Algèbre : Préparation aux Oraux 2026

Séance 1 : Mardi 19 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 2

Exercice 1 (oral IMT 25, Estelle,2) : Soit E un espace vectoriel et $u \in L(E)$. On suppose $u^2 - 5u - 6Id_E = 0_{L(E)}$. Démontrer que $\ker(u+Id_E) \oplus \ker(u-6Id_E) = E$.

Exercice 2 (oral IMT 25, Léo,2) : Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 telle que $A^2 = 0$.

Est ce que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 3 (oral CCINP 25, Emma). Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $Tr(A) \neq 0$. On considère $\Phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \to Tr(A)M - Tr(M)A \end{cases}$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\ker(\Phi) = Vect(A)$.
3) Montrer que $\operatorname{Im}(\Phi) \subset \{M \in M_n(\mathbb{R}), tr(M) = 0\} = E$.
4) Montrer que $\operatorname{Im}(\Phi) = E$.
5) Φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (oral Mines 25, Nino,4) : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(X) = tr(AX)$.

1) Montrer que $f : A \mapsto f_A$ définit un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
2) Soit $g \in L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. On suppose $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), g(AB) = g(BA)$. Montrer $\exists \alpha \in \mathbb{R}, g = \alpha Tr$.

Exercice 5 (Oral Mines 25, Jules,5) : On considère $(\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $(\beta_1, .., \beta_n) \in \mathbb{C}^n$.

On suppose $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \alpha_i + \beta_j \neq 0$.

On note $M \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], M_{i,j} = \dfrac{1}{\alpha_i + \beta_j}$.

Démontrer que $\det(M) = \dfrac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{n} (\alpha_i + \beta_j)}$

Exercice 6 (oral Mines 25, Violette,5) : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $u_1, ..., u_n$ des endomorphismes nilpotents de E, qui commutent deux a deux.
Que vaut $u_1 \circ u_2 \circ ... \circ u_n$?

Séance 2 : Jeudi 21 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 5

Exercice 7 (Oral IMT 25, Nathan,1) : Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$.

1) A est-elle diagonalisable ?
2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles $rg(A-\alpha I_n)=1$?
3) Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 8 (Oral CCINP 25, Alice,3) : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varphi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto MA+AM \end{matrix}$

1) Montrer que φ est un endomorphisme.
2) Soit $M = XY^T$, avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$.
   a) Montrer que $M \neq 0_n$.
   b) Soit X est un vecteur propre de A, et Y un vecteur propre de A^T. Montrer que $M = XY^T$ est un vecteur propre de φ.
3) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = M(\lambda I_n - A)^k$.
   b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)M = MP(\lambda I_n - A)$.
4) Montrer que $M\chi_A(\lambda I_n - A) = 0$, avec χ_A le polynôme caractéristique de A.
5) Montrer que $Sp(\varphi) = \{\lambda+\mu, \lambda, \mu \in Sp(A)\}$.
   Indication: procéder par double inclusion et utiliser les questions précédentes.

Exercice 9 (Oral IMT 25, Alice,2) : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, avec $M^2 = M^T$.

1) M est-elle diagonalisable ?
2) On suppose $Tr(M) = n$. Déterminer M.

Exercice 10 (oral Mines 25, Lucas,3) : soit $a \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1) M est-elle inversible ? Expliciter M^{-1}
2) M est-elle diagonalisable ?
3) Sans diagonaliser, déterminer M^n. On pourra utiliser le théorème de division euclidienne.

Exercice 11 (oral IMT 25, Léo,4) : on note E l'ensemble des fonctions f C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0)=0$.

Pour $f \in E$, on note $T(f) : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt \end{matrix}$.

1) Montrer que T est bien définie et que c'est un endomorphisme de E.
2) Trouver les valeurs propres de T.

Exercice 12 (Oral Centrale 25, Ambre,4) : Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversible.

1) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A^2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $Sp(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2) a) Donner un exemple de matrice M non diagonalisable et non inversible telle que M^2 est diagonalisable.
   b) Donner un exemple de matrice M non diagonalisable et inversible telle que M^2 est diagonalisable.
3) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Soit $A = \begin{pmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \iddots & a & b \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b & a & \iddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

   Déterminer $Sp(A)$ puis $Sp(A^2)$.

