

Algèbre : Préparation aux Oraux 2026

Séance 1 : Mardi 19 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 2

Exercice 1 (oral IMT 25, Estelle,2) : Soit E un espace vectoriel et $u \in L(E)$. On suppose $u^2 - 5u - 6Id_E = 0_{L(E)}$. Démontrer que $\ker(u + Id_E) \oplus \ker(u - 6Id_E) = E$.

Ind : procéder par analyse et synthèse.

On procède par analyse et synthèse pour montrer $\forall x \in E, \exists!(a, b) \in \ker(u + Id_E) \times \ker(u - 6Id_E), x = a + b$.

Soit $x \in E$; soit $(a, b) \in \ker(u + Id_E) \times \ker(u - 6Id_E)$ convenant.

$$\text{Alors } \begin{cases} x = a + b \\ u(x) = -a + 6b \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a = x - b \\ b = \frac{u(x) + x}{7} \end{cases}, \text{ puis } \begin{cases} a = \frac{6x - u(x)}{7} \\ b = \frac{u(x) + x}{7} \end{cases} \quad (*)$$

On a donc unicité si existence.

Faisons la synthèse : soient a, b donnés par (*).

$$\text{Alors } x = a + b, u(a) = \frac{6u(x) - u^2(x)}{7} = -a \text{ et } u(b) = \frac{u^2(x) + u(x)}{7} = 6b.$$

On a donc bien $(a, b) \in \ker(u + Id_E) \times \ker(u - 6Id_E)$.

On peut conclure : $\boxed{\ker(u + Id_E) \oplus \ker(u - 6Id_E) = E}$

Exercice 2 (oral IMT 25, Léo,2) : Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 telle que $A^2 = 0$.

Est ce que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Ind : prendre a canoniquement associé à A et chercher une base dans laquelle la matrice de a est B .

On prend a canoniquement associé à A . Soit v une base de $\text{Im}(a)$. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $a(u) = v$. Comme $A^2 = 0$, on a aussi $a \circ a = 0$ et $\text{Im}(a) \subset \ker(a)$. Donc $a(v) = 0$.

On prouve que $C = (v, u)$ est une base de \mathbb{R}^2 : comme elle contient deux vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v = 0$. Alors on applique a : $\alpha v = 0$.

On a donc $\alpha = \beta = 0$ et $C = (v, u)$ est une base de \mathbb{R}^2 telle que $M_C(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ représentent a dans deux bases différentes : elles sont semblables.

Exercice 3 (oral CCINP 25, Emma). Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. On considère

$$\Phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M \rightarrow \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A \end{cases}$$

- 1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que $\ker(\Phi) = \text{Vect}(A)$.
- 3) Montrer que $\text{Im}(\Phi) \subset \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\} = E$.

- 4) Montrer que $\text{Im}(\Phi) = E$.
- 5) Φ est-elle diagonalisable ?

Ind :

- 2) Par double inclusion.
- 4) Montrer l'égalité des dimensions.
- 5) Calculer $\Phi(M)$ lorsque $M \in E$.

1) Tout d'abord, on a bien $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$. Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $\Phi(M + \lambda N) = \text{Tr}(A)(M + \lambda N) - \text{Tr}(M + \lambda N)A = \Phi(M) + \lambda\Phi(N)$, avec la linéarité de la Trace.
 Donc Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

2) On procède par double inclusion. Soit $M \in \text{Vect}(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M = \lambda A$.
 Alors $\Phi(M) = \lambda \text{Tr}(A)(A - A) = 0$, donc $M \in \ker(\Phi)$.

Soit $M \in \ker(\Phi)$. Alors $\text{Tr}(A)M = \text{Tr}(M)A$. Comme $\text{Tr}(A) \neq 0$, $M = \frac{\text{Tr}(M)}{\text{Tr}(A)}A$, donc $M \in \text{Vect}(A)$.

On a donc bien $\ker(\Phi) = \text{Vect}(A)$.

3) Montrons que $\text{Im}(\Phi) \subset \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\} = E$. Soit $N \in \text{Im}(\Phi)$. Alors il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A = N$. Donc $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(M) - \text{Tr}(M)\text{Tr}(A) = 0$.

On a donc bien $N \in \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\} = E$ et $\text{Im}(\Phi) \subset \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\} = E$.

4) On souhaite montrer que $\dim(\text{Im}(\Phi)) = \dim(E)$. On utilise le théorème du rang. Comme $\ker(\Phi) = \text{Vect}(A)$, $\dim(\ker(\Phi)) = 1$, donc $\dim(\text{Im}(\Phi)) = n^2 - 1$.

De plus, $\{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\} = \ker(\text{Tr})$, et Tr est une forme linéaire non nulle ($\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$), donc son noyau est un hyperplan et $\dim(\ker(\text{Tr})) = n^2 - 1$.

Donc $\dim(\text{Im}(\Phi)) = \dim(E)$ et d'après 3), $\text{Im}(\Phi) = E$.

5) On a déjà $\ker(\Phi) = \text{Vect}(A)$, donc $0 \in \text{Sp}(\Phi)$ et $\dim(E_0(\Phi)) = 1$.

De plus, si $M \in \text{Im}(\Phi) = E$, alors $\Phi(M) = \text{Tr}(A)M$, donc $M \in E_{\text{Tr}(A)}(\Phi)$ et $\text{Im}(\Phi) \subset E_{\text{Tr}(A)}(\Phi)$.

Donc $\dim(E_0(\Phi)) + \dim(E_{\text{Tr}(A)}(\Phi)) \geq n^2$, avec $\text{Tr}(A) \neq 0$

Or $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\Phi)} \dim(E_\lambda(\Phi)) \leq n^2$, donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\Phi)} \dim(E_\lambda(\Phi)) = n^2$ et Φ est diagonalisable.

Exercice 4 (oral Mines 25, Nino,4) : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(X) = \text{tr}(AX)$.

- 1) Montrer que $f : A \mapsto f_A$ définit un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
- 2) Soit $g \in L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. On suppose $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), g(AB) = g(BA)$. Montrer $\exists \alpha \in \mathbb{R}, g = \alpha \text{Tr}$.

Ind :

- 1) Montrer avec soin la linéarité, puis l'injectivité en utilisant les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Conclure avec un argument de dimension.
- 2) Utiliser la première question, et les produits de deux éléments de la base canonique.

1) On prouve tout d'abord que $f : A \mapsto f_A$ est linéaire. Soient donc $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$. On calcule $f(A + \lambda B)(X) = f_{A + \lambda B}(X) = \text{Tr}((A + \lambda B)X)$.

Donc $f(A + \lambda B)(X) = f_A(X) + \lambda f_B(X) = (f_A + \lambda f_B)(X)$.

On conclut $f(A + \lambda B) = f(A) + \lambda f(B)$ (égalité d'applications linéaires).

Donc comme $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), f_A \in L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, on conclut que $f \in L(M_n(\mathbb{R}), L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}))$

On prouve ensuite que f est injective : soit $A \in \ker(f)$. Alors $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), f_A(X) = \text{tr}(AX) = 0$.

En particulier, pour $X = E_{i,j}$, avec $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\text{tr}(AE_{i,j}) = 0$.

Mais $\text{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{p=1}^n (AE_{i,j})_{p,p} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n A_{p,q} (E_{i,j})_{q,p} = A_{j,i}$ (1). Donc $A = (0)$.

Donc f est injective et l'espace de départ et d'arrivée ont même dimension, égale à n^2 .

Donc $f : A \mapsto f_A$ définit un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

2) Soit $g \in L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. On suppose $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), g(AB) = g(BA)$.

Comme f est bijective, soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $g = f_A$.

On a donc $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), g(X) = \text{Tr}(AX)$.

On cherche à utiliser la propriété $\forall U, V \in M_n(\mathbb{R}), g(UV) = g(VU)$ pour les éléments de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Soient $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. On calcule $(E_{i,j}E_{k,l})_{pq} = \sum_{r=1}^n (E_{i,j})_{pr} (E_{k,l})_{rq}$.

On utilise le symbole de Kronecker : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon.

$$(E_{i,j}E_{k,l})_{pq} = \sum_{r=1}^n \delta_{i,p} \delta_{j,r} \delta_{k,r} \delta_{l,q} = \delta_{j,k} \delta_{i,p} \delta_{l,q} = \delta_{j,k} (E_{i,l})_{pq}$$

On conclut $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$ (les deux matrices ont les mêmes coefficients). De même, $E_{k,l}E_{i,j} = \delta_{i,j} E_{k,j}$.

Donc pour $i \neq j$: $g(E_{i,i}E_{i,j}) = g(E_{i,j}) = A_{j,i}$ avec (1).

Mais aussi $g(E_{i,i}E_{i,j}) = g(E_{i,j}E_{i,i}) = g(0) = 0$, donc $\forall i \neq j, A_{j,i} = 0$.

De plus, $g(E_{i,j}E_{j,i}) = g(E_{j,i}E_{i,j})$, donc $g(E_{i,i}) = g(E_{j,j})$ et $A_{i,i} = A_{j,j} = \alpha \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $A = \alpha I_n$ et $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), g(X) = \alpha \text{Tr}(X)$

Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}, g = \alpha \text{Tr}$

Exercice 5 (Oral Mines 25, Jules,5) : On considère $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$.

On suppose $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i + \beta_j \neq 0$.

On note $M \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \beta_j}$.

Démontrer que $\det(M) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j)}$

Ind : procéder par récurrence et considérer
$$P(X) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)} \begin{vmatrix} \prod_{i \neq 1} (\alpha_1 + \beta_i) & \cdots & \cdots & \prod_{i \neq n+1} (\alpha_1 + \beta_i) \\ \vdots & & & \vdots \\ \prod_{i \neq 1} (X + \beta_i) & & & \prod_{i \neq n+1} (X + \beta_i) \end{vmatrix}.$$

Effectuer une démonstration proche de celle de Vandermonde.

Tout d'abord, le résultat est vrai si les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts (en effet, la matrice possède deux lignes identiques et le déterminant est nul) :

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et on prouve :

$$H(n) : \text{« si } M \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie } \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \beta_j}, \text{ alors } \det(M) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j)}, \text{ où}$$

les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux distincts »

Pour $n = 1$, on a bien $\det(M) = \frac{1}{(\alpha_1 + \beta_1)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ est vraie. Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, M_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \beta_j}$, avec les

$(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ deux à deux distincts.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_1 + \beta_1)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(\alpha_1 + \beta_{n+1})} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_1)} & & & \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})} \end{vmatrix} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)} \begin{vmatrix} \prod_{i \neq 1} (\alpha_1 + \beta_i) & \cdots & \cdots & \prod_{i \neq n+1} (\alpha_1 + \beta_i) \\ \vdots & & & \vdots \\ \prod_{i \neq 1} (\alpha_{n+1} + \beta_i) & & & \prod_{i \neq n+1} (\alpha_{n+1} + \beta_i) \end{vmatrix},$$

en multipliant la i -ème ligne par $\prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

On pose alors
$$P(X) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)} \begin{vmatrix} \prod_{i \neq 1} (\alpha_1 + \beta_i) & \cdots & \cdots & \prod_{i \neq n+1} (\alpha_1 + \beta_i) \\ \vdots & & & \vdots \\ \prod_{i \neq 1} (X + \beta_i) & & & \prod_{i \neq n+1} (X + \beta_i) \end{vmatrix}.$$
 En développant par rapport à la

dernière ligne, on constate que $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

De plus, $P(\alpha_1) = \dots = P(\alpha_n) = 0$ (il y a alors deux lignes identiques), donc P possède n racines distinctes et

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

On calcule $P(-\beta_{n+1})$: tous les termes de la dernière ligne sont nuls, sauf éventuellement le dernier. On développe par rapport à la dernière ligne

$$P(-\beta_{n+1}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)} \prod_{i \neq n+1} (\beta_i - \beta_{n+1}) \begin{vmatrix} \prod_{i \neq 1} (\alpha_1 + \beta_i) & \cdots & \cdots & \prod_{i \neq n} (\alpha_1 + \beta_i) \\ \vdots & & & \vdots \\ \prod_{i \neq 1} (\alpha_n + \beta_i) & & & \prod_{i \neq n} (\alpha_n + \beta_i) \end{vmatrix}$$

$$P(-\beta_{n+1}) = \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)} \prod_{i \neq n+1} (\beta_{n+1} - \beta_i) \prod_{i=1}^n (\beta_{n+1} + \alpha_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) (\beta_j - \beta_i) \text{ (dans chaque terme de la}$$

i -ème ligne de ce dernier déterminant, il y a $(\beta_{n+1} + \alpha_i)$ que l'on peut sortir par linéarité par rapport à chaque ligne, et ensuite on utilise $H(n)$.

Mais par ailleurs $P(-\beta_{n+1}) = (-1)^n \lambda \prod_{k=1}^n (\beta_{n+1} + \alpha_k)$, donc $\lambda = \frac{(-1)^n P(-\beta_{n+1})}{\prod_{k=1}^n (\beta_{n+1} + \alpha_k)}$.

Ainsi, $\det(M) = P(\alpha_{n+1}) = \lambda \prod_{k=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_k) = \det(M) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i) (\beta_j - \beta_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i + \beta_j)}$

Exercice 6 (oral Mines 25, Violette,5) : Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soient u_1, \dots, u_n des endomorphismes nilpotents de E , qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$?

Ind : procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquer que si u_1, \dots, u_n, u_{n+1} sont des endomorphismes nilpotents de E , qui commutent deux à deux, alors $F = \text{Im}(u_{n+1})$ est stable par u_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à $v_k = (u_k)_F : \begin{matrix} F \rightarrow F \\ x \mapsto u_k(x) \end{matrix}$.

On traite le cas $n=1$. On prend u_1 endomorphisme nilpotent de E . Si $B = (e_i)$ est une base de E , alors $M = M_B(u_1) = (a)$ est aussi nilpotente. Donc on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = (a^p) = (0)$, donc $a = 0$ et $u_1 = 0_{L(E)}$.

On procède ensuite par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour prouver $H(n)$:

Si E est un K -espace vectoriel de dimension n , et que u_1, \dots, u_n sont des endomorphismes nilpotents de E , qui commutent deux à deux, alors $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n = 0_{L(E)}$.

