

Probabilités : Préparation aux Oraux 2026

Séance 1 : Jeudi 28 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 8

Exercice 1 (oral IMT 25, Rémy,2) : Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim P(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

- 1) Calculer directement $E(X(X-1)\dots(X-r+1))$, avec $r \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Retrouver ce résultat avec la fonction génératrice.

Exercice 2 (Oral IMT 25, Ninon,2) : Au sein d'une population, chaque personne a une probabilité p d'être contaminée. Une personne saine en contact avec un malade a 2 chances sur 3 d'être contaminée à son tour. Un examinateur (sain) visite cette ville de n habitants.

- 1) Soit N le nombre de personnes contaminées qu'il rencontre. Déterminer la loi de N .
- 2) Quelle est la probabilité pour que l'examineur soit contaminé à la fin ?

Exercice 3 (Oral CCINP 24, Pauline,3) :

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k + 1}$

- 1) Donner un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.
- 2) a) Montrer que la suite $(U_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
b) On suppose $a \in]0,1]$. Etudier la limite de $(U_n(a))$ quand n tend vers l'infini.
- 3) a) Etudier la convergence de la suite $(-\ln(U_n(a)))$ quand n tend vers l'infini.
b) Trouver les valeurs de a telles que la limite de $(U_n(a))$ n'est pas nulle.
- 4) On prend une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On tire aléatoirement une boule. Si on pioche une boule blanche, on la remet et on double le nombre de boules blanches dans l'urne. Si on pioche la boule noire, on s'arrête.
On note B_i : « on tire une boule blanche au i -ème tour »
On pose C_n : « on n'a tiré que des boules blanches jusqu'au n -ème tour », et $\pi_n = P(C_n)$.
Pour quelle valeur de a a-t-on $U_n(a) = \pi_n$?
- 5) Quelle est la probabilité que l'on ne pioche jamais la boule noire ?

Exercice 4 (oral IMT 25, Laurène,3) : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que X est d'espérance et de variance finie strictement positives.

- 1) Soit $A \in \mathcal{A}$. Soit 1_A telle que $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon. Montrer que $1_A X$ est d'espérance finie.
- 2) On pose $P_X(A) = \frac{E(1_A X)}{E(X)}$. On suppose que X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $A = (X \in 2\mathbb{N}) = \{\omega \in \Omega, \exists k \in \mathbb{N}, X(\omega) = 2k\}$. Calculer $P(A)$ et $P_X(A)$.

Exercice 5 (oral Mines 25, Antonin,4) : Soit $n > 1$. Soit E l'ensemble des applications de $[[1, n]]$ dans $[[1, n-1]]$. On munit E de la loi uniforme. Calculer la probabilité pour $f \in E$ soit surjective.

Exercice 6 (oral Mines 25,3) : Soit X une variable aléatoire positive qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E(X^k) = \int_0^{+\infty} k t^{k-1} P(X > t) dt$.

Séance 2 : Mercredi 10 Juin

Cours : revoir tout le chapitre 12

Exercice 7 (Oral CCINP 25, Marin,2) : soit N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que pour tout entier naturel n , la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ est une loi binomiale $B(n, p)$. Déterminer la loi de X .

Exercice 8 (Oral IMT 25, Alice,2) :

Soit $n \geq 1$ bactéries. Chaque jour, chaque bactérie a une probabilité $p \in]0,1[$ de mourir, indépendante de celle des autres bactéries.

On note X_i le jour où meurt la i -ème bactérie

X est le nombre minimum de jours tel que toutes les bactéries soient mortes.

- 1) Déterminer la loi de X_i pour $1 \leq i \leq n$.
- 2) Calculer $P(X > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- 3) Montrer que X est d'espérance finie et la calculer (sous forme de somme finie).

Exercice 9 (Oral Centrale 25,3) : Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, où $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim G(p)$, avec $p \in]0,1[$, $\lambda > 0$ et X, Y indépendantes.

