

# Analyse : Préparation aux Oraux 26

## Séance 1 : Lundi 18 Mai

**Cours : revoir tout le chapitre 1 (avec les DL, les primitives, la trigo)**

**Exercice 1 (oral CCINP 25, Estelle,2) :** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f \in E$ ,

alors on pose pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $\tilde{f}(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$ . On note  $f_0 : x \mapsto 1$ .

- 1) Montrer que  $t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$  est une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ . En déduire  $\tilde{f}_0$ .
- 2) Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $I_n = a + b \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{3/2}} dt$ .  
En déduire un équivalent de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- 3) Soit  $\Phi : \begin{matrix} E \rightarrow E \\ f \mapsto \tilde{f} \end{matrix}$ 
  - a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - b) Déterminer  $\ker(\Phi)$ .
- 4) Déterminer  $\text{Im}(\Phi)$ .

Ind :

- 2) Effectuer une intégration par parties.
- 4) Procéder par analyse et synthèse. Si  $g \in \text{Im}(\Phi)$ , déterminer  $g(0)$ .

1) Il suffit de dériver et si on note  $g : t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ , alors  $g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ .

Dès lors,  $\tilde{f}_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2)  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt$ . On effectue une intégration par parties.

On pose  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-1/2}$ . Il vient alors  $a'(t) = \frac{-t}{(1+t^2)^{3/2}}$ . Soit  $b(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ .

Il vient pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \left[ \frac{t^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1+t^2}} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{3/2}} dt = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{3/2}} dt$

Dès lors, soit  $J_n = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^{3/2}} dt$ . On a  $0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^{n+2} dt = \frac{1}{n+3}$ . Donc  $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ , puis  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{2}}$

3) a) Soient  $f, g \in E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\Phi(\lambda f + g)(x) = \lambda \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt + \int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt = \lambda \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)$ .

Donc  $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$  et  $\Phi$  est linéaire.

De plus, par théorème fondamental de l'analyse, comme  $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\Phi(f)$  est de classe  $C^1$ , donc  $\Phi(f) \in E$  et  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Soit  $f \in \ker(\Phi)$ . Alors  $\Phi(f) = 0$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)'(x) = 0$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  et  $\ker(\Phi) = \{x \mapsto 0\}$

4) On procède par analyse et synthèse : soit  $g \in \text{Im}(\Phi)$ . Alors il existe une fonction  $f \in E$  telle que  $g = \Phi(f)$ . On a donc  $g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$ . Alors  $g(0) = 0$  et par théorème fondamental de l'analyse, on déduit

que  $g$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  (et vérifie  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ ).

Réciproquement (synthèse), on suppose que  $g(0) = 0$  et que  $g$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

On pose  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g'(x)\sqrt{1+x^2}$ . On a bien  $f \in E$ .

Par théorème fondamental de l'analyse,  $g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$ . Donc  $g = \Phi(f)$  et  $g \in \text{Im}(\Phi)$

Donc  $\text{Im}(\Phi) = \{g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(0) = 0\}$

**Exercice 2 (oral CCINP 25, Ambre,3) :** Soit  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < |a| < 1$ .

On pose  $U_0 = a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n}$ .

- 1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  existe et  $|U_n| < 1$ .
- 2) Démontrer que  $(U_n)$  converge et préciser la limite de  $U_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Ind :

- 1) Procéder par récurrence. Attention aux inégalités avec les complexes.
- 2) Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1}| \leq \frac{|U_n|}{2-|a|}$  et itérer le procédé.

1) On procède par récurrence et on prouve  $P(n) : \ll U_n \text{ existe et } |U_n| < 1 \gg$ .

- $P(0)$  est vraie.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$  est vraie. Alors  $|U_n| < 1$ , donc  $U_n \neq 2$  et  $U_{n+1}$  existe.

De plus,  $|2-U_n| \geq 2-|U_n| > 1$  et  $|U_{n+1}| = \frac{|U_n|}{|2-U_n|} \leq |U_n| < 1$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

On a donc bien :  $\text{pour tout entier naturel } n, U_n \text{ existe et } |U_n| < 1$ .

2) Tout d'abord, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1}| = \frac{|U_n|}{2-|U_n|} \leq |U_n|$ . Donc la suite  $(|U_n|)$  est décroissante et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|U_n| \leq a$ , donc  $|2-U_n| \geq 2-|U_n| > 2-|a| > 1$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1}| \leq \frac{|U_n|}{2-|a|}$ , et par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq \frac{1}{(2-|a|)^n} |U_0|$ .

Donc par encadrement,  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

**Exercice 3 (oral CCINP 25, Alice,2) :** Soit la suite  $(U_n)$  définie par la relation  $U_n^5 + nU_n - 1 = 0$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $U_n$  vérifiant cette condition.
- 2) Montrer que  $(U_n)$  est bornée et que  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On pourra montrer  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in [0,1]$ .
- 3) Donner un équivalent de  $U_n$  en  $+\infty$ .

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de la bijection pour  $x \mapsto f_n(x) = x^5 + nx - 1$ .
- 2) Utiliser par exemple  $f_n(0), f_n\left(\frac{1}{n}\right), f_n(1)$ .
- 3) Exploiter la relation  $U_n^5 + nU_n - 1 = 0$  et le résultat de la question précédente.

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ .

La fonction  $f_n$  est dérivable donc continue sur  $\mathbb{R}$  et vérifie pour  $x \in \mathbb{R}$   $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ . Donc  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Enfin  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ .

Donc  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$

2) En outre, on a  $f_n(0) = -1 < f_n(U_n)$ , donc comme  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a  $U_n > 0$ .

De plus,  $f_n(1) = n > 0$ , donc de manière analogue,  $U_n < 1$ .

On conclut que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in [0,1]$ , donc  $(U_n)$  est bornée.

En outre, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} \geq 0 = f_n(U_n)$ , donc par stricte croissance de  $f_n$ , on déduit que

$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$ . Donc par encadrement,  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

3) On sait que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f_n(U_n) = 0 = U_n^5 + nU_n - 1$

Donc comme  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il vient  $U_n^5 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $nU_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,  $nU_n \sim 1$  et  $U_n \sim \frac{1}{n}$

**Exercice 4 (oral Centrale 25, Estelle,4) :** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^3$  sur  $[0,1]$ .

On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

- 1) Etudier la limite de  $S_n(f)$  quand  $n$  tend vers l'infini.
- 2) Montrer qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6} \left| t - \frac{k}{n} \right|^3$$

- 3) Etablir que  $S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Ind :

- 1) Utiliser la convergence des sommes de Riemann.
- 2) Penser à l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- 3) Intégrer la précédente relation entre  $\frac{k}{n}$  et  $\frac{k+1}{n}$ , puis sommer de  $k=0$  à  $k=n-1$ .

Montrer ainsi  $\int_0^1 f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , puis effectuer un travail analogue sur  $S_n(f')$  et  $S_n(f'')$  pour conclure.

1) Avec les sommes de Riemann, comme  $f$  est continue sur  $[0,1]$ , on a  $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$

2) On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange : on sait que  $f$  est  $C^3$  sur  $[0,1]$ .

Donc  $f^{(3)}$  est continue sur le segment  $[0,1]$ , donc est bornée et atteint ses bornes.  $\boxed{\text{On pose}} M = \sup_{t \in [0,1]} |f^{(3)}(t)|$

Il vient alors pour  $t \in [0,1]$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6} \left| t - \frac{k}{n} \right|^3$$

3) On intègre cette dernière relation entre  $\frac{k}{n}$  et  $\frac{k+1}{n}$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt.$$

$$\text{Donc } \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left( f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt = \frac{M}{24} \left[ \left(t - \frac{k}{n}\right)^4 \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$$

$$\text{Donc } \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left( f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

$$\text{On somme } \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left( f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq \frac{nM}{24n^4}.$$

$$\text{Donc } \left| \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

$$\text{On a donc } \left| n^2 \left( \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right) \right| \leq \frac{M}{24n}.$$

$$\text{Donc } \int_0^1 f(t) dt = S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (*).$$

Or avec le théorème sur les sommes de Riemann appliqué à  $f''$  qui est continue sur  $[0,1]$ , on obtient :

$$S_n(f'') = \int_0^1 f''(t) dt + o(1).$$

Enfin, on fait le même travail pour  $f'$  qui est  $C^2$  sur  $[0,1]$  : pour  $t \in [0,1]$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\left| f'(t) - f'\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \left| t - \frac{k}{n} \right|^2.$$

$$\text{Donc } \left| \int_0^1 f'(t) dt - S_n(f') - \frac{1}{2n} S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{6n^2}.$$

$$\text{On déduit que } S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On remplace dans l'expression (\*) :

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \left( \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{Donc } S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{On a donc bien } \boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

**Exercice 5 (oral Mines 25, Clément R,4) :** Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues sur  $\mathbb{R}$  et qui vérifient

la relation suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt \quad (1)$$

Ind : procéder par analyse et synthèse. Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Distinguer trois cas pour déterminer les solutions de cette équation qui conviennent. Déterminer auparavant  $f(0)$  et  $f'(0)$  permet de limiter un peu les calculs.

Tout d'abord, la fonction nulle vérifie (1). On suppose donc que  $f$  n'est pas nulle et on procède par analyse et synthèse en supposant que  $f$  vérifie (1). Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) \neq 0$

On écrit la relation (1) pour  $x = y = 0$ . Il vient  $f(0)^2 = \int_0^0 f(t) dt = 0$ , donc  $\boxed{f(0) = 0}$

$f$  est continue, donc admet une primitive, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

Soit alors  $F$  une primitive de  $f$ . Alors  $f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt = \frac{1}{f(a)} (F(x+a) - F(x-a))$ .

Donc par opérations,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Il vient pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{1}{f(a)} (f(x+a) - f(x-a))$ , donc par opérations,  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . D'après (1), on a  $f(x)f(y) = F(x+y) - F(x-y)$  (2).

On fixe  $y$  et on dérive cette dernière relation par rapport à  $x$  : il vient  $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$  (3)

Si on fixe  $x$  dans la relation (2), on déduit en dérivant par rapport à  $y$  :  $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$  (4)

On peut ainsi dériver la relation (3) par rapport à  $x$  à  $y$  fixé.

Il vient pour  $x, y \in \mathbb{R}$  :  $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ .

On dérive de même (4) par rapport à  $y$  à  $x$  fixé. Il vient pour  $x, y \in \mathbb{R}$  :  $f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ .

On a donc  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$

On choisit alors  $y = a$  et on pose  $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$  (on sait que  $f(a) \neq 0$ ).

On obtient pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $f''(x) - f(x) \frac{f''(a)}{f(a)} = 0$ , donc  $f''(x) + \lambda f(x) = 0$

$\boxed{\text{Donc il existe un réel } \lambda \text{ tel que } f \text{ est solution de l'équation } (E_\lambda) : z'' + \lambda z = 0}$

On aimerait bien trouver  $f'(0)$  pour avoir une seconde condition initiale.

On écrit (4) pour  $y = 0$ . Il vient  $f(x)f'(0) = 2f(x)$ , donc pour  $x = a$ ,  $\boxed{f'(0) = 2}$  (car  $f(a) \neq 0$ ).

On étudie maintenant l'équation  $(E_\lambda) : z'' + \lambda z = 0$  en distinguant trois cas.

On traite d'abord le cas  $\boxed{\lambda = 0}$ . Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0$ , donc soit  $A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ax + B$ .

On a montré de plus que  $f(0) = 0$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ax$ .

Comme  $f'(0) = 2$ , on conclut que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$ .

Réciproquement, on fait la synthèse : soit  $f$  donnée par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$ .

Alors soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a  $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = f(x)f(y)$ , donc  $f$  est solution de  $(E_0)$  et vérifie

(1).. L'unique fonction non nulle solution de  $(E_0)$  et vérifiant la relation (1) est la fonction  $x \rightarrow 2x$

On suppose ensuite  $\lambda > 0$  fixé et on pose  $\mu = \sqrt{\lambda}$ .  $(E_\lambda) : z'' + \lambda z = 0$  devient alors  $z'' + \mu^2 z = 0$

Soient donc  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = B \cos(\mu x) + A \sin(\mu x)$ .

On a d'après 1)  $f(0) = 0$ , donc  $B = 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \sin(\mu x)$ .

De plus,  $f'(0) = 2$ , donc  $A\mu = 2$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$ .

Réciproquement, on fait la synthèse : soit  $f$  donnée par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$ .

Alors soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a  $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{2}{\mu^2} (\cos(\mu(x-y)) - \cos(\mu(x+y))) = \frac{4}{\mu^2} \sin(\mu x) \sin(\mu y) = f(x)f(y)$ .

Si  $\lambda > 0$ , il existe une unique solution non nulle de  $(E_\lambda)$  qui vérifie (1) et elle est donnée par  $f(x) = \frac{2}{\mu} \sin(\mu x)$ .

On suppose maintenant  $\lambda < 0$  et on pose  $\mu = \sqrt{-\lambda}$ .

$(E_\lambda) : z'' + \lambda z = 0$  devient alors  $z'' - \mu^2 z = 0$ .

On suppose  $f$  solution de  $(E_\lambda)$ . Alors soit  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}$ .

Comme d'après 1)  $f(0) = 0$ , on a  $A + B = 0$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) = 2A \operatorname{sh}(\mu x)$ .

De plus,  $f'(0) = 2$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu x)$ .

Réciproquement, on fait la synthèse : soit  $f$  donnée par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu x)$ .

Alors soit  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $\int_{x-y}^{x+y} f(t) dt = \frac{2}{\mu^2} (ch(\mu(x+y)) - ch(\mu(x-y)))$ .

Or  $f(x)f(y) = \frac{1}{\mu^2} (e^{\mu x} - e^{-\mu x})(e^{\mu y} - e^{-\mu y}) = \frac{2}{\mu^2} (ch(\mu(x+y)) - ch(\mu(x-y)))$ .

Donc  $f$  est bien solution.

Si  $\lambda < 0$  ; il existe une unique solution non nulle de  $(E_\lambda)$  qui vérifie (1) et elle est donnée par  $f(x) = \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu x)$ .

On réunit donc toutes les solutions de ces équations  $(E_\lambda)$  qui vérifient (1) et on obtient toutes les solutions.

Ainsi,  $S = \{x \rightarrow 0, x \rightarrow 2x\} \cup \left\{ x \rightarrow \frac{2}{\mu} \sin(\mu x), \mu \in \mathbb{R}_+^* \right\} \cup \left\{ x \rightarrow \frac{2}{\mu} \operatorname{sh}(\mu x), \mu \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

**Exercice 6 (Oral Mines 25, Grégoire,5) :** soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , de degré  $n$  et  $Q = P + P' + \dots + P^{(n)}$ .

On suppose  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ .

- 1) Démontrer que  $Q$  est minoré.
- 2) Démontrer que  $Q$  est positif sur  $\mathbb{R}$

Ind :

- 1) Etudier les limites de  $Q$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , et utiliser le théorème des bornes atteintes.

2) Supposer par l'absurde qu'il existe un réel  $c$  tel que  $Q(c) < 0$ . Si  $E = \{x \geq c, Q(x) = 0\}$ , considérer  $d = \inf(E)$  et étudier la monotonie de  $Q$  sur  $[c, d[$ .

1) Tout d'abord, on note  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , avec  $a_n \neq 0$ . Alors  $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$ .

Comme  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ , on en déduit que  $a_n > 0$  et  $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ .

De même,  $P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n$ . Si  $n$  est impair,  $P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} -\infty$ , ce qui est absurde puisque  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ . On a donc  $n$  pair et  $P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} +\infty$ .

Or pour  $k \geq 1$ ,  $\deg(P^{(k)}) < n$ , donc  $Q(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n$  et  $Q(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} +\infty$ . De même,  $Q(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} +\infty$ .

Avec la définition de limite, soit  $A < 0, \forall x \leq A, Q(x) \geq 0$ . Soit aussi  $B > 0, \forall x \geq B, Q(x) \geq 0$ .

Sur le segment  $[A, B]$ , la fonction  $Q$  est continue donc par théorème des bornes atteintes, elle est bornée, donc minorée par un réel  $m$ .

Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq \min(0, m)$ . Donc  $Q$  est minoré sur  $\mathbb{R}$ .

2) On calcule  $Q' = P' + \dots + P^{(n)} + P^{(n+1)}$ . Comme  $P$  est de degré  $n$ , il vient  $P^{(n+1)} = 0$ .

Donc  $Q' = Q - P$ .

On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe un réel  $c$  tel que  $Q(c) < 0$ .

Alors  $Q'(c) = Q(c) - P(c) < 0$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ . Donc qualitativement,  $Q$  ne peut que décroître et ne pourra jamais redevenir positive alors que  $Q(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} +\infty$  : c'est absurde. Formalisons cela :

On note  $E = \{x \geq c, Q(x) = 0\}$ . Comme  $Q(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} +\infty$ , par théorème de valeurs intermédiaires,  $E$  est non vide, minoré par  $c$  et possède donc une borne inférieure notée  $d$ .

Alors  $c$  est un minorant de  $E$ , donc comme  $d$  est le plus grand des minorants,  $c \leq d$ .