- On a prouvé $H(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \leq n, H(k)$ est vraie. Montrons $H(n+1)$. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie égale à $n+1$. Soient u_1, \dots, u_n, u_{n+1} des endomorphismes nilpotents de E , qui commutent deux à deux. Montrons que $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n \circ u_{n+1} = 0_{L(E)}$.
Soit alors $y \in \text{Im}(u_{n+1})$, Soit $x \in E$ tel que $u_{n+1}(x) = y$. Il vient pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$
 $u_k(y) = u_k \circ u_{n+1}(x) = u_{n+1} \circ u_k(x) \in \text{Im}(u_{n+1})$.
Donc $F = \text{Im}(u_{n+1})$ est stable par u_k

Or $F = \text{Im}(u_{n+1}) \subset E$. Si $F = E$, alors u_{n+1} est un endomorphisme surjectif en dimension finie, donc bijectif et c'est absurde (en effet, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, u_{n+1}^p est bijectif, donc non nul, ce qui est exclu puisque u_{n+1} est nilpotent).

Donc $\dim(F) = k \leq n$.

Si $\dim(F) = 0$, $u_{n+1} = 0_{L(E)}$ et donc $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n \circ u_{n+1} = 0_{L(E)}$.

Si $\dim(F) = k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $v_k = (u_k)_F : F \rightarrow F$
 $x \mapsto u_k(x)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. v_1, \dots, v_k sont des

endomorphismes nilpotents de F , qui commutent deux à deux, Donc avec $H(k)$, on sait que

$$v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_n = 0_{L(F)}.$$

Donc si $x \in E$, $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n \circ u_{n+1}(x) = u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n(u_{n+1}(x)) = 0_E$ car $u_{n+1}(x) \in F$.

On a donc bien $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n \circ u_{n+1} = 0_{L(E)}$ et $H(n+1)$ est vraie.

On conclut que sous les hypothèses de l'énoncé, $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n = 0_{L(E)}$.

Séance 2 : Jeudi 21 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 5

Exercice 7 (Oral IMT 25, Nathan,1) : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$.

- 1) A est-elle diagonalisable ?
- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles $\text{rg}(A - \alpha I_n) = 1$?
- 3) Déterminer les éléments propres de A .

Ind :

- 2) Séparer les cas $\alpha = 3$ et $\alpha \neq 3$.
- 3) Utiliser la trace pour déterminer la dernière valeur propre. Deviner des éléments de $\ker(A - \lambda I_n)$ suivant les cas.

- 1) A est symétrique réelle, donc par théorème spectral, elle est diagonalisable.

$$2) \text{ Soit } \alpha \in \mathbb{R}. A - \alpha I_n = \begin{pmatrix} 4-\alpha & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 4-\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 4-\alpha \end{pmatrix}.$$

Donc si $\alpha = 3$, $\text{rg}(A - \alpha I_n) = 1$, et si $\alpha \neq 3$, les deux premières colonnes de $A - \alpha I_n$ forment une famille libre, donc $\text{rg}(A - \alpha I_n) \geq 2$.

Finalement, $\boxed{\text{rg}(A - \alpha I_n) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3}$

- 3) Tout d'abord, $\text{rg}(A - 3I_n) = 1$, donc par théorème du rang, $\dim(\ker(A - 3I_n)) = n - 1 > 0$.

De plus, si on note (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$, les $(E_1 - E_j)_{2 \leq j \leq n}$ forment une famille libre $(n-1)$ vecteurs de $\ker(A - 3I_n)$, donc une base de $\ker(A - 3I_n)$.

Enfin, comme A est diagonalisable (donc trigonalisable), $Tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda * mult(\lambda) = (n-1)*3 + x$, où x

est la dernière valeur propre de A . On déduit que $4n = x + 3n - 3$, donc $x = n + 3$.

Mais $\dim(\ker(A - 3I_n)) + \dim(\ker(A - xI_n)) = n$, donc $\dim(\ker(A - xI_n)) = 1$.

On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n+3) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A - xI_n)$.

Enfinement : $Sp(A) = \{3, n+3\}$. $E_3(A) = Vect((E_1 - E_j)_{2 \leq j \leq n})$ et $E_{n+3}(A) = Vect(\sum_{j=1}^n E_j)$

Exercice 8 (Oral CCINP 25, Alice,3) : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varphi: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$
 $M \mapsto MA + AM$

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme.
- 2) Soit $M = XY^T$, avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$.
 - a) Montrer que $M \neq 0_n$.
 - b) Soit X est un vecteur propre de A , et Y un vecteur propre de A^T . Montrer que $M = XY^T$ est un vecteur propre de φ .
- 3) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
 - a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = M(\lambda I_n - A)^k$.
 - b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)M = MP(\lambda I_n - A)$.
- 4) Montrer que $M\chi_A(\lambda I_n - A) = 0$, avec χ_A le polynôme caractéristique de A .
- 5) Montrer que $Sp(\varphi) = \{\lambda + \mu, \lambda, \mu \in Sp(A)\}$.

Indication: procéder par double inclusion et utiliser les questions précédentes.

Ind :

- 2) Considérer $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$.
- 3) a) Procéder par récurrence.
- 4) Utiliser un théorème du cours.
- 5) Procéder par double inclusion en utilisant la 2b) et la 4). Utiliser $\chi_A = \prod_{\alpha \in Sp(A)} (X - \alpha)$.

1) Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\varphi(M + \lambda N) = (M + \lambda N)A + A(M + \lambda N) = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$.
 Donc φ est linéaire et va de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$: c'est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.

2) a) $M = XY^T$, avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Alors pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M_{i,j} = X_i Y_j$.
 Comme X, Y ne sont pas nuls, il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$. On a donc $M_{i,j} = X_i Y_j \neq 0$.
 Donc $M \neq 0_n$.

b) Soit X est un vecteur propre de A , et Y un vecteur propre de A^T . On suppose que $AX = \alpha X$ et $A^T Y = \beta Y$. Alors $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, donc $M \neq 0_n$.

De plus, $\varphi(M) = XY^T A + AXY^T = X(AY)^T + \alpha XY^T = (\alpha + \beta)M$

Donc $M = XY^T$ est un vecteur propre de φ , associé à $\alpha + \beta$.

3) a) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $H(k)$: " $A^k M = M(\lambda I_n - A)^k$ ".

- $H(0)$ est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $H(k)$ est vraie. Alors $MA + AM = \lambda M$, donc $AM = M(\lambda I_n - A)$.

Donc $A^{k+1}M = A^k M(\lambda I_n - A) = M(\lambda I_n - A)^{k+1}$ avec $H(k)$.

Donc $H(k+1)$ est vraie et on a bien $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = M(\lambda I_n - A)^k}$

- b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On prend $n \geq \deg(P)$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Alors $P(A)M = \sum_{k=0}^n a_k A^k M = \sum_{k=0}^n a_k M(\lambda I_n - A)^k$ avec 3a).

Donc $P(A)M = M \left(\sum_{k=0}^n a_k (\lambda I_n - A)^k \right)$ et on a bien $\boxed{P(A)M = MP(\lambda I_n - A)}$.

- 4) Soit χ_A le polynôme caractéristique de A . Alors d'après Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$.

Donc d'après la question précédente, $\boxed{M \chi_A(\lambda I_n - A) = 0}$

- 5) On procède par double inclusion. Avec 2b), on a prouvé que si $\alpha, \beta \in Sp(A)$, alors $\alpha + \beta \in Sp(\varphi)$ (puisque $M = XY^T$ est un vecteur propre de φ associé à $\alpha + \beta$).

Montrons l'autre inclusion. Soit donc $x \in Sp(\varphi)$ et $M \neq 0$ un vecteur propre associé (donc $M \neq 0$).

Alors d'après 4), comme $\varphi(M) = \lambda M$, il vient $M \chi_A(xI_n - A) = 0$

Or $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, et $\chi_A = \prod_{\alpha \in Sp(A)} (X - \alpha)$ (où chaque valeur propre apparaît autant de

fois que le veut sa multiplicité). Donc $\forall B \in M_n(\mathbb{C}), \chi_A(B) = \prod_{\alpha \in Sp(A)} (B - \alpha I_n)$

Donc $\chi_A(xI_n - A) = \prod_{\alpha \in Sp(A)} ((x - \alpha)I_n - A)$.

Si par l'absurde $\forall \alpha \in Sp(A), (x - \alpha)I_n - A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors par produit de matrices inversibles,

$\chi_A(xI_n - A)$ est inversible, donc comme $M \chi_A(xI_n - A) = 0$, $M = 0$, ce qui est absurde puisque M est un vecteur propre.

Donc $\exists \alpha \in Sp(A), (x - \alpha)I_n - A \notin GL_n(\mathbb{C})$. Soit un tel α . Alors $\beta = x - \alpha \in Sp(A)$.

Donc $x = \alpha + \beta$, avec $\alpha, \beta \in Sp(A)$ et on a bien l'autre inclusion.

Donc $\boxed{Sp(\varphi) = \{\lambda + \mu, \lambda, \mu \in Sp(A)\}}$

Exercice 9 (Oral IMT 25, Alice,2) : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, avec $M^2 = M^T$.

- 1) M est-elle diagonalisable ?
- 2) On suppose $Tr(M) = n$. Déterminer M .

Ind :

- 1) Trouver un polynôme annulateur de M .
- 2) Utiliser le polynôme annulateur obtenu et le lien entre trace et valeurs propres.

- 1) Comme $M^2 = M^T$, il vient $M^4 = M^T M^T = (M^2)^T = M$.

Donc $X^4 - X$ est un polynôme annulateur de M .

De plus, $X^4 - X = X(X^3 - 1) = X(X - 1)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})$ est scindé à racines simples.

Donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$

- 2) On suppose $Tr(M) = n$. On sait que $Sp(M) \subset \{0, 1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\} = \{0, 1, j, \bar{j}\}$, avec $e^{2i\pi/3} = j$

On note, pour $\lambda \in Sp(M)$, α_λ la multiplicité de cette valeur propre, et qu'on adopte la convention $\alpha_\lambda = 0$ lorsque $\lambda \notin Sp(M)$,

M est trigonalisable sur \mathbb{C} donc possède n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

Donc $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_j + \alpha_{\bar{j}} = n$

De plus, $0 + \alpha_1 + \alpha_j + \alpha_{\bar{j}} = \text{Tr}(M) = n$

Donc en soustrayant et en prenant la partie réelle : $\alpha_0 + \frac{3}{2}\alpha_j + \frac{3}{2}\alpha_{\bar{j}} = 0$, donc $\alpha_0 = \alpha_j = \alpha_{\bar{j}} = 0$ (c'est une somme nulle de termes positifs).

Donc $\text{Sp}(M) \subset \{1\}$ et comme M est diagonalisable, M est semblable à I_n , donc $M = I_n$

Exercice 10 (oral Mines 25, Lucas,3) : soit $a \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) M est-elle inversible ? Expliciter M^{-1}
- 2) M est-elle diagonalisable ?
- 3) Sans diagonaliser, déterminer M^n . On pourra utiliser le théorème de division euclidienne.

Ind :

- 1) Calculer M^2 .
- 2) Utiliser un polynôme annulateur.
- 3) Effectuer la division euclidienne de X^n par P .

1) On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$, donc $M \left(\frac{1}{2}(M - I_3) \right) = I_3$.

Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$

2) On vient de voir que M annule $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ qui est scindé à racines simples.

Donc M est diagonalisable.

3) On pose $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ et on effectue la division euclidienne de X^n par P .

Il vient $X^n = PQ + a_n X + b_n$, avec $\begin{cases} (-1)^n = -a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases}$, donc $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \end{cases}$.

Donc $M^n = (PQ)(M) + a_n M + b_n I_3 = P(M)Q(M) + a_n M + b_n I_3 = a_n M + b_n I_3$.

On conclut $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a a_n & a^2 a_n \\ a_n / a & b_n & a a_n \\ a_n / a^2 & a_n / a & b_n \end{pmatrix}$. Cela fonctionne pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

On peut aussi partir de $M^2 = M + 2I_3$ et montrer par récurrence qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$M^n = a_n M + b_n I_3$ en trouvant une relation de récurrence puis en explicitant a_n, b_n .

Exercice 11 (oral IMT 25, Léo,4) : on note E l'ensemble des fonctions $f \in C^1$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $f(0) = 0$.

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Pour $f \in E$, on note $T(f) : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$.

- 1) Montrer que T est bien définie et que c'est un endomorphisme de E .
- 2) Trouver les valeurs propres de T .

Ind :

- 1) Etudier la limite de $\frac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0.
 2) Procéder par analyse et synthèse. Aboutir à une équation différentielle et étudier la continuité de f' en 0.

1) Soit $f \in E$. On pose $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ pour $t \in \mathbb{R}^*$. $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} f'(0)$ et on prolonge ainsi g en une fonction continue en 0. Il vient alors pour $x \in \mathbb{R}$: $T(f)(x) = \int_0^x g(t) dt$ et T est bien définie.

De plus, par théorème fondamental de l'analyse, on considère une primitive G de g sur \mathbb{R} . Il vient alors pour $x \in \mathbb{R}$ $T(f)(x) = G(x) - G(0)$, donc $T(f)$ est bien de classe C^1 sur \mathbb{R} , et vérifie $T(f)(0) = 0$. Donc on a bien $T : E \rightarrow E$.

En outre, si $f, g \in E$, $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$ par linéarité de l'intégrale. Donc $T \in L(E)$.

- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On procède par analyse et synthèse. On suppose que $\lambda \in Sp(T)$. Alors il existe $f \in E$, non nulle, telle que $T(f) = \lambda f$. Soit une telle f . On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $T(f)(x) = G(x) - G(0) = \lambda f(x)$.

Donc en dérivant, $g(x) = \lambda f'(x)$, donc si $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = \lambda f'(x)$.

On procède par disjonction de cas :

- si $\lambda = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$, donc par continuité, $f = 0_E$. Donc $0 \notin Sp(T)$.
- Si $\lambda \neq 0$, $f'(x) - \frac{f(x)}{\lambda x} = 0$. On reconnaît une équation différentielle.

