Analyse : Préparation aux Oraux 26

Séance 1 : Lundi 18 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 1 (avec les DL, les primitives, la trigo)

Exercice 1 (oral CCINP 25, Estelle,2) : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in E$, alors on pose pour $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$. On note $f_0 : x \mapsto 1$.

1) Montrer que $t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. En déduire $\tilde{f_0}$.
2) Soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I_n = a + b\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\left(1+t^2\right)^{3/2}} dt$. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.
3) Soit $\Phi : \begin{matrix} E \to E \\ f \mapsto \tilde{f} \end{matrix}$
   a) Montrer que Φ est un endomorphisme.
   b) Déterminer $\ker(\Phi)$.
4) Déterminer $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 2 (oral CCINP 25, Ambre,3) : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$.

On pose $U_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, U_n existe et $|U_n| < 1$.
2) Démontrer que (U_n) converge et préciser la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3 (oral CCINP 25, Alice,2) : Soit la suite (U_n) définie par la relation $U_n^5 + nU_n - 1 = 0$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique U_n vérifiant cette condition.
2) Montrer que (U_n) est bornée et que $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On pourra montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in [0,1]$.
3) Donner un équivalent de U_n en $+\infty$.

Exercice 4 (oral Centrale 25, Estelle,4) : Soit f une fonction de classe C^3 sur $[0,1]$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1) Etudier la limite de $S_n(f)$ quand n tend vers l'infini.
2) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!]$:
$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6}\left| t - \frac{k}{n}\right|^3$$
3) Etablir que $S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)dt + o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 5 (oral Mines 25, Clément R,4) : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation suivante :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt \quad (1)$$

Exercice 6 (Oral Mines 25, Grégoire,5) : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n et $Q = P + P' + \ldots + P^{(n)}$.

On suppose $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

1) Démontrer que Q est minoré.
2) Démontrer que Q est positif sur $\mathbb{R}$

Séance 2 : Mercredi 20 Mai

Cours : revoir les chapitres 3 et 4

Exercice 7 (oral IMT 25, Arthur,2) : Soit $L = \int_1^{+\infty} \frac{\left(x + \arctan(x)\right)}{x\left(x^2+1\right)\arctan(x)} dx$.

1) Montrer l'existence de L.
2) Calculer L. On pourra justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \geq 1, \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

Exercice 8 (oral Mines 25, Nino,3) : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$.

1) Déterminer les valeurs de a, b, c telles que $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge.
2) Lorsque c'est le cas, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$.

Exercice 9 (oral CCINP 25, Emma,3) : Pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x - 1$.

1) Soit $X > 0$. Montrer que $I = \int_4^X \frac{\ln(t)}{t} dt$ existe et calculer sa valeur.
2) Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles strictement positives telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. On suppose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ou $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Montrer que $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
3) Soit $n \geq 2$. Montrer $\exists! x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = 0$. On le note U_n.
4) Montrer que $f_n(U_{n+1}) = U_{n+1}^{n-1}(1 - U_{n+1}^2)$. En déduire que (U_n) est monotone.
5) Montrer que (U_n) converge vers 1.
6) Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
7) Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 2}\left(U_n - 1\right)$.

Exercice 10 (oral CCINP 24, Mines 25, Nassim,Antonin,3) : on pose $J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{ch(t)}\right)^x dt$

1) Déterminer le domaine de définition de J.
2) Justifier la continuité de J.
3) Calculer $J(1)$ et $J(2)$
4) Etablir une relation entre $J(x)$ et $J(x+2)$.
5) Calculer $nJ(n)J(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
6) Déterminer un équivalent de $J(n)$ en $+\infty$.

Exercice 11 (oral Mines 22, 25, Geoffrey,3) : pour $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)...(t+n)}$.

1) Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n) quand n tend vers l'infini.
2) Montrer qu'il existe $a_{1,...}, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{(t+1)...(t+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{t+k}$.
3) Montrer que pour $n \geq 2$, $I_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k \ln(k)$.
4) Déterminer $a_{1,...}, a_n$ et en déduire I_n .