De plus, on considère une suite  $(x_p)$  d'éléments de  $E$  qui converge vers  $d$  (pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $d + \frac{1}{p}$  n'est pas

un minorant de  $E$  et il existe  $x_p \in E$  tel que  $d \leq x_p \leq d + \frac{1}{p}$ , donc  $x_p \underset{p \rightarrow +\infty}{\rightarrow} d$ ).

On a alors  $\forall p \in \mathbb{N}^*, Q(x_p) = 0$  et en passant à la limite, par continuité de  $Q$ ,  $Q(d) = 0$ .

On a donc aussi  $c < d$  (puisque  $Q(c) < 0$ ).

On se place sur  $[c, d[$ . Comme  $d$  est un minorant de  $E$ ,  $Q$  ne s'annule pas sur  $[c, d[$ . Donc par continuité, elle reste de signe fixe et  $\forall x \in [c, d[, Q(x) \leq 0$ , donc  $\forall x \in [c, d], Q(x) \leq 0$ .

On a donc pour  $x \in [c, d]$  :  $Q'(x) = Q(x) - P(x) \leq 0$  (avec  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ ).

Donc  $Q$  est décroissante sur  $[c, d]$ , avec  $Q(d) = 0$  et  $Q(c) < 0$ . C'est absurde. Donc  $Q$  est positif sur  $\mathbb{R}$ .

## Séance 2 : Mercredi 20 Mai

### Cours : revoir les chapitres 3 et 4

**Exercice 7 (oral IMT 25, Arthur, 2) :** Soit  $L = \int_1^{+\infty} \frac{(x + \arctan(x))}{x(x^2 + 1)\arctan(x)} dx$ .

1) Montrer l'existence de  $L$ .

2) Calculer  $L$ . On pourra justifier qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \geq 1, \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$

Ind :

- 1) Prendre un équivalent en  $+\infty$ .
- 2) Utiliser l'indication puis déterminer une primitive de chaque terme.

1) On considère pour  $x \in \mathbb{R}_+$  :  $f(x) = \frac{(x + \arctan(x))}{x(x^2 + 1)\arctan(x)}$ .

$f$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

De plus,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x(x^2)} \frac{2}{\pi}$ , donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x^2}$ . Or  $x \mapsto \frac{2}{\pi x^2}$  est intégrable en  $+\infty$ .

Donc  $L = \int_1^{+\infty} \frac{(x + \arctan(x))}{x(x^2 + 1)\arctan(x)} dx$  est absolument convergente, donc convergente.

2) On observe que pour  $x \geq 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\arctan(x)} + \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ .

On cherche  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \geq 1, \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ .

$$\frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{ax^2 + a + bx^2 + cx}{x(x^2 + 1)}. \text{ Il suffit d'avoir } \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

On a donc  $\forall x \geq 1, \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$ .

Donc  $L = \left[ \ln(\text{Arctan}(x)) + \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^{+\infty} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) \right]_1^{+\infty}$ .

Donc  $L = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{3}{2} \ln(2)$

**Exercice 8 (oral Mines 25, Nino,3) :** pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $U_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$ .

1) Déterminer les valeurs de  $a, b, c$  telles que  $\sum_{n \geq 1} U_n$  converge.

2) Lorsque c'est le cas, calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ .

Ind :

- 1) Procéder par analyse et synthèse et utiliser des développements limités.
- 2) Calculer les sommes partielles et prendre la limite.

3) On procède par analyse et synthèse et on suppose que  $\sum_{n \geq 1} U_n$  converge.

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ et } \ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

Donc  $U_n = (a + b + c) \ln(n) + o(\ln(n))$ .

Si  $a + b + c \neq 0$ ,  $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (a + b + c) \ln(n)$ , et  $\sum_{n \geq 1} U_n$  diverge grossièrement, ce qui est absurde. Donc

$a + b + c = 0$ .

De plus,  $U_n = b\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + c\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$  et si  $b + 2c \neq 0$ ,  $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (b + 2c)\frac{1}{n}$ . Or  $(b + 2c)\frac{1}{n}$  est de signe constant et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, donc  $\sum_{n \geq 1} U_n$  diverge, ce qui est absurde. Donc  $(b + 2c) = 0$ . Donc  $\begin{cases} b = -2c \\ a = c \end{cases}$ .

Réciproquement (synthèse), on suppose  $\begin{cases} b = -2c \\ a = c \end{cases}$ . Alors  $U_n = -2c \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, avec  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$ , donc  $\sum_{n \geq 1} U_n$  converge absolument, donc converge.

Ainsi,  $\boxed{\sum_{n \geq 1} U_n \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = c \end{cases}}$ .

$$4) \quad U_n = -2c \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = c(-2(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n+2) - \ln(n)).$$

$$\text{Donc } U_n = c(\ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln(n)).$$

$$\sum_{n=1}^N U_n = c \sum_{n=1}^N (\ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln(n)) = c \left( \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) - 2 \sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) + \sum_{n=1}^N \ln(n) \right) = c \left( \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \right)$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^N U_n \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -c \ln(2) \text{ et } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = -c \ln(2)}$$

**Exercice 9 (oral CCINP 25, Emma,3) :** Pour  $n \geq 2$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x - 1$ .

- 1) Soit  $X > 0$ . Montrer que  $I = \int_4^X \frac{\ln(t)}{t} dt$  existe et calculer sa valeur.
- 2) Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites réelles strictement positives telles que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ . On suppose que  $a_n \rightarrow 0$  ou  $a_n \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $\ln(a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(b_n)$ .
- 3) Soit  $n \geq 2$ . Montrer  $\exists! x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = 0$ . On le note  $U_n$ .
- 4) Montrer que  $f_n(U_{n+1}) = U_{n+1}^{n-1}(1 - U_{n+1}^2)$ . En déduire que  $(U_n)$  est monotone.
- 5) Montrer que  $(U_n)$  converge vers 1.
- 6) Montrer que  $U_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .
- 7) Etudier la convergence de  $\sum_{n \geq 2} (U_n - 1)$ .

Ind :

- 1) Reconnaître  $\frac{u'}{u}$ .
- 2) Ecrire  $b_n = a_n c_n$ , avec  $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ .
- 3) Utiliser le théorème de la bijection.
- 4) Utiliser  $f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$  et remplacer dans l'expression de  $f_n(U_{n+1})$ .
- 5) Montrer que  $(U_n)$  converge vers  $a \leq 1$  et procéder par l'absurde en supposant  $a < 1$ .
- 6) Poser  $y_n = 1 - U_n$ . Montrer  $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -ny_n$ , puis utiliser 2) pour trouver un équivalent de  $\ln(y_n)$ .
- 7) Utiliser  $n(1 - U_n)$ .

- 1) Soit  $X > 0$ .  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $I = \int_4^X \frac{\ln(t)}{t} dt$  existe. De plus

$$I = \frac{1}{2} \left[ \ln^2(t) \right]_4^X = \frac{1}{2} (\ln^2(X) - \ln^2(4))$$

2) On sait que  $a_n \sim b_n$ . On peut donc écrire  $b_n = a_n c_n$ , avec  $c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

Alors  $c_n = \frac{a_n}{b_n} > 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\frac{\ln(b_n)}{\ln(a_n)} = 1 + \frac{\ln(c_n)}{\ln(a_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ , donc  $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$ .

3) Soit  $n \geq 2$ . On étudie la fonction définie par  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x - 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est clairement strictement croissante (comme somme de fonctions strictement croissantes) et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
En outre,  $f_n(0) = -1$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $0 \in ]-1, +\infty[$ , donc par théorème de la bijection, l'équation

$$f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } U_n \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

4) Soit  $n \geq 2$ . On calcule  $f_n(U_{n+1}) = U_{n+1}^n + U_{n+1}^{n-1} + U_{n+1} - 1$

Mais  $f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$ , donc  $0 = U_{n+1}^{n+1} + U_{n+1}^n + U_{n+1} - 1$  et  $U_{n+1} - 1 = -(U_{n+1}^{n+1} + U_{n+1}^n)$

$$\text{Donc } f_n(U_{n+1}) = U_{n+1}^{n-1}(1 - U_{n+1}^2)$$

Par ailleurs,  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(1) = 2 > f_n(U_n)$ , donc comme  $f_n$  strictement croissante, il vient  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$ .

$f_n(U_{n+1}) = U_{n+1}^{n-1}(1 - U_{n+1}^2) > 0 = f_n(U_n)$  et  $U_{n+1} > U_n$ .

Donc  $(U_n)$  est strictement croissante.

5) On a prouvé par ailleurs que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$ . Donc  $(U_n)$  est strictement croissante et majorée par 1 : elle converge vers  $a \leq 1$ .

Supposons par l'absurde que  $a < 1$ . On a  $0 = f_n(U_n) = U_n^n + U_n^{n-1} + U_n - 1$ .

Or  $U_n^n = e^{n \ln(U_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $U_n^n + U_n^{n-1} + U_n - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a - 1 \neq 0$ .

Mais la suite  $(U_n^n + U_n^{n-1} + U_n - 1)$  est nulle donc tend vers 0. Par unicité de la limite,  $a = 1$ .

C'est absurde, donc  $a = 1$  (amusant, non ?). Ainsi,  $(U_n)_{n \geq 2}$  converge vers 1.

6) Question difficile. Soit  $n \geq 2$ . On pose  $y_n = 1 - U_n > 0$ .  $0 = U_n^n + U_n^{n-1} + U_n - 1$  On a donc

$$y_n = U_n^n + U_n^{n-1} \text{ et } y_n = U_n^n \left( 1 + \frac{1}{U_n} \right) = (1 - y_n)^n \left( 1 + \frac{1}{U_n} \right), \text{ donc } \ln(y_n) = n \ln(1 - y_n) + \ln \left( 1 + \frac{1}{U_n} \right).$$

Donc  $n \ln(1 - y_n) = \ln(y_n) - \ln \left( 1 + \frac{1}{U_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(y_n)$ , car  $\ln(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$  (puisque  $y_n = 1 - U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ )

Mais  $n \ln(1 - y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n y_n$ , donc  $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n y_n$  et  $-\frac{\ln(y_n)}{y_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ .

On applique alors 2), avec  $a_n = n$  : on déduit que  $\ln(-\ln(y_n)) - \ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

Or  $\ln(-\ln(y_n)) - \ln(y_n) = -\ln(y_n) \left( 1 + \frac{\ln(-\ln(y_n))}{-\ln(y_n)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(y_n)$  car  $-\ln(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et par croissance

comparée. Donc  $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n)$  et comme  $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n y_n$ ,  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

On a donc  $y_n = \frac{\ln(n)}{n} + o \left( \frac{\ln(n)}{n} \right)$ , et ainsi  $U_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o \left( \frac{\ln(n)}{n} \right)$

7)  $n(1-U_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  avec 6). Donc  $n(1-U_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$  et pour  $n$  assez grand,  $n(1-U_n) \geq 1$ .

Donc  $(1-U_n) \geq \frac{1}{n} \geq 0$  et par comparaison,  $\sum_{n \geq 2} (1-U_n)$  diverge, donc  $\boxed{\sum_{n \geq 2} (U_n - 1) \text{ diverge.}}$

**Exercice 10 (oral CCINP 24, Mines 25, Nassim, Antonin, 3) :** on pose  $J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{ch(t)} \right)^x dt$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $J$ .
- 2) Justifier la continuité de  $J$ .
- 3) Calculer  $J(1)$  et  $J(2)$
- 4) Etablir une relation entre  $J(x)$  et  $J(x+2)$ .
- 5) Calculer  $nJ(n)J(n+1)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 6) Déterminer un équivalent de  $J(n)$  en  $+\infty$ .

Ind :

- 1) Poser pour  $x, t \in \mathbb{R} : f(t, x) = \left( \frac{1}{ch(t)} \right)^x = \exp(-x \ln(cht))$ .
- 2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- 3) Déterminer la dérivée de  $th$ .
- 4) Effectuer une intégration par parties.
- 5) Montrer que si  $W_n = nJ(n)J(n+1)$ , alors  $(W_n)$  est constante.
- 6) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^* : J(n+2) \leq J(n+1) \leq J(n)$ . Utiliser ensuite ce qui précède.

1) On pose pour  $x, t \in \mathbb{R} : f(t, x) = \left( \frac{1}{ch(t)} \right)^x = \exp(-x \ln(cht))$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et paire. Il suffit donc d'étudier en  $+\infty$ .

$$f(t, x) = \exp(-x \ln(cht)) = \exp\left(-x \ln\left(e^t \left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right)\right)\right) = \exp\left(-tx - x \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right)\right).$$

Donc  $f(t, x) = e^{-tx} \exp\left(-x \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right)\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-tx} 2^x$ . Or  $t \mapsto e^{-tx} 2^x$  est intégrable en  $+\infty$  si et seulement si

$x > 0$ . Donc  $\boxed{D_J = \mathbb{R}_+^*}$

2) On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(t, x) = \exp(-x \ln(cht))$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $x > 0$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$
- On prend  $a > 0$  et on considère  $x \in [a, +\infty[$ .  
Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $ch(t) \geq 1$  et  $|f(t, x)| = \exp(-x \ln(cht)) \leq \exp(-a \ln(cht)) = f(a, t)$ , où  $t \mapsto f(a, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Donc par théorème de continuité des intégrales à paramètres,  $\boxed{J \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

3) On calcule ces deux intégrales, en utilisant par exemple la parité de la fonction :

$$J(1) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch(t)} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt.$$

On effectue un changement de variable et on pose  $u = e^t$ . On a alors  $du = e^t dt$  et il vient :

$$\boxed{J(1) = 4 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du = \pi}$$

Par ailleurs,  $J(2) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^2(t)} dt = 2 [th(t)]_0^{+\infty}$ . Or  $th(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ . Donc  $J(2) = 2$

4) Soit  $x > 0$ . On a  $J(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch^{x+1}(t)} dt$

On pose  $u(t) = \frac{1}{ch^{x+1}(t)} = (ch(t))^{-x-1}$ , avec  $u'(t) = (-x-1)sh(t)(ch(t))^{-x-2}$

Et  $v'(t) = ch(t)$ , avec  $v(t) = sh(t)$ .

$u(t)v(t) = \frac{sh(t)}{ch^{x+1}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{e^{t(x+1)}} 2^x$ , donc  $u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  et  $u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ .

Donc on peut intégrer par parties :  $J(x) = 2(x+1) \int_0^{+\infty} \frac{sh^2(t)}{ch^{k+2}(t)} dt$ .

Donc  $J(x) = 2(x+1) \int_0^{+\infty} \frac{(ch^2(t)-1)}{ch^{k+2}(t)} dt = (x+1)(J(x) - J(x+2))$ . On conclut :  $J(x+2) = \frac{x}{x+1} J(x)$

5) On note  $W_n = nJ(n)J(n+1)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On a vu au 3) que  $W_1 = J(1)J(2) = 2\pi$ . De plus,  $W_{n+1} = (n+1)J(n+1)J(n+2)$ .

Donc  $W_{n+1} = (n+1)J(n+1)J(n+2) = W_n$  avec 4). Donc  $(W_n)$  est constante et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, nJ(n)J(n+1) = 2\pi$

6)  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{ch^{n+2}(t)} \leq \frac{1}{ch^{n+1}(t)} \leq \frac{1}{ch^n(t)}$ .

Donc par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le « bon sens ») :  $J(n+2) \leq J(n+1) \leq J(n)$ .

On en déduit que  $\frac{n}{n+1} J(n) \leq J(n+1) \leq J(n)$ .

Donc par théorème d'encadrement sur les équivalents,  $J(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} J(n)$ .

Donc en utilisant 5) :  $nJ(n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\pi$ . On en conclut  $J(n) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ .

**Exercice 11 (oral Mines 22, 25, Geoffrey,3) :** pour  $n \geq 2$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)}$ .

1) Justifier l'existence de  $I_n$  et déterminer la limite de  $(I_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

2) Montrer qu'il existe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{(t+1)\dots(t+n)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{t+k}$ .

3) Montrer que pour  $n \geq 2$ ,  $I_n = -\sum_{k=1}^n a_k \ln(k)$ .

4) Déterminer  $a_1, \dots, a_n$  et en déduire  $I_n$ .

Ind :

1) Utiliser par exemple le théorème de convergence dominée.

2) Reconnaître un résultat du programme de PCSI.

3) Etudier  $\int_0^A \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)}$  pour  $A > 0$  et montrer que  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ .

4) Prendre l'égalité  $\frac{1}{(t+1)\dots(t+n)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t+i}$  et multiplier par  $(t+k)$ .

1) Pour  $n \geq 2$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_n(t) = \frac{1}{(t+1)\dots(t+n)}$ .  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $f_n(t) \sim \frac{1}{t^n}$  et

comme  $n \geq 2$ ,  $t \mapsto \frac{1}{t^n}$  est intégrable en  $+\infty$ , donc  $f_n$  l'est aussi et  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)}$  existe.

On utilise le théorème de convergence dominée : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_n(t) = \frac{1}{(t+1)\dots(t+n)} \rightarrow 0$ .

De plus,  $|f_n(t)| \leq \frac{1}{(t+1)(t+2)} = f_2(t)$ , où  $f_2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Donc par théorème de convergence dominée,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)} \rightarrow 0$

2) C'est immédiat avec le théorème de décomposition en éléments simples.