On résout sur \mathbb{R}_+ . On obtient $f(x) = A \exp\left(\frac{1}{\lambda} \ln(x)\right) = Ax^{1/\lambda}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

On résout sur \mathbb{R}_- . On obtient $f(x) = B \exp\left(\frac{1}{\lambda} \ln(-x)\right) = B(-x)^{1/\lambda} = B(|x|)^{1/\lambda}$, avec $B \in \mathbb{R}$.

De plus, on n'a pas $A = B = 0$. Si $A \neq 0$, pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{A}{\lambda} x^{(1/\lambda)-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f'(0)$. Donc

$\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$ (sinon la limite n'est pas finie), et $\lambda \in]0, 1]$. On a le même résultat si $B \neq 0$

Donc $Sp(T) \subset]0, 1]$.

Réciproquement (synthèse), on suppose $\lambda \in]0, 1[$. On pose $f(x) = |x|^{1/\lambda}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Alors $f(0) = 0$ et par composée, f est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .

De plus, pour $x > 0$, $f(x) = x^{1/\lambda}$, donc $f'(x) = \frac{1}{\lambda} x^{(1/\lambda)-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ car $\frac{1}{\lambda} > 1$.

De même, pour $x < 0$, $f(x) = (-x)^{1/\lambda}$, donc $f'(x) = -\frac{1}{\lambda} (-x)^{(1/\lambda)-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Donc $f'(x) \rightarrow 0$ et par théorème de la limite de la dérivée, comme f' est continue sur \mathbb{R}_- et sur \mathbb{R}_+ , f est bien de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Enfin si $x > 0$, $\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^x t^{(1/\lambda)-1} dt = \lambda x^{1/\lambda} = \lambda f(x)$

Si $x < 0$, $\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = -\int_0^x (-t)^{(1/\lambda)-1} dt = -\lambda \left[-(-t)^{1/\lambda} \right]_0^x = \lambda (-x)^{1/\lambda} = \lambda f(x)$.

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^0 \frac{f(t)}{t} dt = 0 = \lambda f(0).$$

On a donc $T(f) = \lambda f$ et f est vecteur propre de T (elle est non nulle) associé à la valeur propre λ et $\lambda \in Sp(T)$.

Si $\lambda = 1$, on pose $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a bien $T(f) = f$ et $1 \in Sp(T)$

On conclut : $\boxed{Sp(T) =]0, 1]}$

Exercice 12 (Oral Centrale 25, Ambre, 4) : Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversible.

- 1) Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si A^2 est diagonalisable sur \mathbb{R} et $Sp(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- 2) a) Donner un exemple de matrice M non diagonalisable et non inversible telle que M^2 est diagonalisable.
b) Donner un exemple de matrice M non diagonalisable et inversible telle que M^2 est diagonalisable.

- 3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Soit $A = \begin{pmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

Déterminer $Sp(A)$ puis $Sp(A^2)$.

Ind :

- 1) Procéder par double implication et utiliser un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- 2) a) Chercher un exemple avec une matrice triangulaire à diagonale nulle.
b) Penser à une matrice de rotation dans le plan.
- 3) Calculer le polynôme caractéristique de A en séparant les cas n pair et n impair.

1) On procède par double implication.

\Rightarrow On suppose A diagonalisable sur \mathbb{R} . Soit alors $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$A = P D P^{-1}. \text{ Alors } A^2 = P D^2 P^{-1}. \text{ Si } D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}, \text{ alors } D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n^2 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^2 \text{ est}$$

diagonalisable (elle est semblable à une matrice diagonale).

De plus, comme A est inversible, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \neq 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i^2 > 0$, donc $Sp(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$.

\Leftarrow On suppose ici que $Sp(A^2) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Comme A^2 est diagonalisable sur \mathbb{R} , on sait alors que

$\prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A^2 (scindé à racines simples). Donc $\prod_{k=1}^r (A^2 - \lambda_k I_n) = 0$ et ainsi

$\prod_{k=1}^r (A - \sqrt{\lambda_k} I_n)(A + \sqrt{\lambda_k} I_n) = 0$. Comme les λ_k sont toutes distinctes, les $\sqrt{\lambda_k}$ et $-\sqrt{\lambda_k}$ le sont aussi.

Donc $Q = \prod_{k=1}^r (X - \sqrt{\lambda_k})(X + \sqrt{\lambda_k}) \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de A qui est scindé à racines simples,

donc A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

On a bien montré l'équivalence.

2a) On va chercher une matrice M triangulaire, avec des 0 sur la diagonale (ainsi, elle ne sera pas inversible).

De plus, elle admet 0 pour seule valeur propre donc est diagonalisable si et seulement si $M = 0$. On prend donc

$$M \neq (0) \text{ telle que } M^2 = (0). \text{ On prend } M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \text{ (ou } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{)}.$$

Alors M est non diagonalisable et non inversible et M^2 est diagonalisable.

2b) On peut penser à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors $\gamma_M = X^2 + 1$, donc

M n'a pas de valeur propre réelle et n'est donc pas diagonalisable sur \mathbb{R} . De plus, $\det(M) = 1 \neq 0$ donc M est inversible.

En outre, $M^2 = -I_2$ est bien diagonalisable.

Donc M convient.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{pmatrix}$. Elle est symétrique réelle, donc diagonalisable sur \mathbb{R} . En effet, pour

$1 \leq i, j \leq n$, il vient $A_{i,n-i} = A_{n-i,i} = a$ et si $i+j \neq n$, $A_{i,j} = A_{j,i} = b$.

On essaie de calculer le polynôme caractéristique de A .

On suppose tout d'abord que n est pair et on pose $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$XI_{2p} - A = \begin{pmatrix} X-b & -b & \cdots & \cdots & -b & -a \\ -b & X-b & & & -a & -b \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ & -b & X-b & -a & -b & \\ & -b & -a & X-b & -b & \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ -b & -a & & & X-b & -b \\ -a & -b & & & -b & X-b \end{pmatrix}.$$

Donc en ajoutant toutes les colonnes :

$$\gamma_A = (X - ((n-1)b + a)) \begin{vmatrix} 1 & -b & \cdots & \cdots & -b & -a \\ 1 & X-b & & & -a & -b \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ & -b & X-b & -a & -b & \\ & -b & -a & X-b & -b & \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ 1 & -a & & & X-b & -b \\ 1 & -b & & & & X-b \end{vmatrix}.$$

Pour $2 \leq j \leq n$, on fait $C_j \leftarrow C_j + bC_1$.

$$\gamma_A = (X - ((n-1)b + a)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b-a \\ 1 & X & & & b-a & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & X & b-a & 0 & \\ & 0 & b-a & X & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ 1 & b-a & & & X & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & X \end{vmatrix}.$$

On pose $c = b - a$ et pour $2 \leq i \leq n$, on fait $L_i \leftarrow L_i - L_1$.

$$\gamma_A = (X - ((n-1)b + a)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c \\ 0 & X & & & c & -c \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & & X & c & & 0 \\ 0 & & c & X & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & c & & & X & -c \\ 0 & 0 & & & 0 & X-c \end{vmatrix} \quad \text{et on développe par rapport à la dernière ligne, puis}$$

par rapport à la première colonne.

$$\text{Il vient } \gamma_A = (X - ((n-1)b + a)(X - c)D_{2p-2}, \text{ avec } D_{2p-2} = \begin{vmatrix} X & (0) & & c \\ & \ddots & & \\ (0) & X & c & (0) \\ & c & X & \\ & & \ddots & \\ c & (0) & & X \end{vmatrix}.$$

Il vient en développant par rapport à la première colonne :

$$D_{2(p-1)} = X \begin{vmatrix} X & & c & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c & & X & \\ 0 & (0) & X & \end{vmatrix} + (-1)^{2p-1} c \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ X & & c \\ 0 & \ddots & \\ c & (0) & X & 0 \end{vmatrix} = (X^2 - c^2)D_{2(p-2)}.$$

Donc par récurrence, $D_{2(p-1)} = (X^2 - c^2)^{p-2} D_2 = (X^2 - c^2)^{p-1}$.

Donc $\gamma_A = (X - ((n-1)b + a)(X - (b-a))^p (X - (a-b))^{p-1}$.

$$\text{Lorsque } n = 2p + 1 \text{ est impair, } X I_{2p} - A = \begin{pmatrix} X-b & & (-b) & & -a \\ & \ddots & & & \\ & & X-b & & -a \\ (-b) & & X-a & & (-b) \\ & & -a & X-b & \\ & \ddots & & & \\ -a & & (-b) & & X-b \end{pmatrix}, \text{ on procède de}$$

même et il vient $\gamma_A = (X - ((n-1)b + a)(X - (b-a))^p (X - (a-b))^p$

Donc si $n > 2$, $Sp(A) = \{b-a, a-b, (n-1)b+a\}$, et si $n = 2$, $Sp(A) = \{b-a, b+a\}$.

En reprenant le travail fait au 1), en diagonalisant A , on conclut que $Sp(A^2) = \{(b-a)^2, ((n-1)b+a)^2\}$.

Séance 3 : Lundi 1er Juin

Cours : revoir tout le chapitre 9

Exercice 13 (Oral IMT 25, Capucine,2) :

Soit E un espace euclidien, k un réel, a un vecteur unitaire. Pour $x \in E$, on pose $u(x) = x + k \langle x, a \rangle a$

- 1) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
- 2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur k pour que u soit une isométrie vectorielle ? On pourra s'aider d'une matrice dans une base bien choisie. Identifier alors u .

Ind :

2) Se placer dans une base orthonormée adaptée à $V \oplus V^\perp = E$, où $V = Vect(a)$.

1) Il faut d'abord prouver que u est un endomorphisme de E . On a bien $u(E) \subset E$

Soient $x, y \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $u(x + \lambda y) = x + \lambda y + k \langle x + \lambda y, a \rangle a = u(x) + \lambda u(y)$.

Donc u est linéaire et est un endomorphisme de E .

On calcule $\langle u(x), y \rangle = \langle x + k \langle x, a \rangle a, y \rangle = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$.

De plus, $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(y), x \rangle = \langle y + k \langle y, a \rangle a, x \rangle = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle = \langle u(x), y \rangle$.

Donc u est un endomorphisme autoadjoint de E .

2) On considère $V = Vect(a)$. On sait que $V \oplus V^\perp = E$. Si $\dim(E) = n$, on note (e_1, \dots, e_{n-1}) une base orthonormée de V^\perp . Ainsi, comme a est unitaire, $B = (e_1, \dots, e_{n-1}, a)$ est une base orthonormée de E .

On calcule $u(a) = a + k \langle a, a \rangle a = (1+k)a$.

On obtient $M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1+k \end{pmatrix}$.

Or comme B est une base orthonormée de E , on sait que $u \in O(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Ceci équivaut au fait que les colonnes de $M_B(u)$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire usuel. Donc $u \in O(E) \Leftrightarrow |1+k| = 1 \Leftrightarrow k \in \{-2, 0\}$

• Si $k = 0, u = Id_E$.

• Si $k = -2$, u et la symétrie orthogonale par rapport à V^\perp coïncident sur la base B .

Donc si $k = -2$, u est la réflexion par rapport à $V^\perp = (Vect(a))^\perp$

Exercice 14 (Oral Mines 25, Marin,3) : Soit E un espace préhilbertien réel, p projecteur de E .

Montrer que : $\text{Im}(p) \perp \ker(p) \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$.

Ind :

1) Décomposer $x = a + b$, avec $a \in \text{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$.

2) Prendre $y \in \text{Im}(p)$ et $x \in \ker(p)$. Poser $u = \lambda x + y$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On procède par double implication. On suppose $\text{Im}(p) \perp \ker(p)$

Soit $x \in E$. On le décompose sous la forme $x = a + b$, avec $a \in \text{Im}(p)$ et $b \in \ker(p)$. Alors $\langle p(x), x \rangle = \|a\|^2 \geq 0$

On a donc bien $\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$

On suppose $\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$. On veut montrer que $\text{Im}(p) \perp \ker(p)$.

Soit $y \in \text{Im}(p)$ et $x \in \ker(p)$. On pose $u = \lambda x + y$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $p(u) = y$ et $\langle p(u), u \rangle = \langle y, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle y, x \rangle + \|y\|^2$. Si $\langle y, x \rangle < 0$, $\langle p(u), u \rangle = \lambda \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} -\infty$.

C'est absurde puisque $\forall u \in E, \langle p(u), u \rangle \geq 0$.

De même, si $\langle y, x \rangle > 0$, $\langle p(u), u \rangle = \lambda \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty} -\infty$, ce qui est exclu.

Donc $\langle y, x \rangle = 0$ et on a bien $\text{Im}(p) \perp \ker(p)$.

Ainsi, $\boxed{\text{Im}(p) \perp \ker(p) \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0}$

Exercice 15 (oral Centrale 25, Rémy, Marius,2) :

Soit $E = (C^2[0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\phi(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

On considère $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$, $G = \{g \in E, g'' = g\}$.

- 1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .
- 2) Déterminer la projection orthogonale p sur G .
- 3) Montrer que $F \oplus G = E$.

Ind :

- 2) Déterminer une base orthogonale de G .
- 3) Démontrer que $F^\perp = G$ par double inclusion.

1) ϕ est symétrique car on a bien $\phi(f, g) = \phi(g, f)$ lorsque $f, g \in E$. Il suffit donc de vérifier la linéarité par rapport à la première variable. Si $f_1, f_2, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, il vient :

$$\phi(\lambda f_1 + f_2, g) = \lambda \int_0^1 (f_1(t)g(t) + f_1'(t)g'(t)) dt + \int_0^1 (f_2(t)g(t) + f_2'(t)g'(t)) dt$$

Donc $\phi(\lambda f_1 + f_2, g) = \lambda \phi(f_1, g) + \phi(f_2, g)$ et ϕ est bilinéaire.

En outre, si $f \in E$, on a $\phi(f, f) = \int_0^1 (f^2(t) + (f'(t))^2) dt \geq 0$, donc \langle, \rangle est positive.