Exercice 12 (oral Mines 25,Marius,4) : Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge.

On pose $g : x \to \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

1) Déterminer $\lim_{x \to 0} g(x)$.
2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,g(x)$.

Séance 3 : Mercredi 27 Mai

Cours : revoir le chapitre 6

Exercice 13 (Oral IMT 25, Léa,2) : pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I = [1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = e^{-nx}\left(n - (n+1)e^{-x}\right)$.

1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I et déterminer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2) Soit $(a,b) \in I^2$. Montrer $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$.
3) Calculer $\int_1^{+\infty} S(x)\,dx$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)$. Conclure.

Exercice 14 (oral Centrale 25, Léo,3) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. $a \in \mathbb{R}^*, \lambda \in]-1,1[$.

1) Montrer $\exists! F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)$.
2) Expliciter F si $f = \cos$.

Exercice 15 (oral Mines 25, Lucas,4) : pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction S donnée par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2) Comparer, pour $x \in D \setminus \{0\}$, $S(x)$ et $S\left(\frac{1}{x}\right)$.
3) Montrer que S est C^1 sur D. Etudier ses variations sur $D \cap \mathbb{R}_+$, avec les limites aux bornes.
4) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 16 (oral Centrale 25, Léa, Naël) :

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ Montrer que (U_n) et (V_n) convergent et qu'elles ont la même limite. On note γ cette limite.
2) Soit $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx$ et $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x)\,dx$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I$.
3) Exprimer I en fonction de γ.

Exercice 17 (oral Centrale 25, Grégoire, Clément R,4) : pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{1/k}$

1) Etudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
2) Soit $x \in [0,1]$, fixé. Etudier la monotonie de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3) Soit $b \in [0,1[$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! a_n \in [0,1[\ f_n(a_n) = b$. Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 18 (oral Mines 25, Jules,5) : Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et les calculer à l'aide de fonctions usuelles : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + \left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + (1-x)^n\right)$

<u>Séance 4 : Jeudi 4 Juin 5</u>

Cours : revoir le chapitre 7

Exercice 19 (oral Mines 25, Niels,3) :

1) Déterminer $R\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right)$.
2) Pour $x \in]-R, R[$, calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Exercice 20 (oral Mines 25,Ambre,3) : Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx$ et la calculer.

Exercice 21 (oral Centrale 25, Violette,4)

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}\,(1+t)}\,dt$ converge et la calculer.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} (-1)^n U_n$ converge.
3) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n U_n x^{n+1}$. Montrer que f est définie et continue.
4) Expliciter $f(x)$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 22 (oral Centrale 25, Niels,4) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \frac{x^n}{n!}$.

1) Déterminer $R\left(\sum_{n\geq 1} S_n \frac{x^n}{n!}\right)$.
2) Trouver une équation différentielle dont f est solution.
3) Pour $x > 0$, déterminer une expression de f à l'aide de $\int_0^x e^{-t} \ln(t)\, dt$.
4) On suppose $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Montrer que $e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

Exercice 23 (oral Centrale 25, Tom, Marin,4) : Soit $I = [0, R[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des applications f de classe C^∞ sur I telles que pour tout entier naturel *n*, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de *f* soit positive sur I, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$. Ces fonctions sont dites absolument monotones sur I.

Pour $x \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

1) Soit $f, g \in E$. Montrer que $(f+g) \in E$ et que $fg \in E$.
2) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, R[$.
3) Montrer que la série de Taylor de f converge simplement vers f sur $I = [0, R[$.
4) Montrer que tan est développable en série entière sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 24 (oral Centrale 25, Laurène,5). On considère, pour $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{inx}$.

1) Montrer S est bien définie et que S est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^k$. Montrer que u_k est bien défini et que $u_k \underset{k\to+\infty}{=} O(k!)$.
3) Montrer que S est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

<u>Séance 5 : Lundi 8 Juin 5</u>

Cours : revoir le chapitre 10

Exercice 25 (Oral IMT 25, Ninon,3) :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2 t^2)}{1 + t^2} dt$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Calculer f' sur $]0, +\infty[$.