3) Soit  $A > 0$ . On a  $\int_0^A \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)} = \sum_{k=1}^n a_k \int_0^A \frac{dt}{t+k} = \sum_{k=1}^n a_k \ln(A+k) - \sum_{k=1}^n a_k \ln(k)$ , donc :

$$\int_0^A \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)} = -\sum_{k=1}^n a_k \ln(k) + \sum_{k=1}^n a_k \ln(A) + \sum_{k=1}^n a_k \ln\left(1 + \frac{k}{A}\right).$$

Or  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{t}{(t+1)\dots(t+n)} = \sum_{k=1}^n \frac{t a_k}{t+k}$ , donc en prenant la limite quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , il vient  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ ,

donc  $\int_0^A \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)} = -\sum_{k=1}^n a_k \ln(k) + \sum_{k=1}^n a_k \ln\left(1 + \frac{k}{A}\right)$ , et en prenant la limite quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on

conclut que  $I_n = -\sum_{k=1}^n a_k \ln(k)$

4) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On part de l'égalité  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{1}{(t+1)\dots(t+n)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t+i}$  et on multiplie par  $(t+k)$ . On

obtient  $\frac{1}{(t+1)\dots(t+k-1)(t+k+1)\dots(t+n)} = a_k + (t+k) \sum_{i \neq k} \frac{a_i}{t+i}$ .

On prend la limite lorsque  $t$  tend vers  $-k$  :  $\frac{1}{(-k+1)\dots(-1)(-k+k+1)\dots(-k+n)} = a_k$ .

On obtient donc  $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!(k-1)!}$  et  $I_n = -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!(k-1)!} \ln(k)$

**Exercice 12 (oral Mines 25, Marius, 4) :** Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$  converge.

On pose  $g : x \rightarrow \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} g(x)$ .

Ind :

1) Considérer une primitive de  $f$ .

2) Couper l'intégrale en deux et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Conclure avec la double détente.

1)  $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  donc par théorème fondamental, elle admet une primitive notée  $F$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a alors  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0)$ .

Donc  $\boxed{g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)}$

2) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $\left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^x f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^x 1 dt}$ .

Donc  $|\sqrt{x}g(x)| \leq \sqrt{\int_0^x f^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt}$ . Cela ne donne pas la limite de  $\sqrt{x}g(x)$  en  $+\infty$ , mais

seulement que cette fonction est bornée.

On va donc couper l'intégrale en deux et revenir à la définition de limite. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $A > 0$  tel que

$$\int_A^{+\infty} f^2(t) dt = \left| \int_0^{+\infty} f^2(t) dt - \int_0^A f^2(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Alors pour  $x \geq A$  :  $|\sqrt{x}g(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \int_0^A f(t) dt + \int_A^x f(t) dt \right)$ .

Donc  $|\sqrt{x}g(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^A f(t) dt \right| + \left( \int_A^x f^2(t) dt \right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^A f(t) dt \right| + \left( \int_A^{+\infty} f^2(t) dt \right)$ .

On utilise la double détente, c'est-à-dire qu'on exploite de nouveau la définition de limite :

Or  $\frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^A f(t) dt \right| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\exists B > 0, \forall x \geq B, \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^A f(t) dt \right| \leq \varepsilon$ .

Pour  $x \geq \max(A, B)$ , il vient  $|\sqrt{x}g(x)| \leq 2\varepsilon$ . Donc  $\boxed{\sqrt{x}g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

### Séance 3 : Mercredi 27 Mai

#### Cours : revoir le chapitre 6

**Exercice 13 (Oral IMT 25, Léa,2) :** pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I = [1, +\infty[$ , on pose  $f_n(x) = e^{-nx} (n - (n+1)e^{-x})$ .

1) Montrer que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$  et déterminer  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

2) Soit  $(a, b) \in I^2$ . Montrer  $\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$ .

3) Calculer  $\int_1^{+\infty} S(x) dx$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_1^{+\infty} f_n(x) dx \right)$ . Conclure.

Ind :

- 1) Reconnaître une somme télescopique.
- 2) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment en montrant la convergence normale.
- 3) Faire les calculs. On pourrait aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

1) On fixe  $x \in I = [1, +\infty[$ . On a pour  $N \in \mathbb{N}^*$  :

On reconnaît une somme télescopique.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^N f_n(x) = \sum_{n=1}^N n e^{-nx} - \sum_{n=1}^{N+1} n e^{-nx} = -(N+1)e^{-(N+1)x}.$$

Par croissance comparée, comme  $x \geq 1$ ,  $\sum_{n=0}^N f_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ et } S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est la fonction nulle.}$$

2) Soit  $(a, b) \in I^2$ . Quitte à échanger les bornes de l'intervalle, on peut supposer  $1 \leq a \leq b$ .

Montrons  $\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$ . On utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

- Chaque fonction  $f_n$  est bien continue sur  $[a, b]$ .
- Montrons que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ .

$$\text{On fixe } x \in [a, b]. \text{ Alors } |f_n(x)| = e^{-nx} \left| n - (n+1)e^{-x} \right| \leq e^{-n} (n+n+1)$$

$$\text{Donc } 0 \leq \|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq e^{-n} (n+n+1), \text{ puis } 0 \leq n^2 \|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq 2n^3 e^{-n} + n^2 e^{-n}.$$

$$\text{Donc par } \sum_{n=0}^N f_n(x) = \sum_{n=0}^N e^{-nx} (n - (n+1)e^{-x}) = \sum_{n=0}^N n e^{-nx} - \sum_{n=0}^N (n+1) e^{-(n+1)x} \text{ encadrement,}$$

$$n^2 \|f_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \|f_n\|_{\infty, [a, b]} = o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ Comme } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge, par comparaison des séries à}$$

termes positifs,  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement donc uniformément sur  $[a, b]$ .

$$\text{On a donc bien } \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

3) On a directement  $\int_1^{+\infty} S(x) dx = 0$ . On prouve la convergence de  $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$ .

$f_n$  est bien continue sur  $[1, +\infty[$ . De plus, par croissance comparée, pour  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Comme

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable en  $+\infty$  d'après Riemann,  $f_n$  l'est aussi. Donc  $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$  converge (absolument).

Pour  $x \in I$ ,  $f_0(x) = -e^{-x}$  et  $\int_1^{+\infty} f_0(x) dx$  converge.

Dès lors, si  $n \geq 1$ ,  $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx = \int_1^{+\infty} \left( e^{-nx} (n - (n+1)e^{-x}) \right) dx$ . Chacune des deux intégrales étant convergente,

on peut couper en deux :  $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx = n \int_1^{+\infty} e^{-nx} dx - (n+1) \int_1^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx = (e^{-n} - e^{-(n+1)})$ .

Par ailleurs,  $\int_1^{+\infty} f_0(x) dx = -e^{-1}$ , donc pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=0}^N \left( \int_1^{+\infty} f_n(x) dx \right) = -e^{-(N+1)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_1^{+\infty} f_n(x) dx \right) = 0 = \int_1^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

La permutation somme-intégrale reste vraie sur  $[1, +\infty[$  bien que ce ne soit pas un segment.

**Exercice 14 (oral Centrale 25, Léo,3) :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne.  $a \in \mathbb{R}^*, \lambda \in ]-1, 1[$ .

- 1) Montrer  $\exists ! F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)$ .
- 2) Expliciter  $F$  si  $f = \cos$ .

Ind :

- 1) Procéder par analyse et synthèse. Itérer le procédé et montrer que si  $F$  est solution, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(x) = \left( \sum_{k=0}^n \lambda^k f(x+ka) \right) + \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a). \text{ Justifier que } \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

en déduire  $F(x)$ . Effectuer ensuite la synthèse en vérifiant bien la convergence de la série obtenue.

- 2) Utiliser  $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(x+ka) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e^{i(x+ka)} \right)$ .

- 1) On procède par analyse et synthèse. Soit  $F$  solution du problème posé. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $F(x+a) = f(x+a) + \lambda F(x+2a)$ , donc  $F(x) = f(x) + \lambda f(x+a) + \lambda^2 F(x+2a)$ .

Donc  $F(x) = f(x) + \lambda f(x+a) + \lambda^2 f(x+2a) + \lambda^3 F(x+3a)$  et par récurrence, pour tout entier naturel

$$n \in \mathbb{N}, \text{ il vient } F(x) = \left( \sum_{k=0}^n \lambda^k f(x+ka) \right) + \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a).$$

Or  $F$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  : soit donc  $\alpha \in \mathbb{R}_+, \forall c, d \in \mathbb{R}, |F(d) - F(c)| \leq \alpha |d - c|$ .

On a donc  $|F(x+(n+1)a) - F(x)| \leq \alpha(n+1)|a|$ , et  $|F(x+(n+1)a)| \leq \alpha(n+1)|a| + |F(x)|$ .

Donc  $|\lambda^{n+1} F(x+(n+1)a)| \leq |\lambda|^{n+1} (\alpha(n+1)|a| + |F(x)|)$ .

Or  $|\lambda| < 1$ , donc par croissance comparée,  $|\lambda|^{n+1} (\alpha(n+1)|a| + |F(x)|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc par encadrement,  $\lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc

$$\sum_{k=0}^n \lambda^k f(x+ka) = F(x) - \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x).$$

Donc la série  $\sum_{k \geq 0} \lambda^k f(x+ka)$  est convergente et  $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k f(x+ka)$

Synthèse : soit  $x \in \mathbb{R}$ . On commence par montrer que  $\sum_{k \geq 0} \lambda^k f(x+ka)$  est bien convergente.

$f$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  : soit donc  $M \in \mathbb{R}_+, \forall c, d \in \mathbb{R}, |f(d) - f(c)| \leq M |d - c|$ .

On a donc  $|f(x+ka) - f(x)| \leq kM |a|$ , et  $|f(x+ka)| \leq kM |a| + |f(x)|$ .

Donc  $k^2 |\lambda^k f(x+ka)| \leq |\lambda|^k (k^3 M |a| + k^2 |f(x)|)$ .

Or  $|\lambda| < 1$ , donc par croissance comparée et par encadrement,  $\lambda^k f(x+ka) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .

Donc  $\sum_{k \geq 0} \lambda^k f(x+ka)$  est bien convergente. On pose ainsi  $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k f(x+ka)$ .

Il vient alors pour  $x, y \in \mathbb{R}$  :  $|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k (f(x+ka) - f(y+ka)) \right|$ .

Or pour  $k \in \mathbb{N}, 0 \leq |\lambda|^k |f(x+ka) - f(y+ka)| \leq M |\lambda|^k |x - y|$ .

Comme  $|\lambda| < 1$ ,  $\sum_{k \geq 0} \lambda^k (f(x+ka) - f(y+ka))$  est absolument convergente.

$$\text{Donc } |F(x) - F(y)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda|^k |f(x+ka) - f(y+ka)| \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda|^k |x - y|$$

$$\text{Donc } |F(x) - F(y)| \leq \frac{M}{1 - |\lambda|} |x - y| \text{ et } \boxed{F \text{ est bien lipschitzienne sur } \mathbb{R}}.$$

$$\text{Enfin, pour } x \in \mathbb{R} \quad F(x) - \lambda F(x+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k f(x+ka) - \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} f(x+(k+1)a).$$

$$\text{Donc } F(x) - \lambda F(x+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k f(x+ka) - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k f(x+ka) = f(x).$$

Donc  $\boxed{F \text{ est bien l'unique solution du problème}}$ .

2) On suppose ici  $f = \cos$ . Alors  $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(x+ka)$ .

On remarque que  $\sum_{k \geq 0} \lambda^k e^{i(x+ka)}$  est absolument convergente donc convergente puisque  $|\lambda| < 1$ .

$$\text{Donc } F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(x+ka) = \text{Re} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e^{i(x+ka)} \right) = \text{Re} \left( e^{ix} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda e^{ia})^k \right)$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda e^{ia})^k = \frac{1}{1 - \lambda e^{ia}} = \frac{1 - \lambda e^{-ia}}{|1 - \lambda e^{ia}|^2}, \text{ donc } e^{ix} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda e^{ia})^k = \frac{e^{ix} - \lambda e^{i(x-a)}}{|1 - \lambda e^{ia}|^2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{F(x) = \frac{\cos(x) - \lambda \cos(x-a)}{|1 - \lambda e^{ia}|^2} = \frac{\cos(x) - \lambda \cos(x-a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)}}$$

**Exercice 15 (oral Mines 25, Lucas,4) :** pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .

1) Déterminer le domaine de définition  $D$  de la fonction  $S$  donnée par  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

2) Comparer, pour  $x \in D \setminus \{0\}$ ,  $S(x)$  et  $S\left(\frac{1}{x}\right)$ .

3) Montrer que  $S$  est  $C^1$  sur  $D$ . Etudier ses variations sur  $D \cap \mathbb{R}_+$ , avec les limites aux bornes.

4) Déterminer un équivalent de  $S(x)$  en  $+\infty$ .

Ind :

1) Distinguer les cas  $|x| = 1$ ,  $|x| < 1$  et  $|x| > 1$ .

2) Faire le calcul.

3) Montrer que  $S$  est  $C^1$  sur  $] -1, 1[$  en se plaçant sur des segments  $[-a, a] \subset ] -1, 1[$ , puis utiliser 2).

Pour la limite en  $\Gamma$ , utiliser une minoration de  $S(x)$  sur  $[0, 1[$ .

4) Se ramener à une étude en 0 et utiliser Taylor-Young.

1) On distingue plusieurs cas.

- Si  $|x| = 1$ ,  $|f_n(x)| = \frac{1}{2}$ , donc  $(f_n(x))$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  diverge.

- Si  $|x| < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |f_n(x)| \leq |x|^n$ . Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est absolument convergente, donc convergente.
- Si  $|x| > 1$ ,  $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ , avec  $0 \leq \frac{1}{|x|} < 1$  donc par théorème sur les équivalents des séries à termes

positifs,  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est absolument convergente, donc convergente.

Donc  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

2) Soit  $x \in D \setminus \{0\}$ . Alors  $\frac{1}{x} \in D$  et  $S\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ . Or  $f_n\left(\frac{1}{x}\right) = f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .

Donc si  $x \in D \setminus \{0\}$ ,  $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$ .

3) Montrons que  $S$  est  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ .

On cherche à appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

- Chaque  $f_n$  est bien de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ .

- $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$  (avec 1).

- De plus,  $f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - x^n(2nx^{2n-1})}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$ .

On prouve que la série  $\sum f_n'$  converge uniformément sur tout segment  $[-a, a]$  de  $] -1, 1[$ . Soit

$a \in ]0, 1[$ . Alors pour  $x \in [-a, a]$ ,  $|1-x^{2n}| \leq 1+x^{2n}$ , donc  $|f_n'(x)| \leq na^{n-1}$ , donc  $0 \leq \|f_n'\|_{\infty, [-a, a]} \leq na^{n-1}$ .

Or  $n^3 a^{n-1} = \frac{1}{a} \frac{n^3}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}$ , où  $\frac{1}{a} > 1$ . Donc par croissance comparée,  $n^3 a^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$  et  $na^{n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , avec

$\frac{1}{n^2} > 0$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge. Donc  $\sum na^{n-1}$  converge.

Donc  $\sum U_n'$  converge normalement donc uniformément sur  $[-a, a]$ .

Donc par théorème de dérivation de la somme des séries de fonction, la restriction de  $S$  à tout segment  $[-a, a]$

de  $] -1, 1[$  est  $C^1$ . Donc  $S$  est  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ .

Dès lors, pour  $x > 1$ ,  $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ , donc par composée,  $S$  est  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ , et de même sur  $] -\infty, -1[$ .

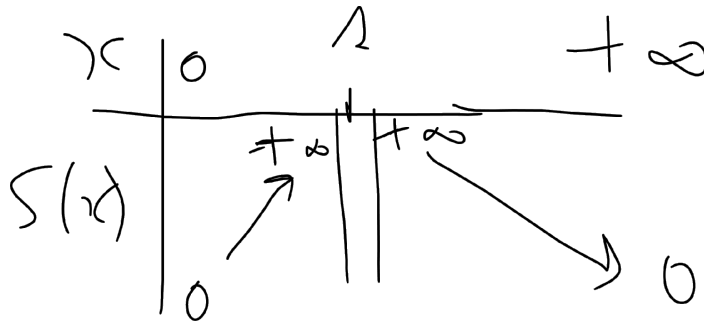
Donc  $S$  est  $C^1$  sur  $D$ . De plus,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$  pour  $x \in D$ .

Donc  $S$  est croissante sur  $[0, 1[$  et pour  $x \in [0, 1[$ ,  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$ .

Donc par minoration,  $S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\rightarrow} +\infty$ .

De plus, avec  $\forall x > 1, S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ , il vient  $S$  décroissante sur  $]1, +\infty[$ ,  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} S(0) = 0$  (car  $S$  est continue en 0), et  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$ .

Donc :



4) On sait que  $\forall x > 1, S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ . L'étude en  $+\infty$  se ramène donc à celle en 0.

Comme  $S$  est  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ , d'après Taylor-Young,  $S(x) = S(0) + xS'(0) + o(x)$ .