Enfin, si $\phi(f, f) = 0$, on a $\int_0^1 (f^2(t) + (f'(t))^2) dt = 0$, donc $t \rightarrow f^2(t) + (f'(t))^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle et $\forall t \in [0,1], f^2(t) + (f'(t))^2 = 0$, donc $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$ et $f' = 0$.

Donc ϕ est définie positive. $\boxed{\text{Finalement, } \phi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

2) On a $G = \{f \in E, f'' = f\} = \{x \rightarrow Ae^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}$ en résolvant l'équation différentielle.

Pour $t \in [0,1]$, on pose $\varphi(t) = e^t$ et $\psi(t) = e^{-t}$

$$\text{Donc } G = \text{vect}(\{\varphi, \psi\}). \text{ De plus, } \langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (e^t e^{-t} - e^t e^{-t}) dt = 0$$

La famille (φ, ψ) est constituée de deux vecteurs orthogonaux non nuls, donc elle est libre. (φ, ψ) est ainsi une

base orthogonale de G . Donc si $f \in E$, $p(f) = \frac{\langle f, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} \varphi + \frac{\langle f, \psi \rangle}{\|\psi\|^2} \psi$.

$$\text{De plus, } \|\varphi\|^2 = 2 \int_0^1 e^{2t} dt = e^2 - 1 \text{ et } \|\psi\|^2 = 2 \int_0^1 e^{-2t} dt = -e^{-2} + 1$$

Donc pour $x \in [0,1]$: $p(f)(x) = \frac{e f(1) - f(0)}{(e^2 - 1)} e^x + \frac{f(0) - e^{-1} f(1)}{(1 - e^{-2})} e^{-x}$, ou encore :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], p(f)(x) = \frac{e f(1) - f(0)}{(e^2 - 1)} e^x + \frac{e^2 f(0) - e f(1)}{(e^2 - 1)} e^{-x}}$$

3) On constate tout d'abord que si $f \in F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$, il vient $p(f) = 0$, donc

$f \in G^\perp = \ker(p)$. Ceci prouve que $F \subset G^\perp$. On cherche à prouver $G^\perp \subset F$.

Ainsi, on aura $G^\perp = F$ et $F \oplus G = E$. Soit donc $f \in G^\perp$.

On calcule : $\phi(f, \varphi) = 0 = \int_0^1 (f(t)\varphi(t) + f'(t)\varphi'(t)) dt$. On a donc $0 = \int_0^1 (f(t)e^t + f'(t)e^t) dt$

Il vient $\int_0^1 (f(t)e^t + f'(t)e^t) dt = [f(t)e^t]_0^1 = ef(1) - f(0)$. On a donc $ef(1) - f(0) = 0$

De même, $0 = \int_0^1 (f(t)e^{-t} - f'(t)e^{-t}) dt = [-f(t)e^{-t}]_0^1$, donc $0 = f(0) - \frac{1}{e}f(1)$.

On a donc $0 = f(0) = f(1)$ et $f \in F$. Donc $G^\perp \subset F$ et $G^\perp = F$.

Donc $F \oplus G = G^\perp \oplus G = E$.

Exercice 16 (oral Mines 25, Naël,3).

Soient A, B des matrices anti-symétriques à coefficients réels. Montrer que $Tr((AB - BA)^4) \geq 0$. A quelle condition a-t-on égalité ?

Ind : Poser $C = AB - BA$ et étudier C^2 . Montrer $Tr((AB - BA)^4) = 0 \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = 0$.

On pose $C = AB - BA$. Alors $C^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -C$, donc $C \in A_n(\mathbb{R})$.

Dès lors, il vient $(C^2)^T = (-C)^2 = C^2$. Donc $C^2 \in S_n(\mathbb{R})$

Par théorème spectral, la matrice C^2 est diagonalisable sur \mathbb{R} et admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non

nécessairement distinctes, avec $C^2 = P D P^{-1}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors $C^4 = P D^2 P^{-1}$, donc $Tr((AB - BA)^4) = tr(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \geq 0$ (c'est une somme de réels positifs).

On étudie le cas d'égalité : si $Tr((AB - BA)^4) = tr(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 0$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, donc $D = (0)$ et

$C^2 = 0$. Réciproquement, si $C^2 = 0$, $D = 0$ et on a bien $Tr((AB - BA)^4) = tr(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 0$.

Donc $Tr((AB - BA)^4) = 0 \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = 0$

Exercice 17 (oral Centrale 25, Emma,4) : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si et seulement si $M^2 = A$.

On considère $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que A possède une racine carrée et les déterminer toutes lorsque toutes les valeurs propres de A sont simples.

Ind : pour trouver toutes les racines carrées de A , procéder par analyse et synthèse. Traduire l'équation $M^2 = A$ sous la forme $\Delta^2 = D$, où D est diagonale et montrer que si Δ vérifie cette relation, alors elle est diagonale.

$A \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc avec le théorème spectral, elle est diagonalisable. De plus, $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Soient donc $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ diagonale à coefficients positifs telles que $A = P D P^{-1}$.

$$\text{On pose alors } L = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \text{ et } R = P L P^{-1}. \text{ Il vient } R^2 = P L^2 P^{-1} = A$$

Donc R est une racine carrée de A et A possède une racine carrée.

On cherche à les déterminer toutes.

On doit donc résoudre $M^2 = A \Leftrightarrow (P^{-1} M P)^2 = D$. On pose $\Delta = P^{-1} M P$.

On procède par analyse et synthèse. Si M convient, $M^2 = A$, donc $\Delta^2 = D$.

On a alors $D \Delta = \Delta^3 = \Delta D$,

Soient f et d canoniquement associés respectivement à Δ et à D . Comme $f \circ d = d \circ f$, les sous-espaces propres de d sont stables par f .

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $1 = \dim(E_{d_k}(a)) = \dim(E_{d_k}(d))$ (puisque A est diagonalisable, $\text{mult}(d_k) = \dim(E_{d_k}(d))$).

Si on note $C = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique \mathbb{R}^n , e_k est une base de $E_{d_k}(d)$. Donc $f(e_k) \in E_{d_k}(d)$ et on considère

$$\alpha_k \in \mathbb{R}, f(e_k) = \alpha_k e_k. \text{ Donc } \Delta = M_C(f) = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et comme } \Delta^2 = D, \Delta = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } M = P \Delta P^{-1} = P \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Réciproquement (synthèse), ces matrices conviennent.

$$\text{Les racines carrées de } A \text{ sont les } P \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ où } A = P D P^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 (Oral Mines 25, Grégoire, 5) : Soit $n \geq 2$ et $F = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace préhilbertien. On suppose $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$.

Montrer que toute famille de $(n-1)$ vecteurs de F est libre.

Ind : procéder par récurrence.

Pour montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, prendre $F = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E vérifiant les hypothèses et supposer par l'absurde que $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}, x_n = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$.

Montrer $\exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \alpha_k < 0$ et considérer la famille $G = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_n - \alpha_k x_k)$ et lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Soit E un espace préhilbertien (réel). On procède par récurrence sur $n \geq 2$ et on prouve $P(n)$: si $F = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$, alors toute famille de $(n-1)$ vecteurs de F est libre.

On prend $n = 2$. On prend $F = (x_1, x_2)$, avec $x_1, x_2 \in E$. On suppose $\langle x_1, x_2 \rangle < 0$. Alors x_1, x_2 sont non nuls et les familles (x_1) et (x_2) sont bien libres.

Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$ est vraie. Soit $F = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E telle que

$\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$. Par symétrie du problème, il suffit de prouver que (x_1, \dots, x_n) est libre. On procède **par l'absurde** et on suppose que (x_1, \dots, x_n) est liée.

Avec $P(n)$, on sait que toute famille de $(n-1)$ vecteurs de (x_1, \dots, x_n) est libre. Donc (x_1, \dots, x_{n-1}) est libre et comme (x_1, \dots, x_n) est liée, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}, x_n = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$.

De plus, $\|x_n\|^2 = \alpha_1 \langle x_1, x_n \rangle + \dots + \alpha_{n-1} \langle x_{n-1}, x_n \rangle$.

Comme $\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$ et que $\|x_n\|^2 > 0$ (on n'a pas $x_n = 0_E$ puisque $\langle x_1, x_n \rangle < 0$).

Donc $\exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \alpha_k < 0$. Soit un tel k . On pose $y_n = x_n - \alpha_k x_k$.

On prend la famille $G = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, y_n)$ qui contient n vecteurs.

Pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k, n\}, \langle y_n, x_i \rangle = \langle x_n, x_i \rangle - \alpha_k \langle x_k, x_i \rangle < 0$ puisque $\alpha_k < 0$.

Donc on peut utiliser $P(n)$: toute sous-famille de $(n-1)$ vecteurs de G est libre.

Donc $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, y_n)$ est libre. C'est absurde car $x_n = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$, ce qui entraîne

$y_n = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \alpha_{n-1} x_{n-1}$. Donc (x_1, \dots, x_n) est libre et c'est vrai de même pour toute sous-famille de n vecteurs de F .

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Le résultat a donc bien été établi par récurrence.

Séance 4 : Vendredi 5 Juin

Cours : revoir tout le chapitre 11

Exercice 19 (oral CCINP 25, Hippolyte,1) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $M = A^T A - AA^T$.

On suppose $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$.

- 1) Calculer $Tr(M)$.
- 2) Montrer que $M = 0_n$.

Ind :

- 2) Montrer que $M \in S_n(\mathbb{R})$.

- 3) On calcule directement $tr(M) = tr(A^T A) - tr(AA^T) = tr(A^T A) - tr(A^T A) = 0$.

- 4) $M^T = A^T A - AA^T = M$, donc $M \in S_n(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, elle est donc diagonalisable

et semblable à une matrice diagonale D . De plus, $Sp(M) = \{D_{1,1}, \dots, D_{n,n}\} \subset \mathbb{R}_+$ et $Tr(M) = \sum_{j=1}^n D_{j,j} = 0$,

donc $D_{1,1} = \dots = D_{n,n} = 0$ et $D = 0$, donc $M = 0_n$.

Exercice 20 (Oral IMT 25, Léa, Charlotte,2) : soit E un K -espace vectoriel, et $u \in L(E)$, bijectif.

On suppose E de dimension finie. Montrer $\exists Q \in \mathbb{R}[X], u^{-1} = Q(u)$.

Ind : Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

On suppose $\dim(E) = n$. Alors d'après Cayley-Hamilton, γ_u est un polynôme annulateur de u . On a donc

$u^n - Tr(u)u^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u) = 0$, ou encore $\sum_{k=1}^n a_k u^k + a_0 Id_E = 0_{L(E)}$, avec notamment $a_n = 1$ et

$a_0 = (-1)^n \det(u) \neq 0$ (puisque u est bijective).

Donc $u \left(\sum_{k=1}^n a_k u^{k-1} \right) = -a_0 Id_E$, et $u \circ \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} u^k \right) = Id_E$.

On conclut que $u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} u^k$, donc $\boxed{\exists Q \in \mathbb{R}[X], u^{-1} = Q(u)}$

Exercice 21 (Oral Mines 25,3) : soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $\forall X \in F \setminus \{0\}, X^T A X > 0$.

Montrer que A possède au moins k valeurs propres strictement positives (comptées avec leur multiplicité).

Ind : procéder par l'absurde et prendre une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres de a canoniquement associée à A , tels que $\forall i \in \llbracket 1, n-k+1 \rrbracket, a(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \leq 0$. Considérer $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k+1})$.

On procède par l'absurde et on suppose que le nombre de valeurs propres négatives ou nulles est supérieur strictement à $n-k$.

Soit a canoniquement associé à A . On utilise le théorème spectral. a est autoadjoint car $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Quitte à réordonner les vecteurs de base, on peut donc considérer une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres de a , tels que $\forall i \in \llbracket 1, n-k+1 \rrbracket, a(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \leq 0$. On pose $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k+1})$.

Si $x \in G$, $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-k+1} e_{n-k+1}$, alors $\langle a(x), x \rangle = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-k+1}^2 \lambda_{n-k+1} \leq 0$.

D'après Grassmann, $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) \geq k + n - k + 1 - n$.

Donc $\dim(F \cap G) \geq 1$. On prend alors $x \in F \cap G$, non nul. D'une part, $\langle a(x), x \rangle \leq 0$.

D'autre part, $\langle a(x), x \rangle = x^T A x > 0$ car $x \in F \setminus \{0\}$.

$\boxed{\text{C'est absurde, donc } A \text{ possède au moins } k \text{ valeurs propres strictement positives.}}$

Exercice 22 (oral Mines 25, Ambre,4) : pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $N(M) = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.

- 1) Montrer rapidement que N est une norme, et écrire $N(M)$ en fonction des $M_{i,j}$.
- 2) Démontrer que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(M)| \leq \sqrt{n \text{tr}(M^T M)}$.
- 3) Démontrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B)$
- 4) Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|$. Comparer les deux normes N et $\|\cdot\|_1$.
- 5) Calculer $\inf_{S \in S_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j} - S_{i,j}|^2 \right)$.

Ind :

- 1) Faire le lien avec le produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$.
- 2) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 3) Montrer que $W = A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et que $S = B B^T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Utiliser le théorème spectral pour diagonaliser une des deux matrices.
- 4) La question n'est pas très claire.

Peut-être faut-il déterminer $a, b > 0$ tels que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \begin{cases} N(M) \leq a \|M\|_1 \\ \|M\|_1 \leq b N(M) \end{cases}$? Dans ce cas, majorer

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{ pour } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

- 5) Reconnaître une distance et interpréter la question à l'aide d'un projeté orthogonal.

1) On calcule tout d'abord
$$N(M) = \sqrt{\text{tr}(M^T M)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n M_{i,j}^2 \right)}$$

Soient $M, P \in M_n(\mathbb{R})$. Si on note $\langle M, P \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{i,j} P_{i,j} = \text{tr}(M^T P)$, on reconnait le produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$. N est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. Donc N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

2) Démontrons que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(M)| \leq \sqrt{n \text{tr}(M^T M)}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Alors $|\text{tr}(M)| = \left| \langle M, I_n \rangle \right|^2$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\text{tr}(M)| \leq \|M\| \|I_n\|$.