Séance 3 : Lundi 1er Juin

Cours : revoir tout le chapitre 9

Exercice 13 (Oral IMT 25, Capucine,2) :
Soit E un espace euclidien, k un réel, a un vecteur unitaire. Pour $x \in E$, on pose $u(x) = x + k\langle x, a\rangle a$

1) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur k pour que u soit une isométrie vectorielle ? On pourra s'aider d'une matrice dans une base bien choisie. Identifier alors u.

Exercice 14 (Oral Mines 25, Marin,3) : Soit E un espace préhilbertien réel, p projecteur de E.
Montrer que : $\mathrm{Im}(p) \perp \ker(p) \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle p(x), x\rangle \geq 0$.

Exercice 15 (oral Centrale 25, Rémy, Marius,2) :
Soit $E = \left(C^2[0,1], \mathbb{R}\right)$. Pour $f, g \in E$, on pose $\phi(f,g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)dt$.
On considère $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}, G = \{g \in E, g'' = g\}$.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
2) Déterminer la projection orthogonale p sur G.
3) Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 16 (oral Mines 25, Naël,3).
Soient A, B des matrices anti-symétriques à coefficients réels. Montrer que $Tr\left((AB - BA)^4\right) \geq 0$. A quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 17 (oral Centrale 25, Emma,4) : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si et seulement si $M^2 = A$.
On considère $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que A possède une racine carrée et les déterminer toutes lorsque toutes les valeurs propres de A sont simples.

Exercice 18 (Oral Mines 25, Grégoire,5) : Soit $n \geq 2$ et $F = (x_1, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace préhilbertien. On suppose $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle < 0$.
Montrer que toute famille de $(n-1)$ vecteurs de F est libre.

Séance 4 : Vendredi 5 Juin

Cours : revoir tout le chapitre 11

Exercice 19 (oral CCINP 25, Hippolyte,1) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $M = A^T A - AA^T$.
On suppose $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$.

1) Calculer $Tr(M)$.
2) Montrer que $M = 0_n$.

Exercice 20 (Oral IMT 25, Léa, Charlotte,2) : soit E un K-espace vectoriel, et $u \in L(E)$, bijectif.
On suppose E de dimension finie. Montrer $\exists Q \in \mathbb{R}[X], u^{-1} = Q(u)$.

Exercice 21 (Oral Mines 25,3) : soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall X \in F \setminus \{0\}, X^T AX > 0$.
Montrer que A possède au moins k valeurs propres strictement positives (comptées avec leur multiplicité).

Exercice 22 (oral Mines 25, Ambre,4) : pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $N(M) = \sqrt{tr\left(M^T M\right)}$.

1) Montrer rapidement que N est une norme, et écrire $N(M)$ en fonction des $M_{i,j}$.
2) Démontrer que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |tr(M)| \leq \sqrt{n\, tr\left(M^T M\right)}$.
3) Démontrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B)$
4) Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|M_{i,j}|$. Comparer les deux normes N et $\| \ \|_1$.
5) Calculer $\inf\limits_{S \in S_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|M_{i,j} - S_{i,j}\right|^2\right)$.

Exercice 23 (Oral Mines 25,5) : soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} M^i$. Etudier la limite de la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 24 (Oral Mines 25, Geoffrey,4) : Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1) M est-elle diagonalisable ?
2) Déterminer son spectre.
3) La suite (M^n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
4) Plus généralement, pour $S \in S_p(\mathbb{R})$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, étudier l'existence d'une éventuelle limite de la suite (S^n).
5) De même, si $A \in A_p(\mathbb{R})$, étudier la convergence de (A^n) et donner sa limite lorsqu'elle converge.

Séance 5 : Jeudi 11 Juin

Exercice 25 (oral IMT 25, Emma,3) : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 \quad (*)$.

Exercice 26 (Oral CCINP 25, Capucine, Hippolyte,2) :
Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété R :
$\forall P \in E, (\alpha \text{ est racine de } P) \Leftrightarrow (\alpha \text{ est racine de } f(P))$.