Donc  $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x + o(x)$ . Donc  $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

#### Exercice 16 (oral Centrale 25, Léa, Naël) :

- 1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  et  $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ . Montrer que  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent et qu'elles ont la même limite. On note  $\gamma$  cette limite.
- 2) Soit  $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) dx$  et  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$ . Montrer que  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$ .
- 3) Exprimer  $I$  en fonction de  $\gamma$ .

Ind :

- 1) Utiliser le lien suite-série ou prouver que  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes.
- 2) Utiliser le théorème de convergence dominée.
- 3) Exprimer  $I_n$  à l'aide de  $\int_0^1 \ln(1-v)v^n dv$ . Exprimer cette intégrale sous forme de somme à l'aide d'un développement en série entière.

1) On peut montrer comme dans le cours que  $(U_n)$  converge avec le lien suite-série, et ensuite il vient :

$$V_n = U_n + \ln(n) - \ln(n+1) = U_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma.$$

On peut aussi montrer (autre méthode) que  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes :

- $V_n - U_n = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$ .

Or pour  $t \in [n, n+1]$ ,  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$ , donc en intégrant  $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$ .

Donc  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$  (1) et  $(U_n)$  est décroissante.

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1))$ , donc avec (1) appliqué pour  $n+1$ , on obtient que

$(V_n)$  est croissante.

Donc  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes et tendent vers la même limite.

2) On utilise le théorème de convergence dominée.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)$  si  $x \in ]0, n[$  et  $f_n(x) = 0$  si  $x \geq n$ .

Alors  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

Pour  $x > 0$  fixé, on a  $x < n$  pour  $n$  assez grand.

Donc  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \ln(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(x) = f(x)$ .

Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour  $x > 0$ , si  $x < n$   $|f_n(x)| = \left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\right| = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) |\ln(x)| \leq e^{-x} |\ln(x)| = \varphi(x)$  (en utilisant que

$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$ ).

Si  $x \geq n$ , on a aussi  $|f_n(x)| = 0 \leq \varphi(x)$ . Donc on a  $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$ .

Or  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\varphi(x) \sim_{x \rightarrow 0} |\ln(x)|$ , donc  $\varphi$  est intégrable en 0.

De plus,  $x^2 e^{-x} |\ln(x)| = \frac{|\ln(x)| x^3}{x e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  donc  $\varphi$  est intégrable en  $+\infty$ .

Donc  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Donc par théorème de convergence dominée,  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$ .

3) On effectue un changement de variable  $x = nu$  et il vient :

$$I_n = n \int_0^1 \ln(nu) (1-u)^n du = n \left( (\ln n) \int_0^1 (1-u)^n du + \int_0^1 \ln(u) (1-u)^n du \right).$$

On calcule la première intégrale et on pose  $v = 1 - u$  dans la seconde :

$$I_n = n \left( \frac{\ln n}{n+1} + \int_0^1 \ln(1-v) v^n dv \right) \quad (1).$$

Avec un développement en série entière:  $\int_0^1 \ln(1-v) v^n dv = - \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v^{n+k}}{k} dv$ .

Puis on applique le théorème d'intégration terme à terme : on pose  $g_k(v) = \frac{v^{n+k}}{k}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $v \in ]0, 1[$ .

Alors chaque  $g_k$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

De plus  $\sum_{k \geq 1} g_k$  converge simplement sur  $]0, 1[$  (vers  $v \mapsto \ln(1-v) v^n$ ).

Enfin,  $\int_0^1 |g_k(v)| dv = \frac{1}{k(n+k+1)} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}$ , donc  $\sum_{k \geq 1} \int_0^1 |g_k(v)| dv$  converge.

$$\text{Donc } \int_0^1 \ln(1-v) v^n dv = - \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v^{n+k}}{k} dv = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n+1)}$$

$$\text{Mais } \frac{1}{k(k+n+1)} = \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1} \right) \text{ et } \int_0^1 \ln(1-v) v^n dv = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1} \right).$$

La somme est télescopique et pour  $N \geq n+1$ ,  $\sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=n+2}^{N+n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=N+1}^{N+n+1} \frac{1}{k}$ .

La seconde somme comprend un nombre fini de termes (il y en a  $n$ ) qui tendent vers 0.

Donc  $\int_0^1 \ln(1-v)v^n dv = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ .

Puis en reprenant (1) :  $I_n = \frac{n}{n+1} \left( \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\gamma$ .

Donc avec (2), par unicité de la limite,  $I = -\gamma$ .

**Exercice 17 (oral Centrale 25, Grégoire, Clément R,4) :** pour  $x \in [0,1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{1/k}$

- 1) Etudier la convergence simple et uniforme de  $(f_n)$  sur  $[0,1]$ .
- 2) Soit  $x \in [0,1]$ , fixé. Etudier la monotonie de la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- 3) Soit  $b \in [0,1[$ . Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! a_n \in [0,1[ f_n(a_n) = b$ . Déterminer la limite de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Ind :

- 1) Pour la convergence simple, revenir à la définition de limite et montrer le théorème de Césaro dans ce cas particulier.
- 2) Calculer  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  pour  $x \in [0,1]$ .
- 3) Comparer  $f_{n+1}(a_n)$  et  $f_n(a_n)$ , puis montrer que  $(a_n)$  converge vers  $l \in [0,1]$ , puis montrer  $b \geq f(l)$ .

1) Pour étudier la convergence simple, on fixe  $x \in [0,1]$ .

- Si  $x = 0$ ,  $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Si  $x \in ]0,1]$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{k} \ln(x)\right)$ . On effectue une moyenne de termes qui tendent vers 1. On

montre ainsi le théorème de Césaro dans ce cas particulier. On pose  $W_k = \exp\left(\frac{1}{k} \ln(x)\right)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $W_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ , et que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, W_k \leq 1$ , on considère  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall k \geq N, 1 - \varepsilon \leq W_k \leq 1$ .

Alors  $1 \geq f_n(x) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n W_k \geq \frac{n-N}{n} (1 - \varepsilon)$ .

On utilise de nouveau la définition de limite (double détente) :  $\frac{n-N}{n} (1 - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \varepsilon$ , donc on prend

$N_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N_2, \frac{n-N}{n} (1 - \varepsilon) \geq 1 - 2\varepsilon$ .

Pour  $n \geq \max(N_2, N), 1 \geq f_n(x) \geq 1 - 2\varepsilon$ .

Par définition de limite,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Donc  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f : \begin{matrix} 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in ]0,1] \end{matrix}$ .

On constate alors que  $f$  n'est pas continue, alors que chaque  $f_n$  l'est (c'est une somme de fonctions puissances de la forme  $x \mapsto x^\alpha$ , avec  $\alpha > 0$ , qui sont continues sur  $\mathbb{R}_+$ ).

Donc il n'y a pas convergence uniforme.

- 2) Soit  $x \in [0,1]$ , fixé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x^{1/k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{1/k}$ .

Donc  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n x^{1/k} + \frac{1}{n+1} x^{1/(n+1)} = \frac{1}{n+1} \left( x^{1/(n+1)} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{1/k} \right)$ .

Si  $x \in ]0, 1]$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x^{1/k} = \exp\left(\frac{1}{k} \ln(x)\right) \leq \exp\left(\frac{1}{n+1} \ln(x)\right) = x^{1/(n+1)}$ . Donc  $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ .

Cela reste vrai si  $x = 0$ . Donc la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par somme de fonctions continues et strictement croissantes sur  $[0, 1]$  (car les  $x \mapsto x^\alpha$  le sont lorsque  $\alpha > 0$ ),  $f_n$  l'est aussi. De plus,  $f_n(0) = 0$  et  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 = f_n(1)$ .

Donc par théorème de la bijection,  $\exists ! a_n \in [0, 1[$   $f_n(a_n) = b$ .

En outre, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , avec 2),  $f_{n+1}(a_n) \geq f_n(a_n) = b = f_{n+1}(a_{n+1})$ .

Donc comme  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ , il vient  $a_n \geq a_{n+1}$ .

Donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers  $l \in [0, 1]$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq l$ , donc  $f_n(a_n) \geq f_n(l)$  et  $b \geq f_n(l)$ .

Avec la convergence simple établie en 1), en passant à la limite,  $1 > b \geq f(l)$ .

Donc on ne peut pas avoir  $f(l) = 1$ , donc  $l = 0$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

**Exercice 18 (oral Mines 25, Jules, 5) :** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et les calculer à

l'aide de fonctions usuelles :  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left( x^n + \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n \right)$  et  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left( x^n + (1-x)^n \right)$

Ind : pour le domaine de définition, étudier la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  et de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n$ .

Pour la calcul de la somme, poser  $h(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2}$  et exprimer  $h'$  à l'aide de fonctions usuelles.

Exprimer  $f$  à l'aide de  $h$ , puis déterminer  $f'$  et enfin  $f$ .

Procéder de manière analogue pour  $g$ . Utiliser  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

On pose dans la suite  $h(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2}$ . Si  $|y| \leq 1$ ,  $0 \leq \frac{|y|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  et par majoration,  $h(y) = \sum_{n \geq 1} \frac{y^n}{n^2}$  converge absolument donc converge.

De plus, si  $|y| > 1$ ,  $\frac{|y|^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{y^n}{n^2}$  est grossièrement divergente.

Donc  $h$  est définie sur  $[-1, 1]$ .

De plus,  $\left| \frac{-x}{1-x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq |1-x| \Leftrightarrow x^2 \leq (1-x)^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ .

Donc si  $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n$  convergent et  $f(x)$  est bien défini.

Si  $x < -1$ ,  $\left| \frac{1}{n^2} \left( x^n + \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n \right) \right| = \left| \frac{x^n}{n^2} \left( 1 + \left( \frac{-1}{1-x} \right)^n \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n^2}$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left( x^n + \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n \right)$  diverge grossièrement.

Si  $x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  converge et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n$  diverge donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left( x^n + \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n \right)$  diverge.

Si  $x > 1$ ,  $\frac{1}{n^2} \left( x^n + \left( \frac{-x}{1-x} \right)^n \right) = \frac{x^n}{n^2} \left( 1 + \left( \frac{x}{x-1} \right)^n \right) \geq \frac{x^n}{n^2} \geq 0$ , et comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  diverge,  $f(x)$  n'est pas défini.

Donc comme  $f$  n'est pas définie en 1,  $D_f = \left[ -1, \frac{1}{2} \right]$

De même,  $|1-x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$ .

Donc si  $x \in [0, 1]$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{(1-x)^n}{n^2}$  convergent, donc  $g(x)$  est défini.

Si  $x > 1$ ,  $x^n + (1-x)^n = x^n \left( 1 + \left( \frac{1-x}{x} \right)^n \right)$ , avec  $\left| \frac{1-x}{x} \right| = 1 - \frac{1}{x} < 1$ .

Donc  $\frac{1}{n^2} (x^n + (1-x)^n) \sim \frac{x^n}{n^2}$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} (x^n + (1-x)^n)$  diverge grossièrement.

Enfin, si  $x < 0$ ,  $x^n + (1-x)^n = (1-x)^n \left( 1 + \left( \frac{x}{1-x} \right)^n \right)$ , avec  $\left| \frac{x}{1-x} \right| = \frac{-x}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x} < 1$ , donc

$\frac{1}{n^2} (x^n + (1-x)^n) \sim \frac{(1-x)^n}{n^2}$  et de nouveau,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} (x^n + (1-x)^n)$  diverge grossièrement.

Donc  $D_g = [0, 1]$

$h$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 (puisque'elle est définie sur  $[-1, 1]$ ).

Donc  $h$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et  $h'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n}$ , donc si  $y \neq 0$ ,  $h'(y) = -\frac{\ln(1-y)}{y}$ , et  $h'(0) = 1$

Or pour  $x \in \left[ -1, \frac{1}{2} \right]$ ,  $f(x) = h(x) + h\left(\frac{-x}{1-x}\right)$

Donc  $f'(x) = h'(x) - \frac{1}{(1-x)^2} h'\left(\frac{-x}{1-x}\right)$  pour  $x \in \left] -1, \frac{1}{2} \right[$ .

Donc  $f'(0) = 0$  et si  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{1}{(1-x)^2} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{1-x}\right)}{\frac{x}{1-x}} = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}$ .

Donc  $f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} \left( -1 + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ . Cela reste vrai pour  $x = 0$ .

On a donc comme  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2} \ln^2(1-x)$  pour  $x \in \left] -1, \frac{1}{2} \right[$ .

Enfin,  $h(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2}$  pour  $|y| \leq 1$ . Si on note  $U_n(y) = \frac{y^n}{n^2}$ , alors chaque  $U_n$  est continue sur  $[-1, 1]$ , et

$0 \leq \|U_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ , donc  $\sum_{n \geq 1} U_n$  converge normalement sur  $[-1, 1]$  et  $h$  est continue sur  $[-1, 1]$ , donc  $f$  est continue

sur  $\left[ -1, \frac{1}{2} \right]$  et l'égalité  $f(x) = -\frac{1}{2} \ln^2(1-x)$  reste vraie pour  $x = -1$  et  $x = \frac{1}{2}$ .

Donc  $\forall x \in \left[ -1, \frac{1}{2} \right], f(x) = -\frac{1}{2} \ln^2(1-x)$

De même, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) = h(x) + h(1-x)$ .

Donc si  $x \in ] 0, 1[$ ,  $g'(x) = h'(x) - h'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x}$ .

Donc  $g(x) = -\ln(x) \ln(1-x) + C$ , où  $C$  est une constante.

Or  $g$  est continue sur  $[0,1]$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} C = g(0) = \frac{\pi^2}{6}$ .

Donc  $\forall x \in ]0,1[ , g(x) = -\ln(x)\ln(1-x) + \frac{\pi^2}{6}$  et  $g(0) = g(1) = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Séance 4 : Jeudi 4 Juin 5

#### Cours : revoir le chapitre 7

**Exercice 19 (oral Mines 25, Niels,3) :**

- 1) Déterminer  $R\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right)$ .
- 2) Pour  $x \in ]-R, R[$ , calculer  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ .

Ind :

- 1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , poser  $a_{3n} = \frac{1}{(3n)!}$  et  $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$ . Etudier quand  $(a_n r^n)$  est bornée.
- 2) Montrer que  $S$  est solution d'une équation différentielle du second ordre et la résoudre.

1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_{3n} = \frac{1}{(3n)!}$  et  $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$ . Soit  $r > 0$ . On pose  $U_n = a_n r^n$ . Par croissance comparée,  $U_{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $(U_{3n})$  est bornée et  $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |U_{3n}| \leq M$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{3n}| \leq M$  et la suite  $(a_n r^n)$  est toujours bornée, donc  $R\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right) = +\infty$

2) Soit  $x \in ]-R, R[ = \mathbb{R}$ .  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  est la somme d'une série entière donc est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on peut

dériver terme à terme. Il vient  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$  et  $S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) + S'(x) + S''(x) = e^x$ , avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

On note  $(H) : y'' + y' + y = 0$  et  $(E) : y'' + y' + y = e^x$ .

On résout  $(C) : x^2 + x + 1 = 0$ .

On a  $\Delta = 1 - 4 = -3$  donc les solutions de  $(C)$  sont  $q = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $s = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Donc  $S_H = \left\{ x \rightarrow e^{-\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right), A, B \in \mathbb{R} \right\}$

1 n'est pas solution de  $(C)$ . On cherche une solution de  $(E)$  de la forme  $g(x) = C e^x$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ .

$g$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $C + C + C = 1$ . On prend donc  $C = \frac{1}{3}$ .

Une solution particulière de  $(E)$  est donc  $x \mapsto \frac{1}{3}e^x$ .

Donc il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $S(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}e^x$

De plus,  $S(0) = A + \frac{1}{3}$ , donc  $A = \frac{2}{3}$ .

Enfin,  $S'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( -\frac{1}{2} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -A \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \right) + \frac{1}{3}e^x$ .

Donc  $S'(0) = -\frac{1}{2}A + B\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} = 0$  et  $B = 0$ . Donc  $S(x) = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}e^x$

**Exercice 20 (oral Mines 25, Ambre, 3) :** Montrer l'existence de  $I = \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$  et la calculer.

Ind : utiliser un développement en série entière, puis le théorème d'intégration terme à terme.

On pose  $f(x) = \ln(x) \ln(1-x)$ .  $f$  est continue sur  $]0, 1[$ .

De plus,  $f(x) \sim -\ln(x)$ , donc  $f$  est intégrable en 0.

En outre, on pose  $x = 1-h$ .  $f(1-h) = \ln(1-h) \ln(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\ln(h)$ , donc  $h \mapsto f(1-h)$  est intégrable en 0 et ainsi,

$f$  est intégrable en 1. Donc  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et  $I$  existe bien.

On effectue un développement en série entière :  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$  pour  $x \in ]0, 1[$

Donc  $I = -\int_0^1 \ln(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} dx$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $W_n(x) = \frac{x^n}{n} \ln(x)$ .

On veut utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

$x \mapsto x^n \ln(x)$  est continue sur  $]0, 1[$  et  $x^n \ln(x) \rightarrow 0$ , donc  $x \mapsto x^n \ln(x)$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et  $W_n$  aussi.