Exercice 26 (Oral Mines 25, Igor,3) : $f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)}{x+t}dt$.

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Déterminer, si elles existent, les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 27 (oral centrale 25, Alice,4) : Soit g définie pour $x>0$ par $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2+x}dt$.

1) Montrer que g est bien définie et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

Exercice 28 (oral Mines 25,Tom,3) : On considère, pour $x>0$: $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}dt$.

1) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Etablir que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2x^2+1}$.
3) Déterminer la limite et équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.
4) Déterminer un équivalent de F en 0^+.

Exercice 29 (oral Mines 25, Violette,5) :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue. Pour $x>0$, on pose $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\cos(x-y)f(y)\,dy$.

1) Déterminer la limite de g en 0.
2) On suppose que f possède une limite en $+\infty$. Que dire de la limite de g en $+\infty$?

Exercice 30 (oral Mines 25, Naël,5) : Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^{x+1}}dt$ pour $x>0$.

1) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Quelle est la limite de f en 0 et $+\infty$.
3) Trouver un équivalent de f en 0.

<u>Séance 6 : Lundi 15 Juin 5</u>

Cours : revoir le chapitre 13

Exercice 31 (oral CCINP 25, Arthur,3) : Soit la fonction h définie par $h(x,y)=x^3-y^2$

On introduit le sous-ensemble $C=\left\{(x,y)\in R^2, h(x,y)=0\right\}$.

1) Montrer que h est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, montrer que $A(0,0)$ est l'unique point critique. h admet-elle un extremum local en $A(0,0)$?
2) Soit une fonction f C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall(x,y)\in C^2, f(x,y)=0$. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}, f(t^2,t^3)=0$. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on introduit la fonction $\varphi_t(u)=f(t^2,u)$ défini sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que φ_t dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, \exists\gamma(t)\in\left]-t^3,t^3\right[, \varphi_t'(\gamma(t))=0$.
4) En conclure que $(0,0)$ est un point critique de f.

Exercice 32 (oral IMT 25, Clément,4) : Soit $f: \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(\alpha \arcsin(t)) \end{array}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 2 vérifiée par f.
2) Trouver les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de (E).
3) En déduire que f est développable en série entière et déterminer ce développement.

Exercice 33 (Oral Mines 25, Corentin, Côme,3) :

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

On considère $h: r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt$. Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 34 (Oral Mines 24, Centrale 25, Simon, Thimothée,4) :
Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$. Soit $f:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, continue.

1) Soit $t \in [c,d]$. Montrer que $x \mapsto \int_a^t f(x,y)\,dy$ est continue sur $[a,b]$.
2) On considère $g: \begin{array}{l} [c,d] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)dy \right) dx \end{array}$. Montrer que g est C^1 sur $[c,d]$.

   En déduire que $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$.

Exercice 35 (oral Centrale 25, Geoffrey,4) : On considère $f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

1) Montrer que f est définie sur D qui est la réunion de trois ouverts.
2) Montrer que f est C^1 sur D.
3) Simplifier l'expression de f.

Exercice 36 (oral centrale 25, Nathan,3) : on considère l'équation $(E): (2x - y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0$ où l'inconnue φ est une fonction C^2 de deux variables (x,y) sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$, à valeurs réelles.

1) Montrer que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2) On définit h sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $h(u,v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$. Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur D. Expliciter h^{-1} et vérifier que h et h^{-1} sont de classe C^2 sur leurs domaines respectifs.
3) Soit φ une fonction de classe C^2 sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$, à valeurs réelles. On pose $g = \varphi \circ h$.

   Expliciter $\varphi(x,y)$ à l'aide de g pour $(x,y) \in D$ et calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y)$.
4) Résoudre (E).

En plus :

Exercice 37 (oral Centrale 25, Capucine,3) : Soit $f(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2xn)}{n}t^n$

1) Montrer que f est définie pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$
2) Trouver une expression de f.

Exercice 38 (Oral ESPCI 25, Corentin) : soit $r>0$. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, non constant. On suppose que P ne possède pas de racine de module r. On note $N_p(r)$ le nombre de racines de P (comptées avec leur multiplicité) qui sont comprises dans $B(0,r)$.