Donc on a bien
$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(M)| \leq \sqrt{n \text{tr}(M^T M)}$$

3) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$N(AB) = \sqrt{\text{tr}(B^T A^T AB)} = \sqrt{\text{tr}(BB^T A^T A)} \text{ avec } \forall U, V \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$$

On pose $S = BB^T$ et $W = A^T A$. Alors $S^T = BB^T = S$ et si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S X = \|B^T X\|^2 \geq 0$.

Donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et de même, $W \in S_n^+(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ les valeurs propres de S , non nécessairement distinctes, et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$ celles de W .

Alors $(N(AB))^2 = \text{tr}(SW)$, et $N(A) = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\text{tr}(W)}$, $N(B) = \sqrt{\text{tr}(S)}$.

Par théorème spectral, comme $S \in S_n(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable, et il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ telles que } S = P D P^{-1}. \text{ Donc } (N(AB))^2 = \text{tr}(P(DP^{-1}W)) = \text{tr}(DP^{-1}WP).$$

Si on pose $L = P^{-1}WP$, L est semblable à W et $\text{tr}(L) = \text{tr}(W)$.

Donc $(N(AB))^2 = \text{tr}(DL) = \sum_{j=1}^n (DL)_{j,j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_{j,j}$.

De plus, $Sp(L) = Sp(W) \subset \mathbb{R}_+$, donc $L \in S_n^+(\mathbb{R})$ et si f est canoniquement associé à L et qu'on note $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^n , alors pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_{i,i} = \langle f(e_i), e_i \rangle \geq 0$.

Donc $(N(AB))^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_{j,j} \leq \text{tr}(S) \sum_{j=1}^n L_{j,j} \leq \text{tr}(S) \text{tr}(L)$.

On a donc $(N(AB))^2 \leq N(A)^2 N(B)^2$ et on a bien
$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B)$$

4) $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes. Donc N et $\|\cdot\|_1$ sont

équivalentes. On va chercher $a, b > 0$ tels que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \begin{cases} N(M) \leq a \|M\|_1 \\ \|M\|_1 \leq b N(M) \end{cases}$

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors avec Cauchy-Schwarz, $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, donc comme il y a n^2 termes dans

$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|$, il vient
$$\|M\|_1 \leq nN(M)$$
 avec égalité si $M = J = (1)$ ($\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, J_{i,j} = 1$).

Avec les mêmes notations, $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i| |a_j|$, donc $\boxed{N(M) \leq \|M\|_1}$, avec égalité pour les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

5) On sait que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $M_n(\mathbb{R})$.

Donc $\inf_{S \in S_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j} - S_{i,j}|^2 \right) = d(M, S_n(\mathbb{R}))^2 = N^2(M - p(M))$, où $p(M)$ désigne le projeté orthogonal de M sur $S_n(\mathbb{R})$.

De plus, $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, et si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$, avec $\frac{M + M^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $\frac{M - M^T}{2} \in A_n(\mathbb{R})$. Enfin, si $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S, A \rangle = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = -\langle A, S \rangle = -\langle S, A \rangle = 0$.

Donc $(S_n(\mathbb{R}))^\perp = A_n(\mathbb{R})$, donc $\frac{M - M^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})^\perp$ et $p(M) = \frac{M + M^T}{2}$.

$$\boxed{\text{Donc } \inf_{S \in S_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j} - S_{i,j}|^2 \right) = N^2\left(\frac{M - M^T}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_{i,j} - M_{j,i})^2}$$

Exercice 23 (Oral Mines 25,5) : soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} M^i$. Etudier la limite de la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Ind : Prendre f canoniquement associée à M et $h_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f^i$. Etudier la convergence de $(h_k(x))$ lorsque

$x \in \ker(\text{Id}_E - f)$ et $x \in \text{Im}(\text{Id}_E - f)$. Montrer $\text{Im}(\text{Id}_E - f) = \ker(\text{Id}_E - f)^\perp$ et trouver la limite de (h_k) , puis celle de $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

On note B la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Soit f canoniquement associée à M . Alors $f \in O(\mathbb{R}^n)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x)\| = \|x\|$, où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne sur $E = \mathbb{R}^n$.

On a donc $A_k = M_B(h_k)$, avec $h_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f^i$.

On a tout d'abord pour $x \in \ker(\text{Id}_E - f)$: $f(x) = x$ donc $h_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} x = x \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$.

Soit par ailleurs $y \in \text{Im}(\text{Id}_E - f)$: $\exists x \in E, x - f(x) = y$. Soit un tel x .

La somme est télescopique et $h_k(y) = \frac{1}{k} (x - f^k(x))$, donc $\|h_k(y)\| = \frac{1}{k} \|x - f^k(x)\| \leq \frac{1}{k} (\|x\| + \|f^k(x)\|)$. Donc

$$\|h_k(y)\| \leq \frac{2\|x\|}{k} \text{ et } h_k(y) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0_E.$$

On prouve alors $\text{Im}(\text{Id}_E - f) \oplus \ker(\text{Id}_E - f) = E$.

Par théorème du rang, on a déjà $\dim(\text{Im}(\text{Id}_E - f)) + \dim(\ker(\text{Id}_E - f)) = \dim(E)$.

De plus, si $x \in \text{Im}(\text{Id}_E - f) \cap \ker(\text{Id}_E - f)$, alors avec ce qui précède, $h_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ et $h_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0_E$.

Donc par unicité de la limite, $\text{Im}(\text{Id}_E - f) \cap \ker(\text{Id}_E - f) = \{0_E\}$.

Donc on a bien $\text{Im}(\text{Id}_E - f) \oplus \ker(\text{Id}_E - f) = E$.

De plus, soient $a \in \text{Im}(Id_E - f)$ et $b \in \text{ker}(Id_E - f)$. Alors il existe $c \in E = \mathbb{R}^n$ tel que $a = c - f(c)$ et $f(b) = b$.
 Donc $\langle a, b \rangle = \langle f(c) - c, b \rangle = \langle f(c), f(b) \rangle - \langle c, b \rangle = 0$ car $f \in O(E)$.

Donc $\text{Im}(Id_E - f) \subset \text{ker}(Id_E - f)^\perp$ et avec les dimensions, $\text{Im}(Id_E - f) = \text{ker}(Id_E - f)^\perp$

Ainsi, si $x \in E$, on l'écrit $x = a + b$, avec $a \in \text{ker}(Id_E - f)^\perp$ et $b \in \text{ker}(Id_E - f)$.

Alors $h_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} b = p(x)$, où p est la projection orthogonale sur $\text{ker}(Id_E - f)$.

Notons $P = M_B(p)$. Pour $X \in \mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient $A_k X = h_k(X) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} p(X) = PX$.

On prend $B = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_k E_j \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P E_j$. Or $A_k E_j$ est la j -ème colonne de A_k et $P E_j$ celle de P .

Donc avec la convergence coefficient par coefficient, $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P$

$(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\text{ker}(Id_E - M)$.

Exercice 24 (Oral Mines 25, Geoffrey,4) : Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

- 1) M est-elle diagonalisable ?
- 2) Déterminer son spectre.
- 3) La suite (M^n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
- 4) Plus généralement, pour $S \in S_p(\mathbb{R})$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, étudier l'existence d'une éventuelle limite de la suite (S^n) .
- 5) De même, si $A \in A_p(\mathbb{R})$, étudier la convergence de (A^n) et donner sa limite lorsqu'elle converge.

Ind :

- 2) Calculer le polynôme caractéristique.
- 3) Diagonaliser M .
- 4) Utiliser le théorème spectral et montrer que si $M = P D P^{-1}$, alors (M^n) converge si et seulement si (D^n) converge.
- 5) Plus difficile. Utiliser A^2 et la suite (A^{2^n}) ? Relier les spectres de A et de A^2 . Montrer que $1 \notin Sp(A^2)$.

1) On utilise le théorème spectral. $M \in S_3(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable sur \mathbb{R} .

$$2) \text{ On calcule } \chi_M = \begin{vmatrix} X-a & 0 & -1+a \\ 0 & X-1+a & -a \\ a-1 & -a & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-a & 0 & X-1 \\ 0 & X-1+a & X-1 \\ a-1 & -a & X-1 \end{vmatrix} C_3 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3.$$

$$\text{Donc } \chi_M = (X-1) \begin{vmatrix} X-a & 0 & 1 \\ a-X & X-1+a & 0 \\ 2a-1-X & -a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix}.$$

$$\text{Donc } \chi_M = (X-1) \begin{vmatrix} a-X & X-1+a \\ 2a-1-X & -a \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - X(a+1-2a+a-1) - a^2 - (2a-1)(a-1)).$$

Donc $\chi_M = (X-1)(X^2 - 3a^2 + 3a - 1)$. On pose $b = P(a) = 3a^2 - 3a + 1$. Comme $\Delta = 9 - 12 < 0$, on peut dire que $\forall a \in \mathbb{R}, b = P(a) > 0$ et $\boxed{Sp(A) = \{0, \sqrt{b}, -\sqrt{b}\}}$, avec $b = 3a^2 - 3a + 1 > 0$

3) Comme M est diagonalisable, soit $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{b} \end{pmatrix}$.

Alors par récurrence, si $n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.

Si $M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} N$, alors $D^n = PM^nP^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} PNP^{-1}$ (à l'aide de la caractérisation séquentielle et de la continuité de $N \mapsto PNP^{-1}$, qui est linéaire en dimension finie).

De même, si (D^n) converge, alors (M^n) converge, donc finalement (M^n) converge si et seulement si (D^n)

converge. Or $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{b})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{b})^n \end{pmatrix}$, donc (D^n) converge si et seulement si $b < 1$.

Or $b = 3a^2 - 3a + 1 < 1 \Leftrightarrow a(a-1) < 0 \Leftrightarrow a \in]0, 1[$. Donc $\boxed{(M^n) \text{ converge si et seulement si } a \in]0, 1[}$.

Dans ce cas, $M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

4) Soit donc $S \in S_p(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, elle est diagonalisable et soit $P \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que

$S = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{pmatrix}$ diagonale. De même qu'au 3), (S^n) converge si et seulement si

(D^n) converge. Ceci équivaut à $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, d_k \in]-1, 1[$.

Donc $\boxed{(S^n) \text{ converge si et seulement si } Sp(S) \subset]-1, 1[}$.

5) Soit maintenant $A \in A_p(\mathbb{R})$. Alors tout d'abord, $(A^2)^T = A^2$ et $A^2 \in S_p(\mathbb{R})$. De plus, A est

trigonalisable sur \mathbb{C} , donc il existe $P \in GL_p(\mathbb{C}), T = \begin{pmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{pmatrix}$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Alors $A^2 = PT^2P^{-1}$ et $Sp(A^2) = \{d_1^2, \dots, d_p^2\} \subset \mathbb{R}$ (par théorème spectral, A^2 est diagonalisable sur \mathbb{R} et toutes ses valeurs propres sont donc réelles).

Supposons que (A^n) converge. Alors $(A^{2n}) = ((A^2)^n)$ converge également, donc d'après 4), il vient

$d_1^2, \dots, d_p^2 \in]-1, 1[$. De plus, si $A \in A_p(\mathbb{R})$ possède une valeur propre réelle λ , on considère

$X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AX = \lambda X$. Alors $X^T AX = \lambda \|X\|^2$, et

$X^T AX = \langle X, AX \rangle = \langle AX, X \rangle = (AX)^T X = -X^T AX$, donc $X^T AX = 0$ et comme $\|X\| \neq 0$, on conclut que $\lambda = 0$.

Si on note pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ $d_k = \alpha_k + i\beta_k$, il vient $d_k^2 = \alpha_k^2 + 2i\alpha_k\beta_k - \beta_k^2 \in \mathbb{R}$, donc $\alpha_k\beta_k = 0$.

De plus, si $\beta_k = 0$, alors $d_k \in \mathbb{R}$, donc $d_k = 0$ et $\alpha_k = 0$. Donc $d_k = i\beta_k$ et $d_k^2 = -\beta_k^2$

Comme $d_1^2, \dots, d_p^2 \in]-1, 1[$, on conclut que $|\beta_k| < 1$.

Donc si (A^n) converge, alors $Sp(A) \subset \{\lambda i, \lambda \in]-1, 1[\}$.

Réciproquement, on suppose que $Sp(A) \subset \{\lambda i, \lambda \in]-1, 1[\}$. Alors $Sp(A^2) \subset]-1, 1[$, donc (A^{2n}) converge

vers la matrice nulle. En effet, il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$, $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_p \end{pmatrix}$ telles que $A^2 = P\Delta P^{-1}$, et

$$A^{2n} = P\Delta^n P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \Delta^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ coefficient par coefficient.}$$

Dès lors, $A^{2n+1} = A^{2n}A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par continuité du produit matriciel).

Donc (A^n) converge vers 0.

Donc si $A \in A_p(\mathbb{R})$, (A^n) converge si et seulement si $Sp(A) \subset \{\lambda i, \lambda \in]-1, 1[\}$ et alors $A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Séance 5 : Jeudi 11 Juin

Exercice 25 (oral IMT 25, Emma,3) : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1$ (*).

Ind : Poser $Z = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$ et déterminer les valeurs possibles de Z . Puis utiliser les racines n -èmes d'un complexe non nul pour trouver $\frac{z+i}{z-i}$ et déduire z . Simplifier l'expression obtenue.

On constate que $z = i$ et $z = -i$ ne sont pas solutions.

Pour $z \notin \{-i, i\}$, on pose $Z = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n \neq 0$

On résout dans \mathbb{C}^* l'équation $Z + \frac{1}{Z} = 1$, que l'on note (E).

Pour $Z \neq 0$, on a Z solution de (E) $\Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 = 0$. Donc $S = \left\{ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$.

Donc z est solution de (*) si et seulement si $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On résout $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = e^{i\frac{\pi}{3n}} e^{2i\frac{k\pi}{n}}$. On note $\theta_k = \frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}$ lorsque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On résout $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = e^{i\theta_k} \Leftrightarrow (z+i) = e^{i\theta_k}(z-i) \Leftrightarrow i(e^{i\theta_k} + 1) = z(e^{i\theta_k} - 1)$.