$\sum_{n \geq 1} W_n$  converge simplement sur  $]0, 1[$  (vers  $f$  qui est bien continue par morceaux).

On note  $J_n = \int_0^1 x^n \ln(x) dx$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On la calcule en intégrant par parties : on pose  $a(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ,  $b(x) = \ln(x)$ .

Alors  $a(x)b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $a(x)b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ , donc comme  $J_n$  est convergente,  $J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$ .

Donc  $\int_0^1 |W_n(x)| dx = -\frac{1}{n} J_n = \frac{1}{n(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} > 0$ , et comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$  converge,  $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |W_n(x)| dx$  converge.

Donc  $I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} J_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  (les deux séries convergent)

Or  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) = 1$  et  $I = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

**Exercice 21 (oral Centrale 25, Violette,4)**

- 1) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $\int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt$  converge et la calculer.
- 2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n U_n$  converge.
- 3) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0,1]$  par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n U_n x^{n+1}$ . Montrer que  $f$  est définie et continue.
- 4) Expliciter  $f(x)$  pour  $x \in [0,1]$ .

Ind :

- 1) Effectuer le changement de variable  $t = u^2$ .
- 2) Utiliser le théorème spécial sur les séries alternées. Expliciter  $U_{n+1} - U_n$  pour trouver son signe et majorer  $U_n$  à l'aide d'une intégrale.
- 3) Etablir la convergence uniforme à l'aide du théorème spécial sur les séries alternées.
- 4) Partir de  $\int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt$  et utiliser deux développements en séries entières et un produit de Cauchy.  
Puis permuter série et intégrale en prenant d'abord  $x \in [0,1[$ .

- 1) On pose  $t = u^2 = \varphi(u)$ .  $\varphi$  est bien  $C^1$ , strictement croissante et bijective de  $[0, \sqrt{x}]$  sur  $[0, x]$  Alors

$$dt = 2u du \text{ et } \int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt \text{ a même nature que } J(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\text{Arctan}(u)}{u(1+u^2)} u du = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\text{Arctan}(u)}{(1+u^2)} du .$$

Comme  $u \mapsto \frac{\text{Arctan}(u)}{(1+u^2)}$  est continue sur  $[0, \sqrt{x}]$ ,  $J(x)$  est convergente, donc  $\int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt$  aussi.

$$\text{De plus, } \int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\text{Arctan}(u)}{(1+u^2)} du = \left[ \text{Arctan}^2(u) \right]_0^{\sqrt{x}} = \text{Arctan}^2(\sqrt{x})$$

- 2) On cherche à appliquer le théorème spécial sur les séries alternées.

- Il s'agit bien d'une série alternée.

- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ .

$$\text{Il vient } U_{n+1} - U_n = \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{(n+2)(2n+3)} .$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{(n+2)} \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{(2n+3)} \right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{(2n+3)} \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(2n+3)} \geq 0, \text{ donc } U_{n+1} - U_n \leq 0 \text{ et } (U_n) \text{ est décroissante.}$$

- On utilise une comparaison avec une intégrale pour majorer  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ . Soit  $h$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$h(t) = \frac{1}{2t+1} . \text{ Elle est décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et pour } k \geq 1, \frac{1}{2k+1} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{2t+1} dt .$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \leq 1 + \int_0^n \frac{1}{2t+1} dt . \text{ Donc } 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} \ln(2n+1) \right) .$$

Donc par encadrement,  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc le théorème s'applique et  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n U_n$  converge

3) Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $g_n(x) = (-1)^n U_n x^{n+1}$ .

- Chaque  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$ .
- Pour  $x = 1$ , avec 2), on sait que  $\sum_{n \geq 0} g_n(1)$  converge.

Pour  $x \in [0, 1[$ , on constate que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n U_n x^{n+1}$  est également alternée, avec  $(U_n x^{n+1})$  décroissante et de limite nulle. Donc  $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$  converge avec le théorème spécial sur les séries alternées (elle converge même absolument). Donc  $f$  est définie sur  $[0, 1]$ .

- On utilise la majoration du reste : si  $x \in [0, 1]$  est fixé, alors

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k U_k x^{k+1} \right| \leq |(-1)^{n+1} U_{n+1} x^{n+2}| \leq U_{n+1}.$$

Donc  $0 \leq \|R_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq U_{n+1}$  et  $(R_n)$  converge uniformément vers 0.

Donc  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est définie et continue sur } [0, 1]}$ .

4) On cherche à relier les questions précédentes et on prend  $x \in [0, 1]$ .

On utilise des développements en séries entières pour  $t \in ]0, 1[$  :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \text{ et } \text{Arctan}(\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} \text{ et } \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1}.$$

$$\text{Cauchy : } \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}. \text{ Donc } \int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \right) dt.$$

On prend  $x \in [0, 1[$  fixé et on pose  $k_n(t) = (-1)^n t^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$  pour  $t \in [0, x]$ .

Alors chaque  $k_n$  est continue sur  $[0, x]$ . De plus,  $\|k_n\|_{\infty, [0, x]} = x^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \leq (n+1)x^n$ .

Or  $(n+1)x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , donc  $\sum_n k_n$  converge normalement donc uniformément sur  $[0, x]$ .

Par théorème d'interversion série-intégrale sur un segment :

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \left( (-1)^n t^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n U_n x^{n+1} = f(x).$$

Donc avec 1),  $f(x) = \text{Arctan}^2(\sqrt{x})$ . Mais 3) donne la continuité de  $f$  en 1, donc le résultat reste vrai pour  $x = 1$  en prenant la limite quand  $x$  tend vers 1. Donc  $\boxed{\forall x \in [0, 1], f(x) = \text{Arctan}^2(\sqrt{x})}$

**Exercice 22 (oral Centrale 25, Niels, 4) :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . En cas de convergence, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \frac{x^n}{n!}.$$

- 1) Déterminer  $R\left(\sum_{n \geq 1} S_n \frac{x^n}{n!}\right)$ .
- 2) Trouver une équation différentielle dont  $f$  est solution.

3) Pour  $x > 0$ , déterminer une expression de  $f$  à l'aide de  $\int_0^x e^{-t} \ln(t) dt$ .

4) On suppose  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Montrer que  $e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

Ind :

1) Etudier la limite de  $\left( S_n \frac{r^n}{n!} \right)$  lorsque  $r > 0$ .

2) Dériver terme à terme la somme de cette série entière.

3) Résoudre l'équation par variation de la constante. Utiliser une intégration par parties.

4) Etudier  $\Delta(x) = \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n - 1 \right| = \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - 1)}{n!} x^n \right|$  en coupant la somme en deux et en procédant par double détente.

1) Soit  $r > 0$ . Alors  $0 \leq S_n \frac{r^n}{n!} \leq n \frac{r^n}{n!}$ . Or  $n \frac{r^n}{n!} = r \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par croissance comparée.

Donc  $S_n \frac{r^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et la suite  $\left( S_n \frac{r^n}{n!} \right)$  est toujours bornée. Donc  $R = R \left( \sum_{n \geq 1} S_n \frac{x^n}{n!} \right) = +\infty$

2) Avec 1),  $f$  est  $C^\infty$  sur  $] -R, R[ = \mathbb{R}$  et on peut dériver terme à terme. Donc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left( S_{n-1} + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Donc  $x f'(x) = x f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $x y' = x y + e^x - 1$

3) On prend  $x > 0$ . On résout (E) :  $y'(x) = y(x) + \frac{e^x - 1}{x}$ , avec (H) :  $y' = y$ .

$$S_{(H)} = \left\{ x \mapsto A e^x, A \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche une solution particulière de (E) de la forme  $h(x) = A(x)e^x$ , avec  $A$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$h$  est solution de (E) si et seulement si  $\forall x > 0, A'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$

Il suffit de prendre  $A(x) = \ln(x) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$

On intègre par parties et  $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[ \ln(t) e^{-t} \right]_1^x + \int_1^x \ln(t) e^{-t} dt = \ln(x) e^{-x} + \int_1^x \ln(t) e^{-t} dt$ .

On prend  $A(x) = \ln(x) (1 - e^{-x}) - \int_1^x \ln(t) e^{-t} dt$ . On obtient  $S_{(E)} = \left\{ x \mapsto (A(x) + C) e^x, C \in \mathbb{R} \right\}$ .

On a donc un réel  $C$  tel que  $\forall x > 0, f(x) = \left( \ln(x) (1 - e^{-x}) - \int_1^x \ln(t) e^{-t} dt + C \right) e^x$ .

Comme  $f(0) = 0$ , et que  $f$  est continue en  $0$ , on utilise  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

$\ln(x) (1 - e^{-x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$ , donc  $\ln(x) (1 - e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

$\ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ , donc  $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$  est intégrable en 0 et  $\int_1^x \ln(t)e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_1^0 \ln(t)e^{-t} dt$ .

Donc  $C = -\int_0^1 \ln(t)e^{-t} dt$  et  $\forall x > 0, f(x) = \left( \ln(x)(1 - e^{-x}) - \int_0^x \ln(t)e^{-t} dt \right) e^x$

4) On suppose  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .  $\Delta(x) = \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n - 1 \right| = \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - 1)}{n!} x^n \right|$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de limite, soit  $N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - 1| \leq \varepsilon$ .

Alors si  $x > 0$  :  $\Delta(x) \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n - 1|}{n!} x^n \leq \sum_{n=0}^N \frac{|a_n - 1|}{n!} x^n e^{-x} + e^{-x} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n$ .

Donc  $\Delta(x) \leq \sum_{n=0}^N \frac{|a_n - 1|}{n!} x^n e^{-x} + \varepsilon$ . On procède par double détente et on utilise une seconde fois la définition

de limite :  $\sum_{n=0}^N \frac{|a_n - 1|}{n!} x^n e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc pour  $x$  assez grand,  $0 \leq \Delta(x) \leq 2\varepsilon$ , donc  $\Delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $\boxed{e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$

**Exercice 23 (oral Centrale 25, Tom, Marin,4) :** Soit  $I = [0, R[$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On note  $E$  l'ensemble des applications  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $I$  telles que pour tout entier naturel  $n$ , la dérivée  $n$ -ième  $f^{(n)}$  de  $f$  soit positive sur  $I$ , c'est-à-dire :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$ . Ces fonctions sont dites absolument monotones sur  $I$ .

Pour  $x \in [0, R[$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

1) Soit  $f, g \in E$ . Montrer que  $(f + g) \in E$  et que  $fg \in E$ .

2) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral. Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$  est croissante sur  $]0, R[$ .

3) Montrer que la série de Taylor de  $f$  converge simplement vers  $f$  sur  $I = [0, R[$ .

4) Montrer que  $\tan$  est développable en série entière sur  $J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

Ind :

1) Penser à la formule de Leibniz.

2) Effectuer un changement de variable dans l'intégrale pour obtenir une expression de  $\frac{R_n(x)}{x^n}$ .

3) Considérer  $x \in [0, R[$  et prendre  $y \in ]x, R[$ . Utiliser 2).

4) Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \tan^{(n)}(x) \geq 0$  à l'aide d'une récurrence, puis utiliser ce qui précède et l'imparité.

1) Soit  $f, g \in E$ . Alors  $f + g$  est  $C^\infty$  sur  $[0, R[$  et pour  $x \in [0, R[$ ,  $(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$ .

De plus, avec la formule de Leibniz, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $fg$  est  $C^n$  sur  $I$  et pour  $x \in I$  :

$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0$ . Donc  $fg$  est  $C^\infty$  sur  $I$  et  $\boxed{fg \in E}$

2) On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral : soit  $a$  et  $b$  des réels quelconques d'un intervalle  $I$ , et soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc pour  $x \in ]0, R[$  :  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) dt.$

On effectue le changement de variable  $t = xu$  et il vient  $R_n(x) = x \int_0^1 \frac{(x-xu)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(xu) du.$

Donc  $\frac{R_n(x)}{x^n} = x^2 \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(xu) du.$  On prend maintenant  $0 < x < y < R.$

Alors  $\frac{R_n(x)}{x^n} \leq y^2 \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(xu) du.$  Or  $f^{(n+2)}$  est positive sur  $[0, R[$ , donc  $f^{(n+1)}$  est croissante sur

$[0, R[$  et  $\frac{R_n(x)}{x^n} \leq y^2 \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(yu) du$  et  $\frac{R_n(x)}{x^n} \leq \frac{R_n(y)}{y^n}.$

Donc  $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$  est croissante sur  $]0, R[$ .

3) Pour  $x = 0$ , il vient  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$

On prend maintenant  $x \in [0, R[$  et on prend  $y \in ]x, R[$ .

Alors  $R_n(x) \leq R_n(y) \frac{x^n}{y^n}.$  De plus,  $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$  car  $f^{(n+1)}$  est à valeurs positives.

De plus,  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x).$  Donc  $0 \leq R_n(x) \leq R_n(y) \frac{x^n}{y^n} \leq f(y) \frac{x^n}{y^n}.$

Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ , donc  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$

Donc la série de Taylor de  $f$  converge simplement vers  $f$  sur  $I = [0, R[$ .

4) On prend  $I = [0, R[$ , avec  $R = \frac{\pi}{2}$ . On sait que  $\tan' = 1 + \tan^2$ . Donc on prouve par récurrence forte :

$P(n) : \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0.$

- $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.
- Soit  $n \geq 1$ . On suppose que pour tout  $k \leq n$ ,  $P(k)$  est vraie.

Alors avec Leibniz  $\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x) \geq 0$  et  $P(n+1)$  est vraie.

Donc  $\tan$  est absolument monotone et avec 3),  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tan(x).$

Donc  $\sum_{k \geq 0} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$  converge et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k = \tan(x)$

Par imparité, si  $x \in J = \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ , alors  $\tan(x) = -\tan(-x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

Or  $\tan$  est impaire et  $\forall x \in J, \tan(-x) = -\tan(x)$ .

Donc en dérivant, par récurrence,  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in J, \tan^{(k)}(-x) = (-1)^k \tan^{(k)}(x)$ .

Donc  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k = \tan(x)$  et  $\boxed{\tan \text{ est développable en série entière sur } J = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[}$

**Exercice 24 (oral Centrale 25, Laurène,5).** On considère, pour  $x \in \mathbb{R} : S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{inx}$ .

- 1) Montrer  $S$  est bien définie et que  $S$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^k$ . Montrer que  $u_k$  est bien défini et que  $u_k = O(k!)$ .
- 3) Montrer que  $S$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

Ind :

- 1) Appliquer le théorème de dérivation de la somme des séries de fonctions.
- 2) Effectuer une comparaison somme-intégrale. Couper la somme en deux et majorer chaque terme.
- 3) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour majorer  $\Delta_N(x) = S(x) - \sum_{p=0}^N \frac{S^{(p)}(0)}{p!} x^p$  à l'aide des questions précédentes.

- 1) On cherche à appliquer le théorème de dérivation de la somme des séries de fonctions. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on prouve que  $S$  est  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $U_n(x) = e^{-n} e^{inx}$ .

- Chaque  $U_n$  est bien de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , donc de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$ .
- $U_n(x) = e^{-n} e^{inx}$ , donc  $U_n'(x) = (in)e^{-n} e^{inx}$ , puis par récurrence pour  $k \in \mathbb{N}$   $U_n^{(k)}(x) = (in)^k e^{-n} e^{inx}$

$$\text{Il vient } \|U_n^{(k)}\|_\infty = n^k e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} > 0$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, donc  $\sum U_n^{(k)}$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, pour  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $\sum U_n^{(k)}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et  $\sum U_n^{(p)}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$

Donc par théorème de dérivation des séries de fonction,  $\boxed{S \text{ est définie et } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ .

- 2) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Tout d'abord,  $n^k e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et  $\sum n^k e^{-n}$  converge.

On effectue une comparaison somme-intégrale. On pose  $f_k(t) = e^{-t} t^k$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ .  $f_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f_k'(t) = e^{-t}(k-t)t^{k-1}$ , donc  $f_k$  est décroissante sur  $[k, +\infty[$  et croissante sur  $[0, k]$ .

Donc pour  $n \leq k$ ,  $f_k(n) \leq \int_n^{n+1} f_k(t) dt$  et pour  $n \geq k+1$ ,  $f_k(n) \leq \int_{n-1}^n f_k(t) dt$ .

$$\text{Donc } u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^k = \sum_{n=0}^k e^{-n} n^k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} e^{-n} n^k \leq \int_0^k f_k(t) dt + \int_k^{+\infty} f_k(t) dt \leq 2 \int_0^{+\infty} f_k(t) dt$$

Or  $\int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \Gamma(k+1) = k!$  (avec des intégrations par parties).

On a donc  $0 \leq \frac{u_k}{k!} \leq 2$  et  $\boxed{u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O(k!)}$

3) Soit  $x \in ]-1, 1[$ , fixé. On sait que si  $S$  est développable en série entière, alors  $S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{S^{(p)}(0)}{p!} x^p$ .

Avec 1), il vient pour  $p \in \mathbb{N}$  :  $S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^p e^{-n} e^{inx}$ , donc  $S^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^p e^{-n}$ .