Démontrer que $N_p(r)=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}i\,re^{i\theta}d\theta$

Exercice 39 (Oral X 23,25, Eloi, ESPCI 23, Maxime,4) : soient $K:[0,1]^2\to\mathbb{R}$, $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, continues et strictement positives. On suppose $\forall x\in[0,1], f(x)=\int_0^1 K(x,z)g(z)\,dz$ et $\forall x\in[0,1], g(x)=\int_0^1 K(x,z)f(z)\,dz$.

Démontrer que $f=g$.

On pourra considérer la fonction $h=g-Mf$, où M est le maximum de $\frac{f}{g}$ sur $[0,1]$.

Exercice 40 (Oral ENS 25,3) : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f,f',f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\lim_{\varepsilon\to0^+}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left|\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}-f'(x)\right|\right)=0$.
2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(x(1+\varepsilon))-f(x)}{\varepsilon}$

Exercice 41 (Oral ENS 25,5) : soit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$ et $f(x)\underset{x\to-\infty}{\to}0$.

On considère $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x+1)\end{array}$ et $h:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x+2)\end{array}$.

Que dire de f si la famille (f,g,h) est liée ?

Exercice 42 (oral ESPCI 24, Angel,5) : soit $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5\left(1-z+\frac{i}{n^3}\right)}$.

1) Montrer que f est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1.
2) Montrer que f est définie sur tout le disque unité fermé.
3) Montrer que f n'est pas continue sur le disque unité fermé.

Exercice 43 (oral X 24, Andréa,4) : soient deux suites (a_n), (b_n) telles que $\forall n\in\mathbb{N}, b_n>0$ et (b_n) diverge.

On suppose que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge vers $s\in\mathbb{R}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$ Montrer que $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$ converge vers s.

Exercice 44 (oral ENS 24, Andréa,4) : On considère une suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1}{}^3 = 8 - a_n^2 \end{cases}$.

Que dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_{n+1} - a_n\right|$?

Exercice 45 (oral ENS 24, Matthias,5) : Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels, telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left|P_n(x) - e^x\right| = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \deg(P_n) = +\infty$

Exercice 46 (oral ESPCI 24, Raphaël,5) : soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues telles que $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$. Montrer que $\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^1 g^2(t)dt\right) \geq 4\left(\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right)\right)^2$

On pourra commencer par prouver le résultat pour des fonctions constantes par morceaux.

Exercice 47 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée.

1) Montrer que $\lim_{t\to+\infty}\left(\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|e^{-tx^2}\right) = |f(0)|$.
2) On suppose en plus $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|e^{-tx^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Indications :

Séance 1 : Lundi 18 Mai

Exercice 1 (oral CCINP 25, Estelle,2) :

2) Effectuer une intégration par parties.
4) Procéder par analyse et synthèse. Si $g \in \mathrm{Im}(\Phi)$, déterminer $g(0)$.

Exercice 2 (oral CCINP 25, Ambre,3) :

1) Procéder par récurrence. Attention aux inégalités avec les complexes.
2) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1}| \leq \dfrac{|U_n|}{2-|a|}$ et itérer le procédé.

Exercice 3 (oral CCINP 25, Alice,2) :

1) Utiliser le théorème de la bijection pour $x \mapsto f_n(x) = x^5 + nx - 1$.
2) Utiliser par exemple $f_n(0)$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $f_n(1)$.
3) Exploiter la relation $U_n^5 + nU_n - 1 = 0$ et le résultat de la question précédente.

Exercice 4 (oral Centrale 25, Estelle,4) :

1) Utiliser la convergence des sommes de Riemann.
2) Penser à l'inégalité de Taylor-Lagrange.
3) Intégrer la précédente relation entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, puis sommer de $k=0$ à $k=n-1$.

Montrer ainsi $\int_0^1 f(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} S_n(f) + \dfrac{1}{2n}S_n(f') + \dfrac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, puis effectuer un travail analogue sur $S_n(f')$ et $S_n(f'')$ pour conclure.