1) Factoriser dans E $Q(X) = X^2 + 4X + 2$ et $T(X) = 2X^2 + 4X + 2$.
2)
   a) Soit g une application de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}_2[X]$, définie par $g(P) = P(0) + P'(0)X + P''(0)X^2$. Montrer que g est un endomorphisme et exprimer la matrice de g dans la base canonique.
   b) g est-elle diagonalisable ? g vérifie-t-elle R ?
3) On pose pour $k \in [\![0,n]\!]$: $L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{X-i}{k-i}$
   a) Montrer que $(L_0,..,L_n)$ est une base de E.
   b) Montrer que pour $k \in [\![0,n]\!]$, L_k est un vecteur propre de f. f est-elle diagonalisable ?
4) Soit $S = \sum_{k=0}^{n} L_k$. Montrer que $f(S)$ est une constante non nulle.

Exercice 27 (Oral Mines 25, Corentin,3) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. On suppose que si z est racine de P, alors $\operatorname{Im}(z) > 0$.
On écrit $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| = |P(\overline{z})| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que toutes les racines de P_1, P_2 sont réelles.

Exercice 28 (Oral Mines 25, Côme,3) : Soit n un entier pair. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \det(A + tJ) = \det(A)$.

Exercice 29 (oral Mines 25, Niels,4) : Soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P)(X) = (X^2-1)P'' + 2XP'$.
On note pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ et on admet qu'il s'agit d'un produit scalaire.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme autoadjoint.
2) Montrer que ϕ est diagonalisable et trouver $Sp(\phi)$.
3) Montrer l'unicité et l'existence d'une famille orthonormée $(P_0,...,P_n)$ telle que $\forall k \in [\![0,n]\!], \left(\deg(P_k) = k \text{ et } \langle P_k, X^k \rangle > 0\right)$.
4) Soit $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que $(Q_0,...,Q_n)$ vérifie les conditions de 3). Que peut-on en déduire ?

Exercice 30 (oral Mines 21,25,Centrale 24, Nassim,4) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?

En Plus :

Exercice 31 (oral ESPCI 25, Rémy,5) : Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists B \in M_{k,n}(\mathbb{R}), A = B^T B$.
2) Soit $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ une application. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour $A \in M_{nk}(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \dots A_{1,k} \\ \dots \\ A_{k,1} \dots A_{k,k} \end{pmatrix}$, avec $\forall i, j \in [\![1,k]\!], A_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

   $\hat{L}(A) = \begin{pmatrix} L(A_{1,1}) \dots L(A_{1,k}) \\ \dots \\ L(A_{k,1}) \dots L(A_{k,k}) \end{pmatrix} \in M_{nk}(\mathbb{R})$. On dit que

   L est complètement positive (C.P) si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in S_{nk}^+(\mathbb{R}), \hat{L}(A) \in S_{nk}^+(\mathbb{R})$.

   Montrer que $L : M \mapsto M^T$ n'est pas C.P
3) Si L est C.P, alors montrer que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), (L(M))^T = L(M^T)$.

Exercice 32 (Oral ENS 25, Louiza,5) : Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
Pour toutes matrices A et B dans $M_d(\mathbb{R})$ on définit $[A,B] = AB - BA$.
Pour $A, B \in M_d(\mathbb{R})$, on considère la suite de matrices $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$F_{n+1} = [A, F_n]$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $c_{0,n}, c_{1,n}, ..., c_{n,n}$ tels que $F_n = \sum_{i=0}^{n} c_{i,n} A^{n-i} B A^i$.
2) Soit $A \in S_d(\mathbb{R})$. Condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers la matrice nulle, et ce quelle que soit la matrice B à partir de laquelle la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été construite.

Exercice 33 (oral ESPCI 25, Antonin,5) :
Soient n droites vectorielles dans $\mathbb{R}^d$ telles que chaque paire de droites soit séparée par un même angle
$\theta \neq 0[\pi]$. Montrer que $n \leq \binom{d+1}{2}$

Exercice 34 (Oral X 25,4) : Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$
. Que peut-on dire de A ?