On calcule donc  $\Delta_N(x) = S(x) - \sum_{p=0}^N \frac{S^{(p)}(0)}{p!} x^p$  et on veut prouver  $\Delta_N(x) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

On utilise l'inégalité de Taylor Lagrange en se plaçant sur  $[-|x|, |x|]$  ( $S$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ) :

On choisit  $a = 0$ ,  $b = x$ . Pour  $t \in [-|x|, |x|]$ ,  $|S^{(N+1)}(t)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^{N+1} e^{-n} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n^{N+1} e^{-n} = U_{N+1} \leq 2(N+1)!$  (ces séries convergent et on utilise la question précédente).

Il vient donc  $|\Delta_N(x)| \leq 2|x|^{N+1}$ , et  $\Delta_N(x) \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . Donc  $\sum_{p=0}^N \frac{S^{(p)}(0)}{p!} x^p \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} S(x)$

On conclut que  $\boxed{S \text{ est développable en série entière sur } ]-1, 1[ \text{, et que } S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^p e^{-n} \right) x^p}$ .

## Séance 5 : Lundi 8 Juin 5

### Cours : revoir le chapitre 10

#### Exercice 25 (Oral IMT 25, Ninon,3) :

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2} dt$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Calculer  $f'$  sur  $]0, +\infty[$ .

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- 2) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour la domination, justifier  $|2xt| \leq 1+t^2 x^2$ .
- 3) Décomposer en éléments simples en posant  $u = t^2$  dans le cas  $x \neq 1$ , puis utiliser la continuité en 1.

1) On pose  $g(x, t) = \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2}$ .

On vérifie les différentes hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $a > 0$ . Pour  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in [-a, a]$ ,  $|g(x, t)| \leq \frac{\ln(1+a^2 t^2)}{1+t^2} = \varphi(t)$ .

$\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , car continue sur  $\mathbb{R}_+$  et telle que  $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ , avec  $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$  intégrable en  $+\infty$ .

En effet,  $t^{3/2} \frac{\ln(1+a^2 t^2)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(a^2 t^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{a^2 t^2}\right)}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ .

Donc par théorème de continuité des intégrales à paramètres,  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$

2) On vérifie les différentes hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on sait avec 1) que  $t \mapsto g(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = 2x^2 \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$ .

On sait que  $|2xt| \leq 1+t^2x^2$ , car  $(|tx|-1)^2 = t^2x^2 - 2|tx| + 1 \geq 0$ .

On se place sur un segment  $[-a, a]$ , avec  $a > 0$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in [-a, a]$ , il vient  $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{a}{(1+t^2)} = \varphi(t)$ , où  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , puisque

$\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = 2x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} dt$ .

3) Tout d'abord,  $f$  est paire. On peut donc étudier sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $x \in ]0, +\infty[$

On décompose en éléments simples si  $x^2 \neq 1$  :

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{(1+u)} - \frac{x^2}{(1-x^2)} \frac{1}{(1+x^2u)}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{(1+t^2)} - \frac{x^2 t}{(1+x^2 t^2)} \right) dt.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \left[ \ln\left(\frac{1+t^2}{1+x^2 t^2}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{x^2}{1-x^2} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2 \ln(x) \frac{x^2}{1-x^2}.$$

De plus, comme  $f'$  est continue en 1,  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} f'(1)$ .

$$\text{On pose } x = 1+h : f'(1+h) = -2 \ln(1+h) \frac{(1+h)^2}{1-(1+h)^2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2h}{-2h}.$$

Donc  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$  et par unicité de la limite,  $f'(1) = 1$

**Exercice 26 (Oral Mines 25, Igor,3) :**  $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t} dt$ .

- 1) Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Déterminer, si elles existent, les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

Ind :

- 1) Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- 2) Utiliser le théorème de convergence dominée. Pour la limite en  $0$ , couper l'intégrale en deux et minorer

$$\cos(t) \text{ sur } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

- 1) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $t \mapsto \frac{\cos(t)}{x+t} = g(x, t)$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On cherche ensuite à appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x \mapsto g(x, t)$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Soit un segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ . Alors pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $x \in [a, b]$ ,  $|g(x, t)| \leq \frac{1}{(a+t)} = \varphi(t)$ , où  $\varphi$  est continue donc intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Donc la restriction de  $f$  à tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  est continue, et  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) On cherche à appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu.  $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t} dt$

Pour  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{\cos(t)}{x+t} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Pour  $x \geq 1$ ,  $\left| \frac{\cos(t)}{x+t} \right| \leq 1 = h(t)$ , où  $h$  est intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Donc par convergence dominée,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

On cherche à étudier la limite en  $0^+$ . On fixe  $x > 0$ . Alors  $f(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{x+t} dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t} dt$ .

$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{x+t} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{x+t} dt$ , donc  $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{x+t} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \ln\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \ln(x) \right)$  et  $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{x+t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .

De plus, pour  $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq \frac{\cos(t)}{x+t} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{4}{\pi}$ . Donc  $0 \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t} dt \leq 1$ .

Dès lors, par somme,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .

**Exercice 27 (oral centrale 25, Alice, 4) :** Soit  $g$  définie pour  $x > 0$  par  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+x} dt$ .

- 1) Montrer que  $g$  est bien définie et  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Déterminer les limites de  $g$  en  $0$  et  $+\infty$ .

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
- 2) Pour la limite en  $+\infty$ , utiliser le théorème de convergence dominée.  
Pour la limite en  $0$ , couper l'intégrale en deux avec Chasles et utiliser le théorème de convergence dominée sur la seconde partie. Pour étudier  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2+x} dt$ , montrer par exemple  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$ .

3) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $h(x, t) = \frac{\sin(t)}{t^2+x}$  pour  $x > 0$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On vérifie les différentes hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$h(x, t) = \sin(t)(t^2+x)^{-1}. \text{ Il vient alors } \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)(t^2+x)^{-2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = -(-2)\sin(t)(t^2+x)^{-3},$$

$$\text{donc par récurrence, } \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k k! \sin(t)(t^2+x)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k k! \sin(t)}{(t^2+x)^{k+1}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

- Soit  $x > 0$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .  $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus,  $t^{3/2} \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^{3/2} k!}{(t^2 + x)^{k+1}}$ , donc par croissance comparée et par encadrement,

$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$  et comme  $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$  est intégrable en  $+\infty$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$  l'est aussi en  $+\infty$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Soit  $a > 0$ . Alors  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq a, \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \frac{n!}{(t^2 + a)^{n+1}} = \varphi(t)$ , où  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , avec un

raisonnement analogue à celui du point précédent.

Donc la restriction de  $g$  à tout  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ) est de classe  $C^n$ , donc  $g$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Finalement,  $g$  est bien définie et  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- 4) On veut montrer  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \rightarrow 0$  avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

- Pour  $t \in \mathbb{R}_+, \frac{\sin(t)}{t^2 + x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- Pour  $t \in \mathbb{R}_+, \text{ et } x \geq 1, \left| \frac{\sin(t)}{t^2 + x} \right| \leq \frac{1}{t^2 + 1} = \varphi(t)$ .  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est continue et  $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$  Donc par convergence dominée,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

On étudie la limite en 0 de  $g$ . Tout d'abord,  $\frac{\sin(t)}{t^2 + x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t^2}$ , mais  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$  n'est pas intégrable en 0 donc on ne pourra pas utiliser le théorème de convergence dominée directement.

Il vient  $g(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt$ .

Tout d'abord,  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$  (car  $\sin$  est concave sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc au-dessus de la corde

joignant les points d'abscisse 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ). Donc  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{t}{t^2 + x} dt$ , et  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \geq \frac{1}{\pi} \left[ \ln(t^2 + x) \right]_0^1$ .

Donc  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \geq \frac{1}{\pi} (\ln(1+x) - \ln(x))$  et  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .

De plus, par convergence dominée,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  (avec  $\left| \frac{\sin(t)}{t^2 + x} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ , et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  intégrable en

$[1, +\infty[$ ). Donc par somme,  $g(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 + x} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$

**Exercice 28 (oral Mines 25, Tom, 3) :** On considère, pour  $x > 0 : F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$ .

- 1) Montrer que  $F$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Etablir que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$ .
- 3) Déterminer la limite et équivalent de  $F(x)$  en  $+\infty$ .
- 4) Déterminer un équivalent de  $F$  en  $0^+$ .

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres en se plaçant sur  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ .
- 2) Ecrire  $\frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1}$  sous forme de somme d'une série entière et utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
- 3) Utiliser le théorème de la double limite.
- 4) Effectuer une comparaison somme-intégrale.

1) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $h(x, t) = \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1}$  pour  $x > 0$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .

On vérifie les différentes hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$h(x, t) = \sin(t)(e^{xt} - 1)^{-1}. \text{ Il vient alors } \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -t e^{xt} \sin(t)(e^{xt} - 1)^{-2},$$

- Soit  $x > 0$ .  $t \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$h(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{xt} = \frac{1}{x} \text{ donc } h(x, t) = O(1), \text{ donc } t \mapsto h(x, t) \text{ est intégrable en } 0.$$

De plus,  $h(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , et  $t \mapsto h(x, t)$  est intégrable en  $+\infty$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Soit  $a > 0$ . Alors  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \geq a, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\sin(t)|}{e^{at} - 1} = \varphi(t)$ , où  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec un raisonnement analogue à celui du point précédent.

Donc la restriction de  $F$  à tout  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ) est de classe  $C^1$ , donc  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Finalement,  $F$  est bien définie et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) Soient  $x, t \in \mathbb{R}_+^*$  :  $\frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} = \frac{\sin(t)}{e^{xt}} \frac{1}{1 - e^{-xt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t) e^{-(n+1)xt}$  en développant en série entière.

On utilise le théorème d'intégration terme à terme. On pose  $U_n(t) = \sin(t) e^{-(n+1)xt}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- $0 \leq |U_n(t)| \leq e^{-(n+1)xt}$ , donc par majoration, chaque  $U_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- $\frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t) e^{-(n+1)xt}$  donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- $0 \leq \int_0^{+\infty} |\sin(t) e^{-(n+1)xt}| dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)xt} dt$  car  $\forall u \in \mathbb{R}_+, |\sin u| \leq |u|$ .

On calcule  $J_n = \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)xt} dt$  en intégrant par parties. Soient  $a(t) = t$  et  $b'(t) = e^{-(n+1)xt}$

$$a(t)b(t) = \frac{-t}{(n+1)x} e^{-(n+1)xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \text{ et } a(0)b(0) = 0.$$

Donc  $J_n = \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)xt} dt = \frac{1}{(n+1)x} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)xt} dt = \frac{1}{(n+1)^2 x^2}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} J_n$  converge, donc par majoration,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\sin(t) e^{-(n+1)xt}| dt. \text{ Donc } F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-(n+1)xt} dt.$$

On calcule  $K_n = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-(n+1)xt} dt = \text{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{i-(n+1)x t} dt \right) = \text{Im} \left[ \frac{e^{i-(n+1)x t}}{i - (n+1)x} \right]_0^{+\infty} = \text{Im} \left( \frac{1}{(n+1)x - i} \right)$ , avec

$$\left| e^{i-(n+1)x t} \right| = e^{-(n+1)xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0. \text{ Donc } K_n = \text{Im} \left( \frac{(n+1)x + i}{(n+1)^2 x^2 + 1} \right) = \frac{1}{(n+1)^2 x^2 + 1}.$$

On conclut que  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} K_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$

3) On remarque tout d'abord que pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Donc par encadrement,  $\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$

On remarque que  $\frac{1}{1+n^2x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$  et on cherche à utiliser le théorème de la double limite.

On  $x^2 F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2x^2+1}$ . On pose alors  $V_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$V_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\forall x > 0, |V_n(x)| = \frac{1}{n^2}$ , donc  $0 \leq \|V_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ , donc par majoration,  $\sum_{n \geq 1} V_n$  converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc  $x^2 F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2x^2+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$  et  $\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}}$

4) On fait une comparaison avec une intégrale. On pose  $g(t) = \frac{1}{1+t^2x^2}$  pour  $x, t \in \mathbb{R}_+^*$ .

Elle est positive, décroissante et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (avec  $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2x}$ ).

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n) \leq \int_{n-1}^n g(t) dt$  et comme tous les termes concernés convergent,

$\int_1^{+\infty} g(t) dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} g(t) dt$ . Donc  $\frac{1}{x} \left( \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \right) \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2x}$  et par encadrement,  $\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$

### Exercice 29 (oral Mines 25, Violette,5) :

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. Pour  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y) f(y) dy$ .

- Déterminer la limite de  $g$  en 0.
- On suppose que  $f$  possède une limite en  $+\infty$ . Que dire de la limite de  $g$  en  $+\infty$  ?

Ind :

- Effectuer un changement de variable pour ne plus avoir  $x$  dans les bornes de l'intégrale.
- Trouver la limite si  $f$  est une fonction constante. Puis traiter le cas où  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  en revenant à la définition de limite et en coupant l'intégrale en deux. Généraliser au cas  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}$  en remarquant que  $f(t) = a + f(t) - a$ .

1) On pose  $y = xu$ . Alors  $dy = x du$ . Donc  $g(x) = \int_0^1 \cos(x(1-u)) f(xu) du$ .

On prend  $x \leq 1$  pour étudier la limite en 0.

On pose  $h(x,u) = \cos(x(1-u)) f(xu)$  lorsque  $x \in ]0,1]$  et  $u \in [0,1]$ .

Alors par continuité,  $f(xu) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ , donc il vient  $h(x,u) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ .

De plus,  $f$  est continue sur le segment  $[0,1]$  donc bornée : soit  $M \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0,1], |f(t)| \leq M$ .

Il vient alors  $|h(x,u)| = |\cos(x(1-u)) f(xu)| \leq M$  et  $u \mapsto M$  est intégrable sur  $[0,1]$ .

Donc par théorème de convergence dominée à paramètre continu,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$

2) On suppose  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a \in \mathbb{R}$ . Si on avait  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a$ , on aurait  $g(x) = a \int_0^1 \cos(x(1-u)) dx$ .

Donc  $g(x) = -\frac{a}{x} [\sin(x(1-u))]_0^1 = a \frac{\sin x}{x}$  et  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Essayons de le montrer dans le cas général.

On traite le cas où  $f(t) \rightarrow 0$ . On fixe  $\varepsilon > 0$ . Soit  $A > 0, \forall t \geq A, |f(t)| \leq \varepsilon$ .

Alors  $g(x) = \int_0^{A/x} \cos(x(1-u))f(xu) du + \int_{A/x}^1 \cos(x(1-u))f(xu) du$ .

Or  $f$  est continue sur le segment  $[0, A]$  donc bornée : soit  $M \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, A], |f(t)| \leq M$ .

Donc  $\left| \int_0^{A/x} \cos(x(1-u))f(xu) du \right| \leq \int_0^{A/x} |\cos(x(1-u))f(xu)| du \leq \frac{MA}{x}$ .

De plus,  $\left| \int_{A/x}^1 \cos(x(1-u))f(xu) du \right| \leq \int_{A/x}^1 |f(xu)| du \leq 1 \cdot \varepsilon$  car si  $u \geq \frac{A}{x}$ , alors  $xu \geq A$ .

Donc  $|g(x)| \leq \frac{MA}{x} + \varepsilon$ . On utilise la double détente :

$\frac{MA}{x} + \varepsilon \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \varepsilon$ , donc on prend  $B > 0, \forall x \geq B, \frac{MA}{x} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ .

Pour  $x \geq B$ ,  $|g(x)| \leq 2\varepsilon$ , donc si  $f(t) \rightarrow 0$ , alors  $g(x) \rightarrow 0$ .

On revient au cas général et on écrit  $f(t) = a + f(t) - a$ . Alors  $k(t) = f(t) - a \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Alors  $g(x) = a \int_0^1 \cos(x(1-u)) dx + \int_0^1 \cos(x(1-u))k(xu) du \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$  par somme.

Donc  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 30 (oral Mines 25, Naël,5) :** Soit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} dt$  pour  $x > 0$ .

- 1) Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Quelle est la limite de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .
- 3) Trouver un équivalent de  $f$  en 0.

Ind :

- 1) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour la domination, se placer sur  $[a, +\infty[$  et séparer les cas  $t \geq 1$  et  $t \in ]0, 1]$ .
- 2) Pour la limite en  $+\infty$ , minorer  $f(x)$  à l'aide de  $\forall t \geq 1, 1+t+t^{x+1} \leq 3t^{x+1}$ . Pour la limite en 0, procéder par convergence dominée en distinguant suivant la position de  $t$  par rapport à 1.
- 3) Faire le changement de variable  $u = t^x$  et conclure par convergence dominée.

1) Pour  $x > 0$  et  $t > 0$ , on pose  $g(x, t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ . On veut utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout  $t > 0$ ,  $x \mapsto g(x, t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour  $x > 0$ ,  $t \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $g(x, t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ , avec  $x+1 > 1$ . Donc  $t \mapsto g(x, t)$  est intégrable en  $+\infty$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$  et sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour  $x > 0$  et  $t > 0$ ,  $g(x, t) = \frac{1}{1+t+e^{(x+1)\ln(t)}}$ , donc  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-\ln(t)t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})^2}$ .