- 1) Soit $U = \text{rg}(M)$. Déterminer $E(U)$.
- 2) Soit C la plus grande valeur propre de M . Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 10 (Oral Mines 25, Marin,3) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On note, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \ln(x)$ si $x > 0$ et 0 sinon.

- 1) Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 2) Calculer $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$.

Exercice 11 (oral Mines 25, Marius,3) :

On considère un espace probabilisé. Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

pour tout entier naturel k , $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$. On considère $Y_k = \prod_{i=1}^k X_i$ et on définit pour

$k \in \mathbb{N}$: $a_k = P(Y_k = 1)$ et $b_k = P(Y_k = -1)$

Montrer qu'il existe $Q \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$. Expliciter a_k et b_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (Oral Centrale 25, Coentin,4) : soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une population de N individus divisée en deux parties. A chaque étape, on choisit deux personnes dans la population. La première personne est retirée, et la seconde est réintroduite, avec en plus un nouvel individu du même groupe.

On note X_0 le nombre d'individus de la population qui appartiennent au premier des deux groupes à l'instant initial, et X_n le nombre d'individus de la population qui appartiennent au premier groupe après n étapes.

- 1) Pour $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$, déterminer $P(X_{n+1} = j / X_n = i)$. (NB : lorsque $P(X_n = i) \neq 0$)
- 2) Démontrer que $E(X_n)$ ne dépend pas de n .

En plus :

Exercice 13 (oral Centrale 24, Antoine,5) Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p . Soit N une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{N} .

On pose $X = \sum_{k=1}^N X_k$ et $Y = \sum_{k=1}^N (1 - X_k)$. On note aussi $G(t, u) = E(t^X u^Y)$ pour $t, u \in [-1, 1]$.

- 1) Exprimer $G(t, u) = E(t^X u^Y)$ en fonction de la fonction génératrice de N .
- 2) Montrer que si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

Exercice 14 (oral Mines 24, Matthias,3) : Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé. Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de

variables aléatoires uniformes, indépendantes, à valeur dans $\{-1, 1\}$. On note $X_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$.

Etudier le comportement asymptotique des suites $(E(\sin(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(E(\cos(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 15 (Oral ENS 25,4) : soient Y, Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si pour tous polynômes $Q, R \in \mathbb{R}[X]$, $E(Q(Y)R(Z)) = E(Q(Y))E(R(Z))$.

Exercice 16 (Oral ENS 25,5) : soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 . On suppose qu'il existe un réel positif a tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 2a$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que X admet une variance et que $f(X)$ est d'espérance finie. Montrer que $E(f(X)) - f(E(X)) \geq aV(X)$.

Exercice 17 (oral X 25,5) : Une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} est dite transiente si et

seulement si pour toute partie bornée A de \mathbb{N} , $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) < +\infty$. Soit $\alpha > 0$.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $X_i \sim P\left(\frac{\alpha}{i}\right)$, et que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que $(Y_n)_{n \geq 1}$ soit transiente.

Exercice 18 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que X_k suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose aussi que les (X_k) sont indépendantes. En cas de convergence, on pose

$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$ pour $z \in [0, 1[$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{z \rightarrow 1^-} P(|(1-z)f(z) - 1| > \varepsilon) = 0$.

Probabilités : Indications

Séance 1 : Jeudi 28 Mai

Exercice 1 (oral IMT 25, Rémy,2) :

- 1) Utiliser le théorème de transfert.
- 2) Dériver terme à terme l'expression de $G_X(t)$.

Exercice 2 (Oral IMT 25, Ninon,2) :

- 1) Reconnaître une loi usuelle.
- 2) Utiliser l'événement contraire et la formule des probabilités totales.

Exercice 3 (Oral CCINP 24, Pauline,3) :

- 1) Immédiat.
- 2) a) Montrer que la suite est décroissante et minorée.
b) Traiter le cas $a = 1$ à part et utiliser une majoration.
- 3) a) Se ramener à la nature d'une série.
b) Utiliser 2) et 3a) en séparant les cas.
- 4) Utiliser la formule des probabilités composées.
- 5) Déterminer $P\left(B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$.