Or $e^{i\theta_k} = e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$, donc $e^{i\theta_k} \neq 1$ et $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = e^{i\theta_k} \Leftrightarrow z = -i \frac{(e^{i\theta_k} + 1)}{(1 - e^{i\theta_k})}$.

Or $\frac{1+e^{i\theta_k}}{1-e^{i\theta_k}} = \frac{e^{i\frac{\theta_k}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta_k}{2}} + e^{i\frac{\theta_k}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta_k}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta_k}{2}} - e^{i\frac{\theta_k}{2}} \right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}$, donc $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = e^{i\theta_k} \Leftrightarrow z = \cot \operatorname{an} \left(\frac{\pi}{6n} + \frac{k\pi}{n} \right)$.

De même, $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $z = \cot \operatorname{an} \left(-\frac{\pi}{6n} + \frac{k\pi}{n} \right)$.

On obtient donc $S = \left\{ \cot \operatorname{an} \left(\frac{\pi}{6n} + \frac{k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \left\{ \cot \operatorname{an} \left(-\frac{\pi}{6n} + \frac{k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$

Ces solutions sont bien distinctes de i et $-i$.

Exercice 26 (Oral CCINP 25, Capucine, Hippolyte,2) :

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété R :

$\forall P \in E, (\alpha \text{ est racine de } P) \Leftrightarrow (\alpha \text{ est racine de } f(P)).$

- 1) Factoriser dans E $Q(X) = X^2 + 4X + 2$ et $T(X) = 2X^2 + 4X + 2$.
- 2)
 - a) Soit g une application de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}_2[X]$, définie par $g(P) = P(0) + P'(0)X + P''(0)X^2$.
Montrer que g est un endomorphisme et exprimer la matrice de g dans la base canonique.
 - b) g est-elle diagonalisable ? g vérifie-t-elle R ?
- 3) On pose pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X-i}{k-i}$
 - a) Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de E .
 - b) Montrer que pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, L_k est un vecteur propre de f . f est-elle diagonalisable ?
- 4) Soit $S = \sum_{k=0}^n L_k$. Montrer que $f(S)$ est une constante non nulle.

Ind :

- 2b) Utiliser Q et calculer $g(Q)$.
- 4) Démontrer que $S = 1$, puis étudier les racines de $f(S)$.

1) On factorise $Q(X) = X^2 + 4X + 2$. Il vient $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$. Donc les racines de Q sont $-2 - \sqrt{2}$ et $-2 + \sqrt{2}$. Q est unitaire, donc $Q(X) = (X + 2 + \sqrt{2})(X + 2 - \sqrt{2})$

En outre, $T(X) = 2(X^2 + 2X + 1) = 2(X + 1)^2$

2) a) Tout d'abord, g va bien de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}_2[X]$. De plus, soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $P, Q \in \mathbb{C}_2[X]$. Alors $g(P + \lambda Q) = g(P) + \lambda g(Q)$ et g est linéaire : g est un endomorphisme.

On calcule alors $g(1) = 1$, $g(X) = X$ et $g(X^2) = 2X^2$, donc si B est la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$, il vient

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $M_B(g)$ est diagonale, donc g est diagonalisable.

On calcule $g(Q) = 2 + 4X + 2X^2 = T$. On constate avec 1) que les racines de T et de Q sont différentes. Donc g ne vérifie pas R .

- 3) a) Voir cours.
- b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Les racines de L_k sont les éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}$. Il y en a n . Comme f vérifie

la propriété R , les éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}$ sont aussi racines de $f(L_k)$. Or $f(L_k) \in E = \mathbb{C}_n[X]$, donc comme on a trouvé n racines distinctes de $f(L_k)$, il vient l'existence d'un complexe λ tel que :

$$f(L_k) = \lambda \prod_{i=0}^{k-1} (X-i) \prod_{i=k+1}^n (X-i) = \lambda L_k. \text{ Donc } \boxed{L_k \text{ est un vecteur propre de } f}.$$

Dès lors, on a trouvé une base $B = (L_0, \dots, L_n)$ de vecteurs propres de f . Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

4) Soit $S = \sum_{k=0}^n L_k$. On pose $Q = S - 1$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(i) = S(i) - 1 = \sum_{k=0}^n L_k(i) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Donc Q possède $n+1$ racines distinctes et $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, donc $Q = 0$ et $S = \sum_{k=0}^n L_k = 1$.

Or les racines de $S=1$ sont celles de $f(S)$. Donc $f(S)$ n'admet pas de racine complexe et comme $f(S) \in \mathbb{C}_n[X]$, avec d'Alembert-Gauss, $f(S)$ est une constante non nulle. (si $f(S) = 0$, $f(S)$ n'aurait pas les mêmes racines que $S=1$).

Donc $\boxed{f(S) \text{ est une constante non nulle}}$

Exercice 27 (Oral Mines 25, Coarentin,3) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. On suppose que si z est racine de P , alors $\text{Im}(z) > 0$.

On écrit $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$.

- 1) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| = |P(\bar{z})| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- 2) Montrer que toutes les racines de P_1, P_2 sont réelles.

Ind :

- 1) Donner une expression de P en fonction de ses racines. Décomposer les complexes à l'aide de leur partie réelle et de leur partie imaginaire, et utiliser l'hypothèse.
- 2) Utiliser 1) et que si $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, alors $Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère $n = \deg(P)$ et $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - r_k)$. r_1, \dots, r_n sont les racines de P . Pour

$k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $r_k = a_k + ib_k$, avec $b_k > 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On procède par double implication pour montrer $|P(z)| = |P(\bar{z})| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Le sens \Leftarrow est clair.

On montre \Rightarrow . On suppose $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et $|P(z)| = |P(\bar{z})|$.

$$|P(z)| = |\lambda| \prod_{k=1}^n |z - r_k| = |\lambda| \sqrt{\prod_{k=1}^n ((a - a_k)^2 + (b - b_k)^2)} \text{ et } |P(\bar{z})| = |\lambda| \sqrt{\prod_{k=1}^n ((a - a_k)^2 + (b + b_k)^2)}.$$

Or si $b > 0$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (b + b_k)^2 > (b - b_k)^2$ (car $b_k > 0$). Donc $|P(z)| > |P(\bar{z})|$, ce qui est absurde.

De même, si $b < 0$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (b + b_k)^2 < (b - b_k)^2$. Donc $|P(z)| < |P(\bar{z})|$, ce qui est absurde.

Donc $b = 0$ et $z \in \mathbb{R}$. On a donc bien $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| = |P(\bar{z})| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_1 . Comme $P_1 \in \mathbb{R}[X]$, on sait \bar{z} est aussi racine de P_1 .

Il vient $P(z) = P_1(z) + iP_2(z) = iP_2(z)$, et $P(\bar{z}) = P_1(\bar{z}) + iP_2(\bar{z}) = iP_2(\bar{z})$.

On écrit $P_2 = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Donc $P_2(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Donc $P_2(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{P_2(z)}$

Donc $|P(z)| = |P_2(z)|$, et $|P(\bar{z})| = |P_2(\bar{z})| = |P(z)|$.

Donc avec 1), on conclut que $z \in \mathbb{R}$. On procède de même si z est racine de P_2 .

Donc toutes les racines de P_1, P_2 sont réelles.

Exercice 28 (Oral Mines 25, Côte, 3) : Soit n un entier pair. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Montrer

que $\forall t \in \mathbb{R}, \det(A+tJ) = \det(A)$.

Ind : poser $P(t) = \det(A+tJ)$ et montrer qu'il s'agit d'un polynôme de degré $p \leq 1$. Calculer $\det((A+tJ)^T)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $P(t) = \det(A+tJ) = \begin{vmatrix} t+A_{1,1} & t+A_{1,2} & \cdots & t+A_{1,n} \\ t+A_{2,1} & t+A_{2,2} & \cdots & t+A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t+A_{n,1} & t+A_{n,2} & \cdots & t+A_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+A_{1,1} & A_{1,2}-A_{1,1} & \cdots & A_{1,n}-A_{1,1} \\ t+A_{2,1} & A_{2,2}-A_{2,1} & \cdots & A_{2,n}-A_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t+A_{n,1} & A_{n,2}-A_{n,1} & \cdots & A_{n,n}-A_{n,1} \end{vmatrix}$, en

soustrayant la première colonne à toutes les autres.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient $P \in \mathbb{R}_1[X]$.

Donc $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, P(t) = at + b$. On a alors $b = P(0) = \det(A)$.

Montrons que $a = 0$.

Comme $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), A^T = -A$. On calcule pour $t \in \mathbb{R} : \det((A+tJ)^T) = \det(-A+tJ) = (-1)^n \det(A-tJ)$.

Or $\det((A+tJ)^T) = \det(A+tJ) = P(t)$, donc $P(t) = (-1)^n P(-t)$.

Comme n est pair, $P(t) = P(-t)$, donc $at + \det(A) = -at + \det(A)$, et avec $t = 1, a = 0$.

On a donc bien $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \det(A+tJ) = \det(A)$.

Exercice 29 (oral Mines 25, Niels, 4) : Soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P)(X) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

On note pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X] : \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ et on admet qu'il s'agit d'un produit scalaire.

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme autoadjoint.
- 2) Montrer que ϕ est diagonalisable et trouver $Sp(\phi)$.
- 3) Montrer l'unicité et l'existence d'une famille orthonormée (P_0, \dots, P_n) telle que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (\deg(P_k) = k \text{ et } \langle P_k, X^k \rangle > 0)$.
- 4) Soit $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que (Q_0, \dots, Q_n) vérifie les conditions de 3). Que peut-on en déduire ?

Ind :

- 1) Calculer par exemple $\langle \phi(P), Q \rangle - \langle P, \phi(Q) \rangle$.
- 2) Utiliser la matrice de ϕ dans une base.
- 3) Montrer l'existence à l'aide de Gram-Schmidt. Pour l'unicité, supposer qu'il existe une autre famille

(S_0, \dots, S_n) qui convient et montrer que S_k et P_k sont dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$,

4) Exploiter un changement de variable.

1) On prouve tout d'abord que ϕ est un endomorphisme : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $\phi(\alpha P + Q) = (X^2 - 1)(\alpha P'' + Q'') + 2X(\alpha P' + Q') = \alpha \phi(P) + \phi(Q)$, donc ϕ est linéaire.

De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((X^2 - 1)P'') \leq n$ et $\deg(2X P') \leq n$ donc $\deg(\phi(P)) \leq n$ et $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons qu'il est autoadjoint :

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\text{On calcule } \langle \phi(P), Q \rangle - \langle P, \phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)Q''(t) + 2tQ'(t))P(t)dt$$

$$\text{Donc } \langle \phi(P), Q \rangle - \langle P, \phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)(P''(t)Q(t) - Q''(t)P(t)) + 2t(P'(t)Q(t) - Q'(t)P(t)))dt$$

Si on pose $U(t) = P'(t)Q(t) - Q'(t)P(t)$, il vient :

$$U'(t) = P''(t)Q(t) + Q'(t)P'(t) - Q''(t)P(t) - Q'(t)P'(t) = P''(t)Q(t) - Q''(t)P(t)$$

$$\text{Donc } \langle \phi(P), Q \rangle - \langle P, \phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 (A(t)U'(t) + A'(t)U(t))dt = [A(t)U(t)]_{-1}^1 = 0, \text{ car } A(t) = t^2 - 1 \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

On a donc bien $\langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$. Donc ϕ est un endomorphisme autoadjoint.

2) Tout d'abord, par théorème spectral, comme ϕ est un endomorphisme autoadjoint, ϕ est diagonalisable.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2X P'$.

On a donc $\phi(1) = 0$ et $\phi(X) = 2X$ et pour $k \geq 2$, on a

$$\phi(X^k) = k(k-1)(X^2 - 1)X^{k-2} + 2kX X^{k-1} = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

On peut donc écrire la matrice de ϕ dans la base $B = (1, X, \dots, X^n)$:

$$M = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2*3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2*3 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3*4 & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & -n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire, donc les valeurs propres sont sur la diagonale. Donc $Sp(\phi) = \{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

3) On prouve d'abord l'existence avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : on prend $B = (1, X, \dots, X^n)$ et on l'orthonormalise. Soit donc une famille $C = (Q_0, \dots, Q_n)$, orthonormée, telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_k \in Vect(1, X, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X]$. On a $\deg(Q_0) = 1$.

De plus, pour $k \geq 1$, si $\deg(Q_k) < k$, (Q_0, \dots, Q_k) est une famille de $k+1$ éléments dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc elle est liée, ce qui est absurde.

On a donc $\deg(Q_k) = k$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. De plus, si $\langle Q_k, X^k \rangle > 0$, on pose $P_k = Q_k$, et si $\langle Q_k, X^k \rangle \leq 0$ on pose $P_k = -Q_k$ et il vient $\langle P_k, X^k \rangle \geq 0$.

Si par l'absurde $\langle P_k, X^k \rangle = 0$, alors $\langle Q_k, X^k \rangle = 0$. Or $Q_k = \lambda X^k + R$, avec $\lambda \neq 0$ et $R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc $R \in \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_{k-1})$ et il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$, $R = \alpha_0 Q_0 + \dots + \alpha_{k-1} Q_{k-1}$, donc $\langle Q_k, R \rangle = 0$

Donc $0 = \langle Q_k, R \rangle = \langle Q_k, Q_k - \lambda X^k \rangle = \|Q_k\|^2$. C'est absurde car $Q_k \neq 0$.

Donc $\langle P_k, X^k \rangle > 0$ et la famille (P_0, \dots, P_k) convient.

On prouve l'unicité. On suppose l'existence d'une autre famille orthonormée (S_0, \dots, S_n) telle que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(\deg(S_k) = k \text{ et } \langle S_k, X^k \rangle > 0)$.

Pour $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S_k \in \mathbb{R}_k[X]$. De plus, si $k \geq 1$, (S_0, \dots, S_{k-1}) est une famille orthonormée, donc libre et comme elle possède $k = \dim(\mathbb{R}_{k-1}[X])$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

On sait que $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\langle S_k, S_i \rangle = 0$.

Si on note F_k l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$, on peut dire que $S_k \in F_k$ et de même que $P_k \in F_k$.