Exercice 5 (oral Mines 25, Clément R,4) :
Procéder par analyse et synthèse. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Distinguer trois cas pour déterminer les solutions de cette équation qui conviennent. Déterminer auparavant $f(0)$ et $f'(0)$ permet de limiter un peu les calculs.

Exercice 6 (Oral Mines 25, Grégoire,5) :
1) Etudier les limites de Q en $-\infty$ et en $+\infty$, et utiliser le théorème des bornes atteintes.
2) Supposer par l'absurde qu'il existe un réel c tel que $Q(c)<0$. Si $E=\{x\geq c, Q(x)=0\}$, considérer $d=\inf(E)$ et étudier la monotonie de Q sur $[c,d[$.

Séance 2 : Mercredi 20 Mai

Exercice 7 (oral IMT 25, Arthur,2) :

1) Prendre un équivalent en $+\infty$.
2) Utiliser l'indication puis déterminer une primitive de chaque terme.

Exercice 8 (oral Mines 25, Nino,3) :
1) Procéder par analyse et synthèse et utiliser des développements limités.
2) Calculer les sommes partielles et prendre la limite.

Exercice 9 (oral CCINP 25, Emma,3) :
1) Reconnaître $\frac{u'}{u}$.
2) Ecrire $b_n=a_nc_n$, avec $c_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
3) Utiliser le théorème de la bijection.
4) Utiliser $f_{n+1}(U_{n+1})=0$ et remplacer dans l'expression de $f_n(U_{n+1})$.
5) Montrer que (U_n) converge vers $a\leq 1$ et procéder par l'absurde en supposant $a<1$.
6) Poser $y_n=1-U_n$. Montrer $\ln(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -ny_n$, puis utiliser 2) pour trouver un équivalent de $\ln(y_n)$
7) Utiliser $n(1-U_n)$.

Exercice 10 (oral CCINP 24, Mines 25, Nassim,Antonin,3) :
1) Poser pour $x,t\in\mathbb{R}$: $f(t,x)=\left(\frac{1}{ch(t)}\right)^x=\exp(-x\ln(cht))$.
2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
3) Déterminer le dérivée de th.
4) Effectuer une intégration par parties.
5) Montrer que si $W_n=nJ(n)J(n+1)$, alors (W_n) est constante.
6) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$: $J(n+2)\leq J(n+1)\leq J(n)$. Utiliser ensuite ce qui précède.

Exercice 11 (oral Mines 22, 25, Geoffrey,3) :
1) Utiliser par exemple le théorème de convergence dominée.
2) Reconnaître un résultat du programme de PCSI.
3) Etudier $\int_0^A \frac{dt}{(t+1)...(t+n)}$ pour $A>0$ et montrer que $\sum_{k=1}^n a_k=0$.
4) Prendre l'égalité $\frac{1}{(t+1)...(t+n)}=\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t+i}$ et multiplier par $(t+k)$.

Exercice 12 (oral Mines 25,Marius,4) :
1) Considérer une primitive de f.
2) Couper l'intégrale en deux et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Conclure avec la double détente.

Séance 3 : Mercredi 27 Mai

Exercice 13 (Oral IMT 25, Léa,2) :

1) Reconnaître une somme télescopique.
2) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment en montrant la convergence normale.
3) Faire les calculs. On pourrait aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Exercice 14 (oral Centrale 25, Léo,3) :

1) Procéder par analyse et synthèse. Itérer le procédé et montrer que si F est solution, alors $\forall n \in \mathbb{N}, F(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k f(x+ka) \right) + \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a)$. Justifier que $\lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et en déduire $F(x)$. Effectuer ensuite la synthèse en vérifiant bien la convergence de la série obtenue.
2) Utiliser $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(x+ka) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e^{i(x+ka)} \right)$.

Exercice 15 (oral Mines 25, Lucas,4) :

1) Distinguer les cas $|x| = 1$, $|x| < 1$ et $|x| > 1$.
2) Faire le calcul.
3) Montrer que S est C^1 sur $]-1,1[$ en se plaçant sur des segments $[-a,a] \subset]-1,1[$, puis utiliser 2).

