaire, base de } E_{\lambda_2}(\Sigma_Y)}$ $(U_1 = X_2)$

Comme Σ_Y est symétrique réelle, ses sous-espace propre sont deux à deux orthogonaux, donc $\underline{U_1 \in C'}$

De plus, $q_Y(U_1) = 1 \lambda_2 + 0 = \lambda_2$

Ainsi, $\forall U \in C'$, $q_Y(U) \leq \lambda_2 = q_Y(U_1)$

Donc on a bien $\boxed{\max_{U \in C'} V(U^T Y) = \lambda_2}$

Q38) On suppose Y centrée. Si G et H sont deux variable aléatoire admettant une variance, alors

$V(G+H) = V(G) + V(G) + 2\,\mathrm{cov}(G, H)$.

donc $\mathrm{cov}(G, H) = \frac{1}{2}\left(V(G+H) - V(G) - V(H) \right)$

On prend ici $G = U_0^T Y$ et $H = U_1^T Y$.

Alors $V(G) = V(U_0^T Y) = \lambda_1$; $V(H) = V(U_1^T Y) = \lambda_2$ avec Q37)

$$V(G+H) = V((U_0+U_1)^T Y) = (U_0+U_1)^T \Sigma_Y (U_0+U_1)$$
$$= (U_0+U_1)^T(\lambda_1 U_0 + \lambda_2 U_1)$$
$$= \lambda_1\left[\|U_0\|^2 + U_1^T U_0\right] + \lambda_2\left[U_0^T U_1 + \|U_1\|^2\right].$$

Or $\langle U_0, U_1\rangle = 0$ donc $U_1^T U_0 = U_0^T U_1 = 0$

Donc $V(G+H) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\boxed{cov(U_0^T Y, U_1^T Y) = 0}$

Ces deux variables sont décorrélées.

Q31) Pour $U \in C$, on a de nouveau $q_Y(U) = V(U^T Y) = U^T \Sigma_Y U$ avec Q23).

Avec Q14), $\max\limits_{U \in C} (U^T \Sigma_Y U)$ existe et vaut $\rho(\Sigma_Y)$ (avec Q19),

on sait que les valeurs propres de Σ_Y sont positives et Q14) s'applique)

Donc q_Y possède un maximum sur C, il vaut $\rho(\Sigma_Y)$

Si $\lambda \in Sp(\Sigma_Y)$ vérifie $\rho(\Sigma_Y) = |\lambda| = \lambda$ alors si U_0 est un vecteur propre associé à λ, il vient bien (en prenant U_0 unitaire)

$$\max_{U \in C} V(U^T Y) = |\lambda| = U_0^T \Sigma_Y U_0 = V(U_0^T Y)$$