Or $\dim(F_k) = \dim(\mathbb{R}_k[X]) - \dim(\mathbb{R}_{k-1}[X]) = 1$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $S_k = \lambda P_k$. Cela reste vrai si $k = 0$.

Mais $\|S_k\| = \|P_k\| = 1$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. Enfin, $\langle S_k, X^k \rangle = \lambda \langle P_k, X^k \rangle > 0$, donc $\lambda = 1$ et $S_k = P_k$.

Il y a donc bien unicité de la famille convenant.

4) Soit $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X)$. Montrons que (Q_0, \dots, Q_n) vérifie les conditions de 3).

Soient $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. $\langle Q_i, Q_j \rangle = (-1)^{i+j} \int_{-1}^1 P_i(-t) P_j(-t) dt$.

On fait le changement de variable $u = -t$: $\langle Q_i, Q_j \rangle = (-1)^{i+j} \int_{-1}^1 P_i(u) P_j(u) dt = \langle P_i, P_j \rangle$.

Donc (Q_0, \dots, Q_n) est orthonormée, et pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(Q_k) = k$.

Enfin, $\langle Q_k, X^k \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 P_k(-t) t^k dt = (-1)^{2k} \int_{-1}^1 P_k(t) t^k dt$ avec le même changement de variable.

Donc $\langle Q_k, X^k \rangle > 0$ et (Q_0, \dots, Q_n) vérifie les conditions de 3).

Par unicité, $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X) = P_k(X)$. P_k a la même parité que k .

Exercice 30 (oral Mines 21,25, Centrale 24, Nassim,4) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?

Ind :

Supposer B diagonalisable. Montrer en utilisant b canoniquement associé à B que A est alors diagonalisable et que B est semblable à $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec D diagonale. Utiliser des plans stables par b et la restriction de b à ces plans pour conclure.

Supposons que B est diagonalisable. Soit alors b canoniquement associé à B . On note $C = (e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de \mathbb{R}^{2n} . On constate que $V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est stable par b .

Comme b est diagonalisable, l'endomorphisme induit b_V l'est aussi et donc A est diagonalisable.

Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.

On constate alors que $B = \begin{pmatrix} P D P^{-1} & P D P^{-1} \\ 0 & P D P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$, et $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, donc B et $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ sont semblables, et comme B est

diagonalisable, $N = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ l'est aussi.

$$\text{On note } D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) & d_1 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & d_n & (0) & & d_n \\ 0 & & & d_1 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & (0) & & d_n \end{pmatrix}.$$

Notons $C' = (u_1, \dots, u_{2n})$ une base de \mathbb{R}^{2n} telle que $M_{C'}(b) = N$.

Alors $W = \text{Vect}(u_1, u_{n+1})$ est un plan stable par b et comme b est diagonalisable, l'endomorphisme induit

b_W l'est aussi. Donc sa matrice dans (u_1, u_{n+1}) l'est aussi. Or elle est égale à $\begin{pmatrix} d_1 & d_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas

diagonalisable si $d_1 \neq 0$ (sinon, elle serait égale à $d_1 I_2$, ce qui n'est pas le cas).

Donc $d_1 = 0$ et de même, $d_2 = \dots = d_n = 0$, donc $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, alors B est diagonalisable.

Donc B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

En Plus :

Exercice 31 (oral ESPCI 25, Rémy,5) : Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

- 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists B \in M_{k,n}(\mathbb{R}), A = B^T B$.
- 2) Soit $L : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $A \in M_{nk}(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \dots A_{1,k} \\ \dots \\ A_{k,1} \dots A_{k,k} \end{pmatrix}$, avec $\forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\hat{L}(A) = \begin{pmatrix} L(A_{1,1}) \dots L(A_{1,k}) \\ \dots \\ L(A_{k,1}) \dots L(A_{k,k}) \end{pmatrix} \in M_{nk}(\mathbb{R}). \text{ On dit que}$$

L est complètement positive (C.P) si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in S_{nk}^+(\mathbb{R}), \hat{L}(A) \in S_{nk}^+(\mathbb{R})$.

Montrer que $L : M \mapsto M^T$ n'est pas C.P

- 3) Si L est C.P, alors montrer que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), (L(M))^T = L(M^T)$.

Ind :

- 1) Par double implication, en diagonalisant dans le sens direct.

- 2) Prendre d'abord $n = k = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis généraliser à n quelconque.

- 3) Prendre $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ M & I_n \end{pmatrix}$ et utiliser $B^T B \in S_{2n}^+(\mathbb{R})$.

- 1) On procède par double implication.

\Rightarrow Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. On utilise le théorème spectral et on considère $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$

telles que $A = P D P^T$, avec $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_k \geq 0$. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$ et il vient $A = P \Delta (P \Delta)^T$.

Donc on a bien $A = B^T B$, avec $B = (P \Delta)^T$ et $k = n$.

\Leftarrow Tout d'abord, comme $A = B^T B$, il vient $A^T = A$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. De plus, on calcule

$$X^T A X = X^T B^T B X = \|B X\|^2 \geq 0. \text{ Donc on a bien } A \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

Ceci prouve bien $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists B \in M_{k,n}(\mathbb{R}), A = B^T B$.

- 2) On cherche un contre-exemple. Lorsque $n = 2$: on prend $k = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\gamma_A = X^2((X-1)^2 - 1) = X^3(X-2)$. Donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $A \in S_4(\mathbb{R})$, donc $A \in S_4^+(\mathbb{R})$.

Or $\hat{L}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et si c est canoniquement associé à cette matrice, et que $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est

la base canonique de \mathbb{R}^4 , alors $c(e_1 + e_4) = -(e_1 + e_4)$, donc $-1 \in Sp(\hat{L}(A))$ et $\hat{L}(A) \notin S_4^+(\mathbb{R})$.

Donc $M \mapsto M^T$ n'est pas C.P.

On généralise lorsque n est quelconque, toujours avec $k=2$:

on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & (0) & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ & (0) & & (0) \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in S_{2n}(\mathbb{R})$ et $\hat{L}(A) = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & (0) & & (0) \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & (0) & & (0) \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix} \notin S_{2n}(\mathbb{R})$.

Donc $M \mapsto M^T$ n'est pas C.P.

3) On suppose que L est C.P. Soit alors $M \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $k=2$.

On cherche à exploiter ce qui précède. On prend $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ M & I_n \end{pmatrix}$. Alors $B^T = \begin{pmatrix} I_n & M^T \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Avec 1), on sait que $B^T B \in S_{2n}^+(\mathbb{R})$. On calcule et on trouve $A = B^T B = \begin{pmatrix} I_n + M^T M & M \\ M^T & I_n \end{pmatrix} \in S_{2n}^+(\mathbb{R})$.

Alors comme L est complètement positive, $\hat{L}(A) \in S_{2n}^+(\mathbb{R})$. Or $\hat{L}(A) = \begin{pmatrix} L(I_n + M^T M) & L(M) \\ L(M^T) & I_n \end{pmatrix}$. Cette

matrice étant symétrique, on conclut que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), (L(M))^T = L(M^T)$

L'important ici est d'avoir A de la forme $A = \begin{pmatrix} U & M \\ M^T & V \end{pmatrix} \in S_{2n}^+(\mathbb{R})$ (les valeurs de U, V n'ont pas

d'importance, mais A doit rester dans $S_{2n}^+(\mathbb{R})$, ce qui pousse à utiliser 1)).

Exercice 32 (Oral ENS 25, Louiza, 5) : Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

Pour toutes matrices A et B dans $M_d(\mathbb{R})$ on définit $[A, B] = AB - BA$.

Pour $A, B \in M_d(\mathbb{R})$, on considère la suite de matrices $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+1} = [A, F_n].$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $c_{0,n}, c_{1,n}, \dots, c_{n,n}$ tels que $F_n = \sum_{i=0}^n c_{i,n} A^{n-i} B A^i$.

2) Soit $A \in S_d(\mathbb{R})$. Condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers la matrice nulle, et ce quelle que soit la matrice B à partir de laquelle la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été construite.

1) Calculer les premiers termes et trouver une propriété à prouver par récurrence. Il est pratique de trouver les coefficients pour la suite.

2) Procéder par analyse et synthèse. Diagonaliser A et se ramener à $M_n = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i D^{n-i} C D^i \right)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$, et ce quelle que soit la matrice C . Appliquer ce résultat pour les éléments de la base canonique.

1) On calcule les premiers termes : $F_1 = [A, B] = AB - BA$, puis $F_2 = AF_1 - F_1A = A^2B - 2ABA + BA^2$ et $F_3 = AF_2 - F_2A = A(A^2B - 2ABA + BA^2) - (A^2B - 2ABA + BA^2)A = A^3B - 3A^2BA + 3ABA^2 - BA^3$

On montre alors par récurrence que $F_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i A^{n-i} B A^i$.

C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i A^{n-i} B A^i$. Alors $F_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i A^{n+1-i} B A^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i A^{n-i} B A^{i+1}$.

En changeant d'indice dans la seconde somme : $F_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i A^{n+1-i} B A^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i-1} (-1)^i A^{n+1-i} B A^i$.

Donc avec le triangle de Pascal, $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i A^{n+1-i} B A^i$.

L'énoncé ne demande pas de déterminer les coefficients, mais cela m'a semblé utile pour la suite.

2) Soit $A \in S_d(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, soit $P \in O_d(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix}$ diagonale telles que

$A = P D P^{-1}$. On procède par analyse et synthèse et on suppose que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers la matrice nulle, et ce quelle que soit la matrice B à partir de laquelle la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été construite.

Il vient $F_n = P \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i D^{n-i} P^{-1} B P D^i \right) P^{-1}$. On note $C = P^{-1} B P$ (quand B décrit $M_d(\mathbb{R})$), C aussi,

donc la propriété doit être vraie pour toute matrice $C \in M_d(\mathbb{R})$, et $M_n = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i D^{n-i} C D^i \right)$.

Comme $F_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $M_n = P^{-1} F_n P \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $N \mapsto P^{-1} N P$ est linéaire en dimension finie, donc continue).

On applique cela pour les éléments de la base canonique de $M_d(\mathbb{R})$.

Pour $C = E_{i,j}$: $M_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k D^{n-k} E_{i,j} D^k$.

Or pour $p, q \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $(E_{i,j} D^k)_{p,q} = \sum_{l=1}^n (E_{i,j})_{p,l} (D^k)_{l,q} = \lambda_q^k (E_{i,j})_{p,q}$, donc $E_{i,j} D^k = \lambda_q^k E_{i,j}$.

Puis $(D^{n-k} E_{i,j})_{p,q} = \sum_{l=1}^n (D^{n-k})_{p,l} (E_{i,j})_{l,q} = \lambda_p^{n-k} (E_{i,j})_{p,q}$ et $D^{n-k} E_{i,j} = \lambda_p^{n-k} E_{i,j}$.

Donc $M_n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \lambda_p^{n-k} \lambda_q^k \right) E_{i,j} = (\lambda_q - \lambda_p)^n E_{i,j}$.

Or $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc avec la convergence coefficient par coefficient, $(\lambda_q - \lambda_p)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|\lambda_q - \lambda_p| < 1$.

Réciproquement (synthèse), si $\forall p, q \in \llbracket 1, d \rrbracket, |\lambda_q - \lambda_p| < 1$, alors avec les calculs précédents, $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

Comme c'est vrai pour toute matrice élémentaire $E_{i,j}$ et que les $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ forment une base de $M_d(\mathbb{R})$,

c'est vrai pour toute matrice C par combinaison linéaire (finie).

donc $F_n = P M_n P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour toute matrice B (par continuité de $N \mapsto P N P^{-1}$).

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers la matrice nulle quelle que soit la matrice $B \Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in Sp(A), |\lambda - \mu| < 1$.

Exercice 33 (oral ESPCI 25, Antonin,5) :

Soient n droites vectorielles dans \mathbb{R}^d telles que chaque paire de droites soit séparée par un même angle $\theta \neq 0[\pi]$. Montrer que $n \leq \binom{d+1}{2}$

Ind : Considérer un vecteur unitaire u_k de chaque droite D_k . Justifier $\langle u_i, u_j \rangle^2 = \cos^2(\theta)$ pour $i \neq j$, puis considérer la projection orthogonale p_i sur $D_i = Vect(u_i)$ et montrer que (p_1, \dots, p_n) est libre.

Notons D_1, \dots, D_n ces droites, deux à deux distinctes, avec pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un vecteur unitaire u_k de la droite D_k . Pour $i \neq j$, $u_i \neq u_j$ et $u_i \neq -u_j$ (sinon $D_i = Vect(u_i) = Vect(-u_i) = D_j$).

Donc (u_i, u_j) libre (si on avait $u_i = \lambda u_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on aurait $\lambda \in \{-1, 1\}$ car u_i, u_j unitaires).

On se place dans un espace euclidien $E = Vect(u_i, u_j)$. On sait que l'angle orienté entre u_i et u_j est égal à θ ou que l'angle orienté entre u_i et $-u_j$ est égal à θ .

Lorsque l'angle orienté entre u_i et u_j est égal à θ , on note r l'unique rotation vectorielle de E telle que

$$r(u_i) = u_j, \text{ avec dans une base orthonormée } B = (u_i, w) \text{ de } E \quad M_B(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Alors $u_j = (\cos \theta)u_i + (\sin \theta)w$. On a alors $\langle u_i, u_j \rangle = \cos(\theta)$ pour $i \neq j$.

Lorsque l'angle orienté entre u_i et $-u_j$ est égal à θ , il vient $\langle u_i, -u_j \rangle = \cos(\theta)$, donc $\langle u_i, u_j \rangle = -\cos(\theta)$.

Dans tous les cas, $\langle u_i, u_j \rangle^2 = \cos^2(\theta) = a \in [0, 1[$.

On remarque $\binom{d+1}{2} = \frac{d(d+1)}{2} = \dim(S_d(\mathbb{R})) = \dim(S(\mathbb{R}^d))$.

Notons pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ p_k la projection orthogonale sur $Vect(e_k)$. On sait que $p_k \in S(\mathbb{R}^d)$

On veut montrer que (p_1, \dots, p_n) est libre. Ainsi, $n \leq \binom{d+1}{2}$.

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n = 0$.