   Pour la limite en 1^-, utiliser une minoration de $S(x)$ sur $[0,1[$.
4) Se ramener à une étude en 0 et utiliser Taylor-Young.

Exercice 16 (oral Centrale 25, Léa, Naël) :

1) Utiliser le lien suite-série ou prouver que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.
2) Utiliser le théorème de convergence dominée.
3) Exprimer I_n à l'aide de $\int_0^1 \ln(1-v)v^n dv$. Exprimer cette intégrale sous forme de somme à l'aide d'un développement en série entière.

Exercice 17 (oral Centrale 25, Grégoire, Clément R,4) :

1) Pour la convergence simple, revenir à la définition de limite et montrer le théorème de Césaro dans ce cas particulier.
2) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.
3) Comparer $f_{n+1}(a_n)$ et $f_n(a_n)$, puis montrer que (a_n) converge vers $l \in [0,1]$, puis montrer $b \geq f(l)$.

Exercice 18 (oral Mines 25, Jules,5) :

Pour le domaine de définition, étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ et de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\left(\frac{-x}{1-x}\right)^n$.

Pour la calcul de la somme, poser $h(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2}$ et exprimer h' à l'aide de fonctions usuelles.

Exprimer f à l'aide de h, puis déterminer f' et enfin f.

Procéder de manière analogue pour g. Utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

<u>Séance 4 : Jeudi 4 Juin 5</u>

Exercice 19 (oral Mines 25, Niels,3) :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $a_{3n} = \dfrac{1}{(3n)!}$ et $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$. Etudier quand $\left(a_n r^n\right)$ est bornée.
2) Montrer que S est solution d'une équation différentielle du second ordre et la résoudre.

Exercice 20 (oral Mines 25,Ambre,3) :
Utiliser un développement en série entière, puis le théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 21 (oral Centrale 25, Violette,4) :

1) Effectuer le changement de variable $t = u^2$.
2) Utiliser le théorème spécial sur les séries alternées. Expliciter $U_{n+1} - U_n$ pour trouver son signe et majorer U_n à l'aide d'une intégrale.
3) Etablir la convergence uniforme à l'aide du théorème spécial sur les séries alternées.
4) Partir de $\displaystyle\int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}\,(1+t)}\,dt$ et utiliser deux développements en séries entières et un produit de Cauchy. Puis permuter série et intégrale en prenant d'abord $x \in [0,1[$.

Exercice 22 (oral Centrale 25, Niels,4) :

1) Etudier la limite de $\left(S_n \dfrac{r^n}{n!}\right)$ lorsque $r > 0$.
2) Dériver terme à terme la somme de cette série entière.
3) Résoudre l'équation par variation de la constante. Utiliser une intégration par parties.
4) Etudier $\Delta(x) = \left| e^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n - 1 \right| = \left| e^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - 1)}{n!} x^n \right|$ en coupant la somme en deux et en procédant par double détente.

Exercice 23 (oral Centrale 25, Tom, Marin,4) :

1) Penser à la formule de Leibniz.
2) Effectuer un changement de variable dans l'intégrale pour obtenir une expression de $\dfrac{R_n(x)}{x^n}$.
3) Considérer $x \in [0, R[$ et prendre $y \in]x, R[$. Utiliser 2).
4) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \tan^{(n)}(x) \geq 0$ à l'aide d'une récurrence, puis utiliser ce qui précède et l'imparité.

Exercice 24 (oral Centrale 25, Laurène,5).

1) Appliquer le théorème de dérivation de la somme des séries de fonctions.
2) Effectuer une comparaison somme-intégrale. Couper la somme en deux et majorer chaque terme.
3) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour majorer $\Delta_N(x) = S(x) - \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{S^{(p)}(0)}{p!} x^p$ à l'aide des questions précédentes.

Séance 5 : Lundi 8 Juin 5

Exercice 25 (Oral IMT 25, Ninon,3) :

1) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
2) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour la domination, justifier $|2xt| \leq 1+t^2x^2$.
3) Décomposer en éléments simples en posant $u=t^2$ dans le cas $x \neq 1$, puis utiliser la continuité en 1.