Exercice 35 (oral X 25) : Soit $n \geq 2$. Soit S un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, qui contient I_n , est stable par produit ($M, N \in S \Rightarrow M N \in S$) et vérifie $\forall A, B \in S, AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$.
Dire tout ce qui est possible sur S . Vérifier si certains ensembles que vous connaissez vérifient les conditions posées.

Exercice 36 (oral Mines 25,Tom,3) : soit $(E,(|))$ un espace préhilbertien réel. Soit $f \in GL(E)$. On suppose que f conserve l'orthogonalité (c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E, (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$).

1) Soient u et v des vecteurs unitaires appartenant à E . Calculer la valeur de $(u+v \mid u-v)$.
2) Montrer $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$.
3) Montrer $\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in E^2, (f(x) | f(y)) = \alpha^2 (x | y)$.

Exercice 37 (Oral Mines 25, Igor,3) : Déterminer, si elle existe, $\inf\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (t^4 - a t^2 - b t - c)^2 \, dt$.

<u>Indications :</u>

Exercice 1 (oral IMT 25, Estelle,2) : procéder par analyse et synthèse.

Exercice 2 (oral IMT 25, Léo,2) :
Prendre a canoniquement associé à A et chercher une base dans laquelle la matrice de a est B.

Exercice 3 (oral CCINP 25, Emma).
2) Par double inclusion.
4) Montrer l'égalité des dimensions.
5) Calculer $\Phi(M)$ lorsque $M \in E$.

Exercice 4 (oral Mines 25, Nino,4) :
1) Montrer avec soin la linéarité, puis l'injectivité en utilisant les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Conclure avec un argument de dimension.
2) Utiliser la première question, et les produits de deux éléments de la base canonique.

Exercice 5 (Oral Mines 25, Jules,5) :

Procéder par récurrence et considérer $P(X) = \dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}\prod\limits_{j=1}^{n+1}(\alpha_i+\beta_j)} \begin{vmatrix} \prod\limits_{i\neq 1}(\alpha_1+\beta_i) & \cdots & \cdots & \prod\limits_{i\neq n+1}(\alpha_1+\beta_i) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \prod\limits_{i\neq 1}(X+\beta_i) & & & \prod\limits_{i\neq n+1}(X+\beta_i) \end{vmatrix}$.

Effectuer une démonstration proche de celle de Vandermonde.

Exercice 6 (oral Mines 25, Violette,5) :
Procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquer que si $u_1,...,u_n,u_{n+1}$ sont des endomorphismes nilpotents de E, qui commutent deux a deux, alors $F = \mathrm{Im}(u_{n+1})$ est stable par u_k pour $k \in [\![1,n]\!]$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à $v_k = (u_k)_F : \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u_k(x) \end{array}$.

Exercice 7 (Oral IMT 25, Nathan,1) :
2) Séparer les cas $\alpha = 3$ et $\alpha \neq 3$.
3) Utiliser la trace pour déterminer la dernière valeur propre. Deviner des éléments de $\ker(A - \lambda I_n)$ suivant les cas.

Exercice 8 (Oral CCINP 25, Alice,3) :
2) Considérer $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$.
3) a) Procéder par récurrence.
4) Utiliser un théorème du cours.
5) Procéder par double inclusion en utilisant la 2b) et la 4). Utiliser $\chi_A = \prod\limits_{\alpha\in Sp(A)} (X-\alpha)$.

Exercice 9 (Oral IMT 25, Alice,2) :
1) Trouver un polynôme annulateur de M.
2) Utiliser le polynôme annulateur obtenu et le lien entre trace et valeurs propres.

Exercice 10 (oral Mines 25, Lucas,3) :

1) Calculer M^2.
2) Utiliser un polynôme annulateur.
3) Effectuer la division euclidienne de X^n par P.

Exercice 11 (oral IMT 25, Léo,4) :

1) Etudier la limite de $\frac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0.
2) Procéder par analyse et synthèse. Aboutir à une équation différentielle et étudier la continuité de f' en 0.