Exercice 4 (oral IMT 25, Laurène,3) :

- 1) Justifier par exemple $|1_A X| \leq 1 + X^2$.
- 2) Montrer que $E(1_A X) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k P(X = 2k)$.

Exercice 5 (oral Mines 25, Antonin,4) :

Pour déterminer le nombre d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ qui sont surjectives, considérer l'unique élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ qui possède deux antécédents, choisir ces deux antécédents, puis regarder ce qui se passe pour les éléments restants.

Exercice 6 (oral Mines 25,3) : Poser $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Utiliser Chasles.

Séance 2 : Mercredi 10 Juin

Exercice 7 (Oral CCINP 25, Marin,2) : utiliser la formule des probabilités totales.

Exercice 8 (Oral IMT 25, Alice,2) :

- 1) Reconnaître une loi usuelle.
- 2) Calculer plutôt $P(X \leq k)$.
- 3) Développer l'expression précédente avec le binôme de Newton. Poser $q = 1 - p$.

Exercice 9 (Oral Centrale 25,3) :

- 1) Etudier quand M est inversible avec le déterminant.
- 2) Calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (Oral Mines 25, Marin,3)

- 1) Utiliser Bienaymé-Tchebychev.
- 2) Utiliser le théorème de transfert et obtenir le résultat sous forme de somme (je n'ai pas réussi à simplifier).

Exercice 11 (oral Mines 25, Marius,3) :

Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_{k+1} = 1), (X_{k+1} = -1))$, puis calculer Q^k en limitant les calculs (trouver un vecteur propre simple et remarquer que les sous-espaces propres doivent être orthogonaux).

Exercice 12 (Oral Centrale 25, Corentin,4) :

- 1) Traiter les différents cas suivant les valeurs de i .
- 2) Utiliser la formule des probabilités totales et bien organiser son calcul en exprimant tous les termes de $E(X_{n+1}) - E(X_n)$ en fonction des $P(X_n = j)$.

En plus :**Exercice 13 (oral Centrale 24, Antoine,5) :**

- 1) Appliquer le théorème de transfert à $Z = (N, X)$ en prenant $f(n, k) = t^k u^{n-k}$. Reconnaître une loi binomiale quand on conditionne.
- 2) Montrer que $G(t, u) = E(t^X u^Y) = E(t^X)E(u^Y)$. Ecrire cette égalité à l'aide de doubles sommes et utiliser deux fois l'unicité du développement en série entière.

Exercice 14 (oral Mines 24, Matthias,3) : utiliser que $e^{iX_n} = \cos(X_n) + i \sin(X_n)$.

Exercice 15 (Oral ENS 25,4) : procéder par double implication et utiliser les polynômes de Lagrange.

Exercice 16 (Oral ENS 25,5) : Utiliser la fonction $g(x) = f(x) - ax^2$ et interpréter l'exercice à l'aide de la fonction g . Penser à l'inégalité de Jensen.

Exercice 17 (oral X 25,5) : déterminer la loi de Y_n . Encadrer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale, puis étudier ce qui se passe pour $A = \{0\}$. Lorsque $A \subset \mathbb{N}$ est bornée, utiliser qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset \llbracket 0, M \rrbracket$.

Exercice 18 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5)

Je n'ai trouvé qu'une solution très difficile avec la définition de limite en posant $\alpha > 0$.

Noter $U = (1-z)f(z) - 1 = (1-z) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (X_k - 1)z^k \right)$ et $U_N = (1-z) \left(\sum_{k=0}^N (X_k - 1)z^k \right)$.

Montrer d'abord $P(|(1-z)f(z) - 1| > \varepsilon) \leq P\left(|U - U_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|U_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Majorer $P\left(|U_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ avec Bienaymé-Tchebychev.

Pour $M \geq 2$ et $r > 1$, considérer $A(M, r) = \{\omega \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, X_k \leq M r^k\}$ et montrer qu'il existe $M \geq 2$ tel que

$P(A(M, r)) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$. Montrer que si $rz < 1$, que $\omega \in A(M, r)$ et N est assez grand, alors $|(U - U_N)(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$.