Exercice 26 (Oral Mines 25, Igor,3) :

1) Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
2) Utiliser le théorème de convergence dominée. Pour la limite en 0, couper l'intégrale en deux et minorer $\cos(t)$ sur $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 27 (oral centrale 25, Alice,4) :

1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
2) Pour la limite en $+\infty$, utiliser le théorème de convergence dominée.
   Pour la limite en 0, couper l'intégrale en deux avec Chasles et utiliser le théorème de convergence dominée sur la seconde partie. Pour étudier $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2+x}dt$, montrer par exemple $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$.

Exercice 28 (oral Mines 25,Tom,3) :

1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à pa mètres en se plaçant sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
2) Ecrire $\frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ sous forme de somme d'une série entière et utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
3) Utiliser le théorème de la double limite.
4) Effectuer une comparaison somme-intégrale.

Exercice 29 (oral Mines 25, Violette,5) :

1) Effectuer un changement de variable pour ne plus avoir x dans les bornes de l'intégrale.
2) Trouver la limite si f est une fonction constante. Puis traiter le cas où $f(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ en revenant à la définition de limite et en coupant l'intégrale en deux. Généraliser au cas $f(t) \underset{t\to+\infty}{\to} a \in \mathbb{R}$ en remarquant que $f(t)=a+f(t)-a$.

Exercice 30 (oral Mines 25, Naël,5) :

1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour la domination, se placer sur $[a,+\infty[$ et séparer les cas $t \geq 1$ et $t \in]0,1]$.
2) Pour la limite en $+\infty$, minorer $f(x)$ à l'aide de $\forall t \geq 1, 1+t+t^{x+1} \leq 3t^{x+1}$. Pour la limite en 0, procéder par convergence dominée en distinguant suivant la position de t par rapport à 1.
3) Faire le changement de variable $u=t^x$ et conclure par convergence dominée.

Séance 6 : Lundi 15 Juin 5

Exercice 31 (oral CCINP 25, Arthur,3) :

2) Utiliser la règle de la chaine, puis diviser par t lorsque $t \in \mathbb{R}^*$.
3) Penser au théorème de Rolle.
4) Calculer $\varphi_t'(u)$ et l'évaluer en $\gamma(t)$. Passer à la limite lorsque t tend vers 0.

Exercice 32 (oral IMT 25, Clément,4) :

1) Faire le calcul ; l'équation n'est pas à coefficients constants.
2) Supprimer les dénominateurs dans l'équation avant de commencer. Obtenir a_{2n} et a_{2n+1}.

Bien vérifier dans la synthèse que le rayon de convergence est strictement positif.

3) Utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Exercice 33 (Oral Mines 25, Corentin, Côme,3) :

Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour dériver deux fois. Pour la domination, utiliser le théorème des bornes atteintes. Faire ensuite une intégration par parties pour aboutir à une équation différentielle simple satisfaite par h'.

Exercice 34 (Oral Mines 24, Centrale 25, Simon, Thimothée,4) :

1) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres, ainsi que le théorème des bornes atteintes.
2) Considérer $h(x,t) = \int_c^t f(x,y)dy$ et utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour g.

Une fois g' obtenue, exprimer g à l'aide de g' et du théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 35 (oral Centrale 25, Geoffrey,4)

1) Faire un dessin et considérer les trois ensembles $O_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, xy > 1\}$, $O_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0, xy > 1\}$ et $O_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$. Montrer que ce sont bien des ouverts.
2) Détailler les opérations permettant de justifier que f est C^1 sur D.
3) Calculer le gradient de f et déterminer sa valeur sur chacun des trois ouverts. Montrer par exemple que O_1 et O_3 sont convexes, et pour $(x,y) \in O_2$ et $t \in [0,1]$, poser $g(t) = f(tx, ty)$.

Exercice 36 (oral centrale 25, Nathan,3) :

1) Utiliser $a(x,y) = 2x - y^2$.
2) Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par h et le déterminer.
3) Utiliser la règle de la chaine.
4) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation plus simple et la résoudre.