Exercice 12 (Oral Centrale 25, Ambre,4) :

1) Procéder par double implication et utiliser un polynôme annulateur scindé à racines simples.
2) a) Chercher un exemple avec une matrice triangulaire à diagonale nulle.
   b) Penser à une matrice de rotation dans le plan.
3) Calculer le polynôme caractéristique de A en séparant les cas n pair et n impair.

Exercice 13 (Oral IMT 25, Capucine,2) :

2) Se placer dans une base orthonormée adaptée à $V \oplus V^{\perp} = E$, où $V = Vect(a)$.

Exercice 14 (Oral Mines 25, Marin,3) :
Dans le sens direct, décomposer $x = a + b$, avec $a \in \text{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$.
Dans le sens retour, prendre $y \in \text{Im}(p)$ et $x \in \ker(p)$. Poser $u = \lambda x + y$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 (oral Centrale 25, Rémy, Marius,2) :

2) Déterminer une base orthogonale de G.
3) Démontrer que $F^{\perp} = G$ par double inclusion.

Exercice 16 (oral Mines 25, Naël,3).
Poser $C = AB - BA$ et étudier C^2. Montrer $Tr\left((AB - BA)^4\right) = 0 \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = 0$.

Exercice 17 (oral Centrale 25, Emma,4) :
Pour trouver toutes les racines carrées de A, procéder par analyse et synthèse. Traduire l'équation $M^2 = A$ sous la forme $\Delta^2 = D$, où D est diagonale et montrer que si Δ vérifie cette relation, alors elle est diagonale.

Exercice 18 (Oral Mines 25, Grégoire,5) :
Procéder par récurrence.
Pour montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, prendre $F = (x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E vérifiant les hypothèses et supposer par l'absurde que $\exists \alpha_1, .., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}, x_n = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}$.
Montrer $\exists k \in [\![1, n-1]\!], \alpha_k < 0$ et considérer la famille $G = (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_{n-1}, x_{n+1}, x_n - \alpha_k x_k)$ et lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Exercice 19 (oral CCINP 25, Hippolyte,1) :

2) Montrer que $M \in S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (Oral IMT 25, Léa, Charlotte,2) : Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 21 (Oral Mines 25,3) :
Procéder par l'absurde et prendre une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de a canoniquement associée à A, tels que $\forall i \in [\![1, n-k+1]\!], a(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \leq 0$. Considérer $G = Vect\left(e_1, ..., e_{n-k+1}\right)$.

Exercice 22 (oral Mines 25, Ambre,4) :

1) Faire le lien avec le produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$.
2) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3) Montrer que $W = A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et que $S = BB^T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Utiliser le théorème spectral pour diagonaliser une des deux matrices.
4) La question n'est pas très claire.

Peut-être faut-il déterminer $a,b > 0$ tels que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \begin{cases} N(M) \leq a\|M\|_1 \\ \|M\|_1 \leq bN(M) \end{cases}$? Dans ce cas, majorer $\sum_{i=1}^{n}|a_i|$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ pour $a_1,..,a_n \in \mathbb{R}$.

5) Reconnaître une distance et interpréter la question à l'aide d'un projeté orthogonal.

Exercice 23 (Oral Mines 25,5) : Prendre f canoniquement associée à M et $h_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f^i$. Etudier la convergence de $(h_k(x))$ lorsque $x \in \ker(Id_E - f)$ et $x \in \mathrm{Im}(Id_E - f)$. Montrer $\mathrm{Im}(Id_E - f) = \ker(Id_E - f)^{\perp}$ et trouver la limite de (h_k), puis celle de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 24 (Oral Mines 25, Geoffrey,4) :

2) Calculer le polynôme caractéristique.
3) Diagonaliser M.
4) Utiliser le théorème spectral et montrer que si $M = PDP^{-1}$, alors (M^n) converge si et seulement si (D^n) converge.
5) Plus difficile. Utiliser A^2 et la suite (A^{2n}) ? Relier les spectres de A et de A^2. Montrer que $1 \notin Sp(A^2)$.

Exercice 25 (oral IMT 25, Emma,3) :

Poser $Z = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$ et déterminer les valeurs possibles de Z. Puis utiliser les racines $n-$èmes d'un complexe non nul pour trouver $\frac{z+i}{z-i}$ et déduire z. Simplifier l'expression obtenue.