Alors pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $w = (\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n)(u_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle u_k, u_i \rangle u_i = 0$, donc $\langle w, u_k \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle u_k, u_i \rangle^2 = 0$.

Ceci s'écrit $M \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, avec $M = \begin{pmatrix} 1 & a & & a \\ a & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ a & & a & 1 \end{pmatrix}$. Or $M - (1-a)I_n = M = \begin{pmatrix} a & a & & a \\ a & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ a & & a & a \end{pmatrix}$, donc

$rg(M - (1-a)I_n) \geq n-1$ et $\dim(E_{1-a}(M)) \geq n-1$ et la multiplicité de $(1-a)$ comme valeur propre de M est supérieure ou égale à $n-1$.

De plus, si on note x la dernière valeur propre, $Tr(M) = n = x + (n-1)(1-a)$, donc $x = 1 + a(n-1) \geq 1 > 0$

Donc comme $1-a \neq 0$, $0 \notin Sp(M)$ et M est inversible, donc comme $M \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Donc (p_1, \dots, p_n) est libre et on conclut donc bien $n \leq \binom{d+1}{2}$

Exercice 34 (Oral X 25,4) : Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$. Que peut-on dire de A ?

Ind : montre d'abord que $\det(A) = 0$, puis montrer que chaque colonne de A est nulle en construisant une matrice M telle que $A + M$ est inversible, mais pas M .

On suppose $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$. En particulier, pour $M = A$, $\det(2A) = 2 \det(A)$, donc $2^n \det(A) = 2 \det(A)$ et $\det(A) = 0$.

On déduit que $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(M)$.

Notons $(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ les colonnes de A . Si $C_1 \neq 0$, on complète (C_1) en une base $(C_1, D_2, D_3, \dots, D_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$. On note M la matrice dont les colonnes sont $(0, -C_2 + D_2, -C_3 + D_3, \dots, -C_n + D_n)$.

Les colonnes de $A + M$ sont alors $(C_1, D_2, D_3, \dots, D_n)$. On a donc $\det(A + M) \neq 0$ (puisque la famille de ses colonnes est libre).

En outre, comme la première colonne de M est nulle, $\det(M) = 0$. C'est absurde, donc $C_1 = 0$.

On procède de manière analogue pour les autres colonnes de A et on conclut que $A = 0$.

La matrice nulle vérifie bien $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

Donc $\boxed{(\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)) \Leftrightarrow A = (0)}$

Exercice 35 (oral X 25) : Soit $n \geq 2$. Soit S un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, qui contient I_n , est stable par produit ($M, N \in S \Rightarrow MN \in S$) et vérifie $\forall A, B \in S, AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$.

Dire tout ce qui est possible sur S . Vérifier si certains ensembles que vous connaissez vérifient les conditions posées.

Ind : la question est très ouverte et on peut donc essayer de nombreuses choses sur un tel ensemble S .

Vérifier que $S = \text{Vect}(I_n)$ est solution.

Considérer $U \in S$ telle que $U \notin \text{Vect}(I_n)$. Etudier les polynômes annulateurs de U et montrer que U est inversible et n'a pas de valeur propre réelle.

Déterminer S lorsque n est impair et lorsque n est pair, trouver un autre ensemble que $S = \text{Vect}(I_n)$ qui vérifie les conditions.

Tout d'abord, on peut remarquer que si S vérifie les conditions posées, alors $\boxed{S \subset \text{Vect}(I_n)}$.

De plus, $\boxed{S = \text{Vect}(I_n)}$ est solution et vérifie aisément toutes les conditions.

On peut remarquer différentes choses :

- Soit $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n . C'est bien un espace vectoriel stable par produit, mais on a

$$\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc il ne vérifie pas les conditions.}$$

- $S_n(\mathbb{R})$ ne fonctionne pas non plus, car $D_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$
- $S = GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas non plus solution car ce n'est pas un espace vectoriel.
- Si S vérifie les conditions posées et que M est nilpotente, non nulle et élément de S , alors on prend $p = \min(\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = 0\}) \geq 1$. Il vient $M.M^{p-1} = 0$, avec $M^{p-1} \in S$ puisque S est stable par produit.

Pourtant, on n'a pas $M^{p-1} = 0$, ni $M = 0$ donc c'est absurde :

$\boxed{\text{la seule matrice nilpotente élément de } S \text{ est la matrice nulle.}}$

- Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $U \in S$. Alors comme S est stable par produit et par combinaisons

$$\text{linéaires, } P(U) = \sum_{k=0}^p a_k U^k \in S \quad (1).$$

- Soit $U \in S$ telle que $U \notin Vect(I_n)$. On considère $p = \min(\{k \in \mathbb{N}^*, (I_n, U, U^2, \dots, U^k) \text{ est liée}\})$.

On sait que p existe car $(I_n, U, U^2, \dots, U^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ éléments de $M_n(\mathbb{R})$, avec $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$, donc elle est liée.

De plus, (I_n, U) est libre, donc $p \geq 2$.

$(I_n, U, U^2, \dots, U^{p-1})$ est libre et $(I_n, U, U^2, \dots, U^{p-1}, U^p)$ est liée, donc on peut écrire $U^p = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k U^k$.

Dès lors, si $\alpha_0 = 0$, $0 = U^p - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k U^k = U \left(U^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{k+1} U^k \right)$.

Or $U \notin Vect(I_n)$, donc $U \neq 0$ et avec (1), $U^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{k+1} U^k \in S$.

Donc avec $\forall A, B \in S, AB = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$, on conclut que $U^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{k+1} U^k$, ce qui est absurde puisque $(I_n, U, U^2, \dots, U^{p-1})$ est libre.

Donc $\alpha_0 \neq 0$ et $U \left(\frac{1}{\alpha_0} \left(U^{p-1} - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k U^{k-1} \right) \right) = I_n$ et U est inversible.

Donc toute matrice non nulle de S est inversible.

Dès lors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, par structure d'espace vectoriel, $\lambda I_n + U \in S$. Or $U \notin Vect(I_n)$, donc $\lambda I_n + U \neq 0$ et $\lambda I_n + U$ est inversible. Donc λ n'est pas valeur propre de S .

Ainsi, **si $U \notin Vect(I_n)$, et que $U \in S$, alors U n'a pas de valeur propre réelle.**

- Si n est impair, toute matrice possède forcément une valeur propre réelle (le nombre de valeurs propres non réelles, comptées avec leur multiplicité, est pair).

Donc **si n est impair, alors $S = Vect(I_n)$ est le seul ensemble qui vérifie les conditions.**

- Si n est pair, on cherche des matrices sans valeur propre réelle et on peut prendre $n = 2$ et

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $S = Vect(I_2, U) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. On vérifie les conditions.

- S est un espace vectoriel qui contient I_2 et est stable par produit (comme $U^2 = -I_2$, il vient pour $a, b, a', b' \in \mathbb{R} : (aU + bI_2)(a'U + b'I_2) = (bb' - aa')I_2 + (ab' + a'b)U \in S$).

- Soient $M, N \in S$. On suppose que $MN = 0$. Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$. Il vient $\det(M) = a^2 + b^2$, donc si $M \neq 0$, alors M est inversible et $N = 0$.

On a donc bien $MN = 0 \Rightarrow (M = 0 \text{ ou } N = 0)$.

Donc **$S = Vect(I_2, U) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta \\ -\lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{pmatrix}, \lambda, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ convient (on peut le**

montrer par double inclusion ; ce sont les multiples des matrices de rotations).

Donc si $n = 2$, $S = Vect(I_2)$ n'est pas la seule solution.

On généralise et on prend pour $n = 2p : U = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix}$. Alors $U^2 = -I_{2p}$.

On pose $S = Vect(I_{2p}, U) = \left\{ \begin{pmatrix} aI_p & bI_p \\ -bI_p & aI_p \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Par produit par blocs, S est un espace vectoriel qui contient I_{2p} et est stable par produit.

Soient $M, N \in S$. On suppose que $MN = 0$. Si $M = \begin{pmatrix} aI_p & bI_p \\ -bI_p & aI_p \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On prouve qu'elle est inversible si $M \neq 0$: si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $M \cdot \begin{pmatrix} aI_p & -bI_p \\ bI_p & aI_p \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)I_{2p}$, donc M est inversible. Donc on a donc bien $MN = 0 \Rightarrow (M = 0 \text{ ou } N = 0)$.

$S = Vect(I_{2p}, U) = \left\{ \begin{pmatrix} aI_p & bI_p \\ -bI_p & aI_p \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ convient.

Si n est pair, $S = Vect(I_n)$ n'est pas la seule solution.

Exercice 36 (oral Mines 25, Tom, 3) : soit $(E, |)$ un espace préhilbertien réel. Soit $f \in GL(E)$. On suppose que f conserve l'orthogonalité (c'est-à-dire telle que $\forall x, y \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$).

- 1) Soient u et v des vecteurs unitaires appartenant à E . Calculer la valeur de $(u+v|u-v)$.
- 2) Montrer $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$.
- 3) Montrer $\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha^2 (x|y)$.

Ind :

- 2) Pour $x, y \in E$, non nuls, poser $u = \frac{x}{\|x\|}$ et $v = \frac{y}{\|y\|}$.
- 3) Développer $\|f(x) + f(y)\|^2$.

- 1) Soient u et v des vecteurs unitaires appartenant à E . $(u+v|u-v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$
- 2) Soit $x \neq 0_E$. Alors on pose $\alpha = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Comme $f \in GL(E)$, on peut dire que $f(x) \neq 0_E$ et $\alpha > 0$.
Soit alors $y \in E$. Si $y = 0_E$, on a bien $\|f(y)\| = \alpha \|y\|$.

Si $y \neq 0_E$, on pose $u = \frac{x}{\|x\|}$ et $v = \frac{y}{\|y\|}$. Avec 1), $(u+v|u-v) = 0$.

Donc $(f(u+v)|f(u-v)) = 0$. Donc $\left(\frac{f(x)}{\|x\|} + \frac{f(y)}{\|y\|} \mid \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{f(y)}{\|y\|} \right) = 0$

Donc $\frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|f(y)\|^2}{\|y\|^2} = \alpha^2$ et $\|f(y)\| = \alpha \|y\|$, donc $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$

- 3) Soit $\alpha > 0$ obtenu à la question précédente. Soient $(x, y) \in E^2$. Alors $\|f(x+y)\| = \alpha \|x+y\|$, donc $\|f(x) + f(y)\|^2 = \alpha^2 \|x+y\|^2$, et $\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2(f(x)|f(y)) = \alpha^2 \|x\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2 + 2\alpha^2 (x|y)$.

On a donc bien $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha^2 (x|y)$

Exercice 37 (Oral Mines 25, Igor, 3) : Déterminer, si elle existe, $\inf_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Ind : Reconnaître une distance associée à un produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Chercher le projeté orthogonal de $t \mapsto t^4$ sur l'ensemble F des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur $[-1,1]$.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans \mathbb{R} . On pose pour $f, g \in E$: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

Montrons que \langle, \rangle est un produit scalaire.

Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ et \langle, \rangle est symétrique.

De plus, $\langle f + \lambda g, h \rangle = \int_{-1}^1 (f + \lambda g)(t)h(t)dt = \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle$ (toutes les intégrales convergent donc on peut séparer en deux), donc par symétrie, \langle, \rangle est bilinéaire.

En outre, $\langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 f^2(t)dt \geq 0$. Enfin, si $\langle f, f \rangle = 0$, alors la fonction $t \mapsto f^2(t)$ est continue et positive sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle. Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$ et $f = 0$ et \langle, \rangle est défini positif.

Donc \langle, \rangle est un produit scalaire sur E .

On considère l'ensemble F des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 sur $[-1,1]$.

On pose, pour $t \in [-1,1]$, $u(t) = t^4$. Alors on cherche $I = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Il vient $I = \inf_{f \in F} \|u - f\|^2$. On sait que cette borne inférieure existe est égale à la distance de u à F .

On a donc $I = \|u - p_F(u)\|^2$. On considère $h = p_F(u)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in [-1,1], h(t) = at^2 + bt + c$. Alors $h = p_F(u) \in F$ et $u - h = u - p_F(u) \in F^\perp$.

$$\text{On sait alors que } \begin{cases} \langle u - h, t \mapsto 1 \rangle = 0 \\ \langle u - h, t \mapsto t \rangle = 0 \\ \langle u - h, t \mapsto t^2 \rangle = 0 \end{cases} \text{ . Donc } \begin{cases} \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c) dt = 0 \\ \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)t dt = 0 \\ \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)t^2 dt = 0 \end{cases}$$

$$\text{De plus, par parité, si } k \text{ est pair, } \int_{-1}^1 t^k dt = \frac{2}{k+1} \text{ et si } k \text{ est impair, } \int_{-1}^1 t^k dt = 0 \text{ . Donc } \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{2a}{3} - 2c = 0 \\ b = 0 \\ \frac{2}{7} - \frac{2a}{5} - \frac{2c}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{On trouve } \begin{cases} c = \frac{1}{5} - \frac{a}{3} \\ b = 0 \\ \frac{1}{7} - \frac{a}{5} - \frac{1}{15} + \frac{a}{9} = 0 \end{cases} \text{ , donc } \begin{cases} c = \frac{1}{5} - \frac{a}{3} \\ b = 0 \\ a \left(\frac{4}{45} \right) = \frac{8}{105} \end{cases} \text{ , donc } \begin{cases} c = \frac{1}{5} - \frac{2}{7} = -\frac{3}{35} \\ b = 0 \\ a = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall t \in [-1,1], h(t) = p_F(u)(t) = \frac{6}{7}t^2 - \frac{3}{35}$$

Alors $I = \|u - p_F(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2$ par Pythagore (car $u - p_F(u) \perp p_F(u)$).

$$\text{Donc } I = \frac{2}{9} - \int_{-1}^1 \left(\frac{36}{49}t^4 - \frac{36}{245}t^2 + \frac{9}{35^2} \right) dt = \frac{2}{9} - \frac{72}{7*35} + \frac{1}{3} \frac{72}{7*35} - \frac{18}{35*35} = \frac{128}{11025}$$
On a donc $I = \frac{128}{11025}$