En plus :

Exercice 37 (oral Centrale 25, Capucine,3) :

1) Utiliser un critère de majoration.
2) Fixer x et calculer $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, puis intégrer.

Exercice 38 (Oral ESPCI 25, Corentin) :

Ecrire $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ et exprimer $\frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}$, puis développer en série entière et intégrer terme à terme en distinguant deux cas suivant que $|z_k| < r$ ou pas.

Exercice 39 (Oral X 23,25, Eloi, ESPCI 23, Maxime,4) :
Montrer $\forall x \in [0,1], h(x) \leq 0$, puis étudier $f(x_0) - Mg(x_0)$.

Exercice 40 (Oral ENS 25,3) :
1) Utiliser Taylor-Lagrange.
2) Utiliser Taylor-Lagrange et pas la première question.

Exercice 41 (Oral ENS 25,5) : Prendre f non nulle et montrer que (f, g) est libre.
Puis considérer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = \alpha f(x+1) + \beta f(x)$.
Fixer $a \in \mathbb{R}$ et étudier les deux suites définies par $U_n = f(a+n)$ et $V_n = f(a-n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Bien regarder les racines de l'équation caractéristique associées à cette suite récurrente linéaire.

Exercice 42 (oral ESPCI 24, Angel,5) :
1) Montrer d'abord que $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(n^5 + in^2\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\left(1 + \frac{i}{n^3}\right)^k}$: on aimerait ensuite échanger les deux sommes. On peut utiliser le théorème de Fubini sur les familles sommables (hors programme dans ce contexte non probabiliste), ou bien prouver que $\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right) = 0$ à l'aide d'une majoration du module.
2) Séparer deux cas suivant que $z = 1$ ou pas.
3) Poser $z_N = \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i\frac{1}{N^3}$ et minorer la partie réelle de $f(z_N)$ en isolant le terme en $n = N$.

Exercice 43 (oral X 24, Andréa,4) :
Revenir à la définition de limite. Majorer $\left| \frac{A_n}{B_n} - s \right| = \left| \frac{A_n - sB_n}{B_n} \right|$ en coupant la somme en deux. Montrer que $B_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ et conclure avec la double détente.

Exercice 44 (oral ENS 24, Andréa,4) :
Poser $f(x) = \left(8 - x^2\right)^{1/3}$ et étudier cette fonction sur $[0, 2]$. Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 45 (oral ENS 24, Matthias,5)
On peut procéder par l'absurde et montrer qu'il existe une suite (Q_n) extraite de (P_n) qui est de degré borné. Si on a $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{d} a_{n,k} x^k$, prendre $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq d}$ deux à deux distincts et étudier les limites des $Q_n(\lambda_i)$ pour montrer avec Vandermonde que $\forall k \in [\![0, d]\!], a_{n,k} \underset{n \to +\infty}{\to} a_k$.

Exercice 46 (oral ESPCI 24, Raphaël,5) :
Prendre une subdivision régulière de $[0,1]$ et écrire le résultat attendu pour des fonctions constantes par morceaux. Traduire le résultat à l'aide de de produits scalaires et de normes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en utilisant $E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Décomposer les vecteurs à l'aide de $Vect(E) \oplus \left(Vect(E)\right)^{\perp} = \mathbb{R}^n$ et montrer le résultat attendu avec Cauchy-Schwarz et des normes de vecteurs.
Généraliser le résultat aux fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des sommes de Riemann

Exercice 47 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) :

1) Montrer tout d'abord que $g_t : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| e^{-t x^2} \end{array}$ possède bien un maximum M_t sur $\mathbb{R}$ en exploitant la définition de limite et le théorème des bornes atteintes. Utiliser ensuite la définition de la continuité de f en 0 et obtenir le résultat avec la définition de limite.
2) Etudions sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $h_t : x \to x e^{-t x^2}$ et déterminer son maximum N_t. Exprimer g_t à l'aide de f_t et procéder de manière analogue au 1), en encadrant $\dfrac{M_t}{N_t}$ pour t assez grand.