Exercice 26 (Oral CCINP 25, Capucine, Hippolyte,2) :

2b) Utiliser Q et calculer $g(Q)$.

4) Démontrer que $S = 1$, puis étudier les racines de $f(S)$.

Exercice 27 (Oral Mines 25, Corentin,3) :

1) Donner une expression de P en fonction de ses racines. Décomposer les complexes à l'aide de leur partie réelle et de leur partie imaginaire, et utiliser l'hypothèse.
2) Utiliser 1) et que si $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, alors $Q(\overline{z}) = \overline{Q(z)}$.

Exercice 28 (Oral Mines 25, Côme,3) :

Poser $P(t) = \det(A + tJ)$ et montrer qu'il s'agit d'un polynôme de degré $p \leq 1$. Calculer $\det\left((A+tJ)^T\right)$.

Exercice 29 (oral Mines 25, Niels,4) :

1) Calculer par exemple $\langle \phi(P), Q\rangle - \langle P, \phi(Q)\rangle$.
2) Utiliser la matrice de ϕ dans une base.
3) Montrer l'existence à l'aide de Gram-Schmidt. Pour l'unicité, supposer qu'il existe une autre famille

$(S_0,...,S_n)$ qui convient et montrer que S_k et P_k sont dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$,

4) Exploiter un changement de variable.

Exercice 30 (oral Mines 21,25,Centrale 24, Nassim,4) : Supposer B diagonalisable. Montrer en utilisant b canoniquement associé à B que A est alors diagonalisable et que B est semblable à $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec D diagonale. Utiliser des plans stables par b et la restriction de b à ces plans pour conclure.

Exercice 31 (oral ESPCI 25, Rémy,5) :

1) Par double implication, en diagonalisant dans le sens direct.
2) Prendre d'abord $n=k=2$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis généraliser à n quelconque.
3) Prendre $B=\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ M & I_n \end{pmatrix}$ et utiliser $B^T B \in S_{2n}^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 32 (Oral ENS 25, Louiza,5) :

1) Calculer les premiers termes et trouver une propriété à prouver par récurrence. Il est pratique de trouver les coefficients pour la suite.
2) Procéder par analyse et synthèse. Diagonaliser A et se ramener à $M_n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i D^{n-i} C D^i \right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et ce quelle que soit la matrice C. Appliquer ce résultat pour les éléments de la base canonique.

Exercice 33 (oral ESPCI 25, Antonin,5) :

Considérer un vecteur unitaire u_k de chaque droite D_k. Justifier $\langle u_i, u_j \rangle^2 = \cos^2(\theta)$ pour $i \neq j$, puis considérer la projection orthogonale p_i sur $D_i = Vect(u_i)$ et montrer que $(p_1,..,p_n)$ est libre.

Exercice 34 (Oral X 25,4) : Montrer d'abord que $\det(A)=0$, puis montrer que chacun colonne de A est nulle en construisant une matrice M telle que $A+M$ est inversible, mais pas M.

Exercice 35 (oral X 25) : La question est très ouverte et on peut donc essayer de nombreuses choses sur un tel ensemble S. Vérifier que $S = Vect(I_n)$ est solution.
Considérer $U \in S$ telle que $U \notin Vect(I_n)$. Etudier les polynômes annulateurs de U et montrer que U est inversible et n'a pas de valeur propre réelle.
Déterminer S lorsque n est impair et lorsque n est pair, trouver un autre ensemble que $S = Vect(I_n)$ qui vérifie les conditions.

Exercice 36 (oral Mines 25,Tom,3) :

1) Pour $x, y \in E$, non nuls, poser $u = \frac{x}{\|x\|}$ et $v = \frac{y}{\|y\|}$.
2) Développer $\|f(x)+f(y)\|^2$.

Exercice 37 (Oral Mines 25, Igor,3) :

Reconnaître une distance associée à un produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Chercher le projeté orthogonal de $t \mapsto t^4$ sur l'ensemble F des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur $[-1,1]$.