On prend  $a > 0$  et on considère  $x \in [a, +\infty[$ .

$$\text{Alors } \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln(t)|(1+t+t^{x+1})}{(1+t+t^{x+1})^2} \leq |\ln(t)| \frac{1}{(1+t+t^{x+1})} \text{ Pour } t \in ]0, 1], \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(t)|.$$

$$\text{Pour } t \geq 1, t^{x+1} = e^{(x+1)\ln(t)} \geq e^{(a+1)\ln(t)}, \text{ donc } \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(t)| \frac{1}{(1+t+t^{a+1})}$$

On pose  $\varphi(t) = |\ln(t)|$  si  $t \in ]0, 1]$  et  $\varphi(t) = |\ln(t)| \frac{1}{(1+t+t^{a+1})}$  si  $t \geq 1$  (on obtient bien la même valeur en 1 et  $\varphi$  est continue à droite et à gauche en 1).

$\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , intégrable en 0, et si  $b \in ]0, a[$ ,  $t^{b+1}\varphi(t) \sim \frac{|\ln(t)|}{t^{a-b}}$ , donc

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{b+1}}\right), \text{ donc } \varphi \text{ est intégrable en } +\infty \text{ et donc intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) Pour  $x > 0$  et  $t > 0$ , on pose  $g(x, t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ . On voit que  $g(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2t}$ , et  $t \mapsto \frac{1}{1+2t}$  n'est pas intégrable en  $+\infty$  et on conjecture que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ . On va ainsi la minorer.

$$\text{Il vient } f(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} dt \geq \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt \text{ (car } \forall t \geq 1, 1+t+t^{x+1} \leq 3t^{x+1}).$$

$$\text{Donc } f(x) \geq \frac{-1}{3x} [t^{-x}]_1^{+\infty} \text{ et } f(x) \geq \frac{1}{3x}, \text{ donc } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

On étudie la limite en  $+\infty$ .  $t^{x+1} = e^{(x+1)\ln(t)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  si  $t > 1$ , et  $t^{x+1} = e^{(x+1)\ln(t)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  si  $t < 1$ .

0 si  $t > 1$

$$\text{Donc } g(x, t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} h(t), \text{ avec } h(t) = \frac{1}{3} \text{ si } t = 1.$$

$$\frac{1}{1+t} \text{ si } t < 1$$

De plus, pour  $x \geq 1$ ,  $|g(x, t)| \leq \psi(t) = 1$  si  $t \in ]0, 1]$  et  $|g(x, t)| \leq \psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$  si  $t \geq 1$ .

Donc comme  $\psi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par convergence dominée,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2$

3)  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} dt$ . On effectue un changement de variable : on pose  $u = t^x$ .

Alors  $t = u^{1/x}$ ,  $du = xt^{x-1} dt = xu^{1-\frac{1}{x}} dt$  et  $dt = \frac{1}{x} u^{\frac{1}{x}-1} du$ .

Donc  $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{1/x} + u^{(1/x)+1}} u^{\frac{1}{x}-1} du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u(u^{-1/x} + 1 + u)} du$ .

On pose alors  $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u(u^{-1/x} + 1 + u)} du$ . On cherche sa limite quand  $x$  tend vers l'infini avec le théorème

de convergence dominée. On prend  $x \in ]0, 1]$ .  $u^{-1/x} = \exp\left(-\frac{1}{x} \ln(u)\right)$ .

Si  $u > 1$ ,  $u^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Si  $u = 1$ ,  $u^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$  et si  $u < 1$ ,  $u^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .

Donc  $a(x, u) = \frac{1}{u(u^{-1/x} + 1 + u)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{u(1+u)} = k(u)$  si  $u > 1$ ,  $a(x, u) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} = k(u)$  si  $u = 1$  et enfin

$a(x, u) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = k(u)$  si  $u < 1$ .  $k$  est bien continue par morceaux.

De plus, pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $|a(x, u)| \leq \frac{1}{u(1+u)} = \varphi(u)$  si  $u \geq 1$  et  $|a(x, u)| \leq 1 = \varphi(u)$  si  $u < 1$ , avec  $\varphi$

intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc  $J(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+u)} du = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du$ .

Or  $\int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_1^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 2$ , donc  $J(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln 2$  et  $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}}$

## Séance 6 : Lundi 15 Juin 5

### Cours : revoir le chapitre 13

**Exercice 31 (oral CCINP 25, Arthur,3) :** Soit la fonction  $h$  définie par  $h(x, y) = x^3 - y^2$

On introduit le sous-ensemble  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = 0\}$ .

- 1) Montrer que  $h$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $A(0,0)$  est l'unique point critique.  $h$  admet-elle un extremum local en  $A(0,0)$  ?
- 2) Soit une fonction  $f \in C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\forall (x, y) \in C^2, f(x, y) = 0$ . Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t^2, t^3) = 0$ .  
En déduire que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on introduit la fonction  $\varphi_t(u) = f(t^2, u)$  défini sur  $\mathbb{R}$ .

- 3) Montrer que  $\varphi_t$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma(t) \in ]-t^3, t^3[$ ,  $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$ .
- 4) En conclure que  $(0,0)$  est un point critique de  $f$ .

Ind :

- 2) Utiliser la règle de la chaîne, puis diviser par  $t$  lorsque  $t \in \mathbb{R}^*$ .
- 3) Penser au théorème de Rolle.
- 4) Calculer  $\varphi_t'(u)$  et l'évaluer en  $\gamma(t)$ . Passer à la limite lorsque  $t$  tend vers 0.

- 1)  $h$  est une fonction polynomiale de deux variables et est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  par opérations. De plus  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 3x^2$

et  $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -2y$ . On a donc  $\nabla h(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$ .  $A(0, 0)$  est l'unique point critique de  $h$ .

De plus,  $h(x, 0) = x^3 > 0 = h(0, 0)$  si  $x > 0$  et  $h(x, 0) = x^3 < 0 = h(0, 0)$  si  $x < 0$ .

Donc  $h$  n'admet pas d'extremum local en  $A(0, 0)$ .

2) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Alors  $(t^2, t^3) \in C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = 0\}$ . Donc  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t^2, t^3) = 0$

On utilise alors la règle de la chaîne : toutes les fonctions concernées étant  $C^1$ , on conclut que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) = 0$ . En particulier, si  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $2 \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) = 0$ .

Or  $f \in C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$ .

Donc en passant à la limite quand  $t$  tend vers 0 :  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

3)  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , donc par composée,  $\varphi_t$  est dérivable (donc continue) sur  $\mathbb{R}$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $\varphi_t(t^3) = f(t^2, t^3) = 0$  et  $\varphi_t(-t^3) = f((-t)^2, (-t)^3) = 0$  avec 2).

Donc d'après le théorème de Rolle,  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma(t) \in ]-t^3, t^3[ , \varphi_t'(\gamma(t)) = 0$

4) On a déjà prouvé que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ . Il reste à montrer que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Avec la règle de la chaîne, par composée de fonctions  $C^1$ ,  $\varphi_t'(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, u)$ .

Si  $t > 0$ , avec 3), on déduit que  $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t))$ , où  $\gamma(t) \in ]-t^3, t^3[$ .

Donc par encadrement,  $\gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et par continuité,  $\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

Mais par ailleurs,  $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , donc par unicité de la limite,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Donc  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$ .

**Exercice 32 (oral IMT 25, Clément, 4) :** Soit  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto \cos(\alpha \arcsin(t))$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 2 vérifiée par  $f$ .
- 2) Trouver les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de  $(E)$ .
- 3) En déduire que  $f$  est développable en série entière et déterminer ce développement.

Ind :

- 1) Faire le calcul ; l'équation n'est pas à coefficients constants.
  - 2) Supprimer les dénominateurs dans l'équation avant de commencer. Obtenir  $a_{2n}$  et  $a_{2n+1}$ .
- Bien vérifier dans la synthèse que le rayon de convergence est strictement positif.
- 3) Utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

1) Pour  $t \in ]-1, 1[$ , on pose  $f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t))$ .  $f$  est  $C^\infty$  sur  $]-1, 1[$  par composée et il vient

$$f'(t) = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin(t)), \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2}, \text{ donc}$$

$$f''(t) = \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin(t)) - \alpha t (1-t^2)^{-3/2} \sin(\alpha \arcsin(t))$$

On trouve que  $f$  est solution sur  $] -1, 1[$  de l'équation  $(E) y'' - \frac{t}{1-t^2} y' + \frac{\alpha^2}{1-t^2} y = 0$ .

2) On procède par analyse et synthèse : soit  $f$  développable en série entière sur  $] -R, R[$ , avec  $R > 0$ , et solution de  $(E)$ .

$$\text{Alors pour } t \in ] -R, R[ : f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \text{ donc } f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } t f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n.$$

$$\text{Enfin, } f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \text{ et } t^2 f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n.$$

$$f \text{ vérifie } (1-t^2)f''(t) - t f'(t) + \alpha^2 f(t) = 0 \text{ pour tout } t \in ] -R, R[.$$

Donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - n a_n + \alpha^2 a_n) t^n = 0$ . Par unicité du développement en série entière

$$\text{de la fonction nulle, on obtient : } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n^2 - \alpha^2)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{(4(n-1)^2 - \alpha^2)}{(2n)(2n-1)} a_{2(n-1)} \text{ et en itérant le procédé, par récurrence, } a_{2n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k^2 - \alpha^2)}{(2n)!} \lambda,$$

où  $\lambda = a_0$ .

$$\text{De même, } a_{2n+1} = \frac{((2n-1)^2 - \alpha^2)}{(2n+1)(2n)} a_{2n-1} \text{ et } a_{2n+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} ((2k+1)^2 - \alpha^2)}{(2n+1)!} \mu, \text{ avec } \mu = a_1$$

Réciproquement (synthèse), on considère  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ , avec pour tout entier naturel  $n$

$$a_{2n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k^2 - \alpha^2)}{(2n)!} \lambda \text{ et } a_{2n+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} ((2k+1)^2 - \alpha^2)}{(2n+1)!} \mu, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $r \mapsto g(r, t)$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  par composée.

$$\text{On calcule alors avec la règle de la chaîne : } \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) = \cos(t) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) + \sin(t) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t))$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) = \cos^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)) + 2 \sin(t) \cos(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) + \sin^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(t), r \sin(t))$$

- $t \mapsto g(r, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r, t)$  sont continues, donc intégrables sur  $[0, 2\pi]$

- $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)) \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(t), r \sin(t)) \right|.$

Le cercle  $C(0, r)$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension finie.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  sont continues

sur  $C(0, r)$ , donc par théorème des bornes atteintes, sont bornées sur  $C(0, r)$ , ainsi que  $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t)$ .

Soit  $M$  tel que  $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, 2\pi], \left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) \right| \leq M$ . Comme  $t \mapsto M$  est intégrable sur  $[0, 2\pi]$ , on conclut que  $h$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt$  et  $h''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) dt$ .

En intégrant par parties, comme  $\left[ \sin(t) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) - \cos(t) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right]_{-0}^{2\pi} = 0$ , il vient

$$h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt = - \int_0^{2\pi} \left( \sin(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) - \cos(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) \right) dt$$

$$\text{Or } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) = -r \sin(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)) + r \cos(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) = -r \sin(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) + r \cos(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(t), r \sin(t))$$

$$\text{Donc comme } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r \cos(t), r \sin(t)) = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)), \text{ on obtient } h'(r) = -r h''(r).$$

On a donc  $\frac{d}{dr}(rh'(r)) = 0$  et  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}_+, rh'(r) = C$ .

De plus, pour  $r = 0$ , on trouve  $C = 0$ . Donc  $\forall r > 0, h'(r) = 0$ , et par continuité de  $h'$  en 0,  $\forall r \geq 0, h'(r) = 0$ .

Donc  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Exercice 33 (Oral Mines 25, Coentim, Côte,3) :

Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ .

On considère  $h : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$ . Montrer que  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ind : utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour dériver deux fois. Pour la domination, utiliser le théorème des bornes atteintes. Faire ensuite une intégration par parties pour aboutir à une équation différentielle simple satisfaite par  $h'$ .

On veut utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On pose  $g(r, t) = f(r \cos(t), r \sin(t))$  pour  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $t \in [0, 2\pi]$ .

- Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $r \mapsto g(r, t)$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  par composée.

On calcule alors avec la règle de la chaîne :  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, t) = \cos(t) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) + \sin(t) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t))$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) = \cos^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)) + 2 \sin(t) \cos(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) + \sin^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(t), r \sin(t))$$

- $t \mapsto g(r, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r, t)$  sont continues, donc intégrables sur  $[0, 2\pi]$

- $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)) \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(t), r \sin(t)) \right|$ .

Le cercle  $C(0, r)$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension finie.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  sont continues

sur  $C(0, r)$ , donc par théorème des bornes atteintes, sont bornées sur  $C(0, r)$ , ainsi que  $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t)$ .

Soit  $M$  tel que  $\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, 2\pi], \left| \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) \right| \leq M$ . Comme  $t \mapsto M$  est intégrable sur  $[0, 2\pi]$ , on conclut que  $h$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt$  et  $h''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) dt$ .

En intégrant par parties, comme  $\left[ \sin(t) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) - \cos(t) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right]_{-0}^{2\pi} = 0$ , il vient

$$h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt = - \int_0^{2\pi} \left( \sin(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) - \cos(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) \right) dt$$

$$\text{Or } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) = -r \sin(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)) + r \cos(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) \right) = -r \sin(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(t), r \sin(t)) + r \cos(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(t), r \sin(t))$$

$$\text{Donc comme } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r \cos(t), r \sin(t)) = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(t), r \sin(t)), \text{ on obtient } h'(r) = -r h''(r).$$

On a donc  $\frac{d}{dr}(rh'(r)) = 0$  et  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}_+, rh'(r) = C$ .

De plus, pour  $r = 0$ , on trouve  $C = 0$ . Donc  $\forall r > 0, h'(r) = 0$ , et par continuité de  $h'$  en 0,  $\forall r \geq 0, h'(r) = 0$ .

Donc  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .

#### Exercice 34 (Oral Mines 24, Centrale 25, Simon, Thimothée,4) :

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $c < d$ . Soit  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue.

1) Soit  $t \in [c, d]$ . Montrer que  $x \mapsto \int_a^t f(x, y) dy$  est continue sur  $[a, b]$ .

$$[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

2) On considère  $g : t \mapsto \int_a^b \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx$ . Montrer que  $g$  est  $C^1$  sur  $[c, d]$ .

$$\text{En déduire que } \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ind :

1) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres, ainsi que le théorème des bornes atteintes.

2) Considérer  $h(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$  et utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour  $g$ .

Une fois  $g'$  obtenue, exprimer  $g$  à l'aide de  $g'$  et du théorème fondamental de l'analyse.

1) Soit  $t \in [c, d]$ . On note  $u : x \mapsto \int_c^t f(x, y) dy$  pour  $x \in [a, b]$ . On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout  $y \in [c, t] \subset [c, d]$ ,  $x \mapsto f(x, y)$  est continue sur  $[a, b]$ . On le justifie avec la caractérisation séquentielle : si  $x \in [a, b]$  et que  $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , alors  $(x_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$  coordonnée par coordonnée, donc  $f(x_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x, y)$  car  $f$  est continue sur  $[a, b] \times [c, d]$ .

- De plus,  $K = [a, b] \times [c, d]$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet :

- On prouve d'abord qu'il est fermé par caractérisation séquentielle : soit une suite  $(x_n, y_n)$  d'éléments de  $[a, b] \times [c, d]$  qui converge vers  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_n \leq b$  donc par passage des inégalités à la limite,  $a \leq x \leq b$ . De même,  $c \leq y \leq d$ , donc  $(x, y) \in K$  et  $K$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .
- De plus, pour  $(x, y) \in K$ ,  $\|(x, y)\|_1 \leq |a| + |b| + |c| + |d|$  donc  $K$  est borné.

Dès lors,  $f$  est continue sur le fermé borné  $[a, b] \times [c, d]$  qui est non vide, donc par théorème des bornes atteintes, est bornée : soit  $M \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d], |f(x, y)| \leq M$ .

Comme  $y \mapsto M$  est intégrable sur  $[c, d] \subset [c, d]$ , on a bien l'hypothèse de domination.

$$\text{Donc } x \mapsto \int_a^t f(x, y) dy \text{ est continue sur } [a, b].$$

- 2) Grâce au 1),  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto \int_a^b \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx$  est bien définie. On pose pour  $x \in [a, b]$  et  $t \in [c, d]$  :

$$h(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy.$$

$$\text{On a donc } g(t) = \int_a^b \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b h(x, t) dx.$$

On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- Comme  $f$  est continue sur  $[a, b] \times [c, d]$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  l'est aussi pour tout  $x \in [a, b]$  (on le montre aussi par caractérisation séquentielle). Donc par théorème fondamental de l'analyse,  $t \mapsto h(x, t)$  est  $C^1$  sur  $[c, d]$  et  $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = f(x, t)$ .
- Pour tout  $t \in [c, d]$ , montrons que  $x \mapsto h(x, t)$  est intégrable sur  $[a, b]$ . On fixe  $t \in [c, d]$ . On a vu au 1) que  $u: x \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $[a, b]$ , donc intégrable sur  $[a, b]$ .
- Enfin, pour  $t \in [c, d]$  et  $x \in [a, b]$ ,  $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) \right| \leq M$ , où  $x \mapsto M$  est constante donc intégrable sur  $[a, b]$ .

$$\text{On obtient que } g \text{ est } C^1 \text{ sur } [c, d] \text{ et telle que } g'(t) = \int_a^b \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dx = \int_a^b f(x, t) dx.$$

$$\text{On déduit par théorème fondamental de l'analyse que } g(d) = g(c) + \int_c^d g'(t) dt = 0 + \int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

$$\text{On a donc bien } \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \text{ C'est le théorème de Fubini.}$$

**Exercice 35 (oral Centrale 25, Geoffrey, 4) :** On considère  $f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ .

- 1) Montrer que  $f$  est définie sur  $D$  qui est la réunion de trois ouverts.
- 2) Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $D$ .
- 3) Simplifier l'expression de  $f$ .

Ind :

- 1) Faire un dessin et considérer les trois ensembles  $O_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, xy > 1\}$ ,  $O_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0, xy > 1\}$  et  $O_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ . Montrer que ce sont bien des ouverts.
- 2) Détailler les opérations permettant de justifier que  $f$  est  $C^1$  sur  $D$ .

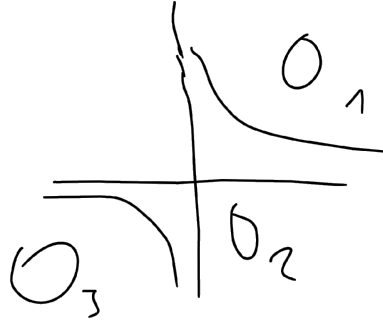
3) Calculer le gradient de  $f$  et déterminer sa valeur sur chacun des trois ouverts. Montrer par exemple que  $O_1$  et  $O_3$  sont convexes, et pour  $(x, y) \in O_2$  et  $t \in [0, 1]$ , poser  $g(t) = f(tx, ty)$ .

1) Arctan est définie sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y)$  est bien défini si et seulement si  $xy \neq 1$ . Soient

$$O_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, xy > 1\}, \quad O_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0, xy > 1\}, \quad O_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}.$$

$xy \neq 1 \Leftrightarrow xy > 1$  ou  $xy < 1$  et lorsque  $xy > 1$ ,  $x$  et  $y$  sont de même signe, donc  $xy \neq 1 \Leftrightarrow (x, y) \in O_1 \cup O_2$ .

Donc  $D = O_1 \cup O_2 \cup O_3$



Par ailleurs, on pose  $g(x, y) = x$ ,  $h(x, y) = y$  et  $k(x, y) = xy - 1$ . Ces trois fonctions sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

Or  $O_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) > 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) > 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, k(x, y) > 0\}$ .

Donc  $O_1$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et c'est pareil pour  $O_2$  et  $O_3$ .

Donc  $O_1, O_2, O_3$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .

2) La fonction Arctan est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  (leurs dérivées partielles existent et sont continues), donc  $(x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  par composées et somme.

$(x, y) \mapsto \frac{x+y}{1-xy}$  est de classe  $C^1$  sur  $D$  car  $(x, y) \mapsto x+y$  et  $(x, y) \mapsto 1-xy$  le sont, avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

Donc par composée et somme,  $f$  est  $C^1$  sur  $D$ .

3) Soient  $(x, y) \in D$ . On calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \left( \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \right)$ .

$$\text{Donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+x^2y^2 + x^2 + y^2}.$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)} = 0.$$

$$\text{De même, } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1+x^2}{(1+y^2)(1+x^2)} = 0 \text{ et } \forall (x, y) \in D, \nabla f(x, y) = 0$$

On sait que lorsque **le vecteur gradient est nul sur un ouvert convexe**, la fonction est constante.

Montrons que  $O_1$  est convexe. Soient  $u = (x, y) \in O_1$ ,  $v = (x', y') \in O_2$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .

Montrons que  $tu + (1-t)v = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \in O_1$ .

On a bien  $tx + (1-t)x' > 0$  et  $ty + (1-t)y' > 0$  (c'est vrai pour  $t = 0, t = 1$  et  $t \in ]0, 1[$ ).

De plus, on calcule  $A = (tx + (1-t)x')(ty + (1-t)y') > (tx + (1-t)x') \left( \frac{t}{x} + \frac{(1-t)}{x'} \right)$  (car  $u, v \in O_1$  et qu'on ne peut pas avoir en même temps  $t = 0$  et  $1-t = 0$ ).

Donc  $A > t^2 + (1-t)^2 + t(1-t)\left(\frac{x'}{x} + \frac{x}{x'}\right)$ . On pose alors  $a = \frac{x'}{x} > 0$ .

Il vient  $A > 1 - 2t + 2t^2 + t(1-t)\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1 + t(1-t)\left(\frac{a^2 - 2a + 1}{a}\right)$ .

Donc  $A > 1 + t(1-t)\left(\frac{(a-1)^2}{a}\right) > 1$ , donc  $tu + (1-t)v \in O_1$  et  $O_1$  est convexe.

Donc  $f$  est constante sur  $O_1$ , égale à  $C$ .

Pour  $x > 1$ ,  $(x, 1) \in O_1$ , donc  $f(x, 1) = C$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 1) = C$ .

Donc  $C = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$ . Donc  $\boxed{\forall (x, y) \in O_1, f(x, y) = \pi}$

Avec les mêmes notations, on prouve que  $O_3$  est convexe.

En effet,  $u = (x, y) \in O_3 \Leftrightarrow -u = (-x, -y) \in O_1$ , donc  $tu + (1-t)v \in O_3$  car  $t(-u) + (1-t)(-v) \in O_1$  en utilisant que  $O_1$  est convexe.

Pour  $x < -1$ ,  $(x, x) \in O_3$  et  $f(x, x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\pi$ , donc  $\boxed{\forall (x, y) \in O_3, f(x, y) = -\pi}$

En revanche,  $O_2$  ne semble pas convexe (et ne l'est pas).

Pour  $(x, y) \in O_2$  et  $t \in [0, 1]$ , on pose  $g(t) = f(tx, ty)$ . On a bien  $(tx)(ty) = t^2xy < 1$ , donc  $(tx, ty) \in D$ .

$g$  est  $C^1$  sur  $[0, 1]$  par composée et avec la règle de la chaîne,  $g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = 0$ .

Donc  $g$  est constante, et  $g(1) = f(x, y) = f(0, 0) = 0$ .

Donc  $\boxed{\forall (x, y) \in O_2, f(x, y) = 0}$

**Exercice 36 (oral centrale 25, Nathan, 3)** : on considère l'équation  $(E) : (2x - y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0$  où

l'inconnue  $\varphi$  est une fonction  $C^2$  de deux variables  $(x, y)$  sur l'ensemble  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$ , à valeurs réelles.

- 1) Montrer que  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$
- 2) On définit  $h$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  par  $h(u, v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, v\right)$ . Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  sur  $D$ . Expliciter  $h^{-1}$  et vérifier que  $h$  et  $h^{-1}$  sont de classe  $C^2$  sur leurs domaines respectifs.
- 3) Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$ , à valeurs réelles. On pose  $g = \varphi \circ h$ .  
Expliciter  $\varphi(x, y)$  à l'aide de  $g$  pour  $(x, y) \in D$  et calculer  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y)$ .
- 4) Résoudre  $(E)$ .

Ind :

- 1) Utiliser  $a(x, y) = 2x - y^2$ .
- 2) Montrer que tout élément de  $D$  possède un unique antécédent par  $h$  et le déterminer.
- 3) Utiliser la règle de la chaîne.
- 4) Montrer que  $\varphi$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g$  est solution d'une équation plus simple et la résoudre.

1) On considère  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y^2\}$ . On pose pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $a(x, y) = 2x - y^2$ .  $a$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , donc  $\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a(x, y) > 0\}}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

2) Soit  $(x, y) \in D$ . On résout  $h(u, v) = (x, y)$  et on cherche à prouver qu'il existe une unique solution

$$(u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \cdot h(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u^2 + v^2}{2} = x \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = y \\ u^2 = 2x - y^2 \end{cases} \cdot \text{Comme } (x, y) \in D, \text{ il y a bien une unique}$$

$$\text{solution } (u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \text{ donnée par } \begin{cases} v = y \\ u = \sqrt{2x - y^2} \end{cases}.$$

Donc tout élément de  $D$  admet un unique antécédent par  $h$ .

$$\text{Donc } h \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ sur } D, \text{ et } \forall (x, y) \in D, h^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{2x - y^2}, y \right)$$

On constate alors que  $h$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  car chacune de ses deux coordonnées est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . De plus,  $\forall (x, y) \in D, 2x - y^2 > 0$  et comme  $t \mapsto \sqrt{t}$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h^{-1}$  est de classe  $C^2$  sur  $D$ .

3) On trouve  $h^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{2x - y^2}, y \right)$ . Il vient  $\varphi(x, y) = g(\sqrt{2x - y^2}, y)$  car  $\varphi = g \circ h^{-1}$ . On obtient,  $g$  étant

$$\text{de classe } C^2 \text{ par composée : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2x - y^2}} \frac{\partial g}{\partial u}(\sqrt{2x - y^2}, y).$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{(2x - y^2)^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial u}(\sqrt{2x - y^2}, y) + \frac{1}{2x - y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\sqrt{2x - y^2}, y)$$

4) On a donc  $\varphi$  solution de  $(E) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in D, (2x - y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - 16\varphi(x, y) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in D, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\sqrt{2x - y^2}, y) - 16g(\sqrt{2x - y^2}, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 16g(u, v) = 0.$$

Il existe donc deux fonctions  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, g(u, v) = A(v)e^{4u} + B(v)e^{-4u}$

On obtient alors pour  $u = 1 : \forall v \in \mathbb{R}, g(1, v) = A(v)e^4 + B(v)e^{-4}$

Pour  $u = 2 : \forall v \in \mathbb{R}, g(2, v) = A(v)e^8 + B(v)e^{-8}$

Donc  $\forall v \in \mathbb{R}, \frac{e^{-4}g(1, v) - g(2, v)}{(1 - e^8)} = A(v)$  et  $A$  est  $C^2$  par opérations. C'est vrai aussi pour  $B$ .

Réciproquement, si pour  $(u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, g(u, v) = A(v)e^{4u} + B(v)e^{-4u}$ , alors  $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 16g(u, v) = 0$ .

Avec  $\varphi = g \circ h^{-1}$ , on déduit :  $S_{(E)} = \left\{ (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = A(y)e^{4\sqrt{2x - y^2}} + B(y)e^{-4\sqrt{2x - y^2}}, A, B \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$

### En plus :

**Exercice 37 (oral Centrale 25, Capucine,3) :** Soit  $f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2xn)}{n} t^n$

- 1) Montrer que  $f$  est définie pour  $(x,t) \in \mathbb{R} \times ]-1,1[$
- 2) Trouver une expression de  $f$ .

Ind :

- 1) Utiliser un critère de majoration.
- 2) Fixer  $x$  et calculer  $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ , puis intégrer.

1) Soit  $(x,t) \in \mathbb{R} \times ]-1,1[$ . Alors pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq \left| \frac{\cos(2xn)}{n} t^n \right| \leq |t|^n$ .

Or  $\sum_{n \geq 1} |t|^n$  converge puisque  $t \in ]-1,1[$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2xn)}{n} t^n$  est absolument convergente, donc convergente. Donc  $f$  est bien définie pour  $(x,t) \in \mathbb{R} \times ]-1,1[$

2) On fixe  $x \in \mathbb{R}$  et on pose  $g(t) = f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t)$ , avec  $U_n(t) = \frac{\cos(2xn)}{n} t^n$ .

On obtient ainsi la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R \geq 1$  (puisque la série converge pour  $|t| < 1$ ) et on sait que  $g$  est  $C^1$  sur  $] -1,1[$  et qu'on peut dériver terme à terme.

Donc  $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2xn) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(2x(n+1)) t^n$ .

Donc  $g'(t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2ix(n+1)} t^n \right) = \operatorname{Re} \left( e^{2ix} \sum_{n=0}^{+\infty} (te^{2ix})^n \right)$ , avec  $te^{2ix} \neq 1$ . Donc  $g'(t) = \operatorname{Re} \left( e^{2ix} \frac{1}{1-te^{2ix}} \right)$

On calcule  $\frac{1}{1-te^{2ix}} = \frac{1}{1-t(\cos 2x + i \sin 2x)} = \frac{1-t \cos 2x + it \sin 2x}{(1-t \cos 2x)^2 + (t \sin 2x)^2} = \frac{1-t \cos 2x + it \sin 2x}{1-2t \cos(2x) + t^2}$ .

Donc  $g'(t) = \frac{\cos(2x)(1-t \cos 2x) - t \sin^2 2x}{1-2t \cos(2x) + t^2} = \frac{\cos(2x) - t}{1-2t \cos(2x) + t^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2t - 2 \cos(2x)}{1-2t \cos(2x) + t^2} \right)$ .

Comme  $g$  est  $C^1$  sur  $] -1,1[$ , par théorème fondamental,  $g(t) - g(0) = \int_0^t g'(u) du$ .

Or  $g(0) = f(x,0) = 0$ , donc  $g(t) = -\frac{1}{2} \left[ \ln(1-2u \cos(2x) + u^2) \right]_0^t = -\frac{1}{2} \ln(1-2t \cos(2x) + t^2)$ .

(On a  $1-2t \cos(2x) + t^2 = (1-t \cos 2x)^2 + (t \sin 2x)^2 > 0$ ).

On obtient donc  $f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2xn)}{n} t^n = -\frac{1}{2} \ln(1-2t \cos(2x) + t^2)$

**Exercice 38 (Oral ESPCI 25, Corentin) :** soit  $r > 0$ . Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , non constant. On suppose que  $P$  ne possède pas de racine de module  $r$ . On note  $N_p(r)$  le nombre de racines de  $P$  (comptées avec leur multiplicité) qui sont comprises dans  $B(0,r)$ .

Démontrer que  $N_p(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} i r e^{i\theta} d\theta$

Tout d'abord, on pose  $n = \deg(P)$  et on écrit  $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ , où on note  $z_1, \dots, z_p$  les racines de  $P$  de module strictement inférieur à  $r$ . Alors  $P' = \lambda \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (X - z_k)$ , avec pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $P(re^{i\theta}) \neq 0$  puisque  $P$  ne possède

pas de racine de module  $r$ . Donc  $\frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{re^{i\theta} - z_k}$ .

Donc  $J_r = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} i re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{z_k}{re^{i\theta}}} d\theta$ .

On veut calculer  $L_k = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{z_k}{re^{i\theta}}} d\theta$ . On distingue deux cas :

- Si  $|z_k| < r$  :  $\left| \frac{z_k}{re^{i\theta}} \right| < 1$  et  $L_k = \int_0^{2\pi} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{z_k^q}{r^q} e^{-qi\theta} d\theta$ . Si on pose  $U_q(\theta) = \frac{z_k^q}{r^q} e^{-qi\theta}$ , on sait que chaque  $U_n$

est continue sur  $[0, 2\pi]$  et que  $\|U_q\|_\infty = \left| \frac{z_k}{r} \right|^q$  et  $\sum_{q \geq 0} \|U_q\|_\infty$  converge donc  $\sum_{q \geq 0} U_q$  converge normalement

sur le segment  $[0, 2\pi]$  et  $L_k = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{z_k^q}{r^q} \int_0^{2\pi} e^{-qi\theta} d\theta$ . Or si  $q \geq 1$ ,  $\int_0^{2\pi} e^{-qi\theta} d\theta = 0$ , donc  $L_k = 2\pi$ .

- Si  $|z_k| > r > 0$  :  $\left| \frac{re^{i\theta}}{z_k} \right| < 1$  et  $L_k = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - z_k} d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{z_k} \frac{1}{1 - \frac{re^{i\theta}}{z_k}} d\theta$  et  $L_k = \int_0^{2\pi} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{r^q}{z_k^q} e^{qi\theta} d\theta$ . Puis

de la même manière on échange série et intégrale et  $L_k = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{r^q}{z_k^q} \int_0^{2\pi} e^{qi\theta} d\theta = 0$ .

Donc  $J_r = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p 2\pi = p$ . On a bien  $N_p(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} i re^{i\theta} d\theta$ .

**Exercice 39 (Oral X 23,25, Eloi, ESPCI 23, Maxime,4)** : soient  $K : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et strictement positives. On suppose  $\forall x \in [0,1], f(x) = \int_0^1 K(x,z)g(z)dz$  et  $\forall x \in [0,1], g(x) = \int_0^1 K(x,z)f(z)dz$ .

Démontrer que  $f = g$ .

On pourra considérer la fonction  $h = g - Mf$ , où  $M$  est le maximum de  $\frac{f}{g}$  sur  $[0,1]$ .

Ind : montrer  $\forall x \in [0,1], h(x) \leq 0$ , puis étudier  $f(x_0) - Mg(x_0)$ .

On sait que  $\frac{f}{g}$  est continue et strictement positive sur le segment  $[0,1]$ . Par théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum  $M > 0$  sur ce segment. Il est en particulier atteint en  $x_0 \in [0,1]$ .

On a ainsi  $\forall x \in [0,1], f(x) - Mg(x) \leq 0$  et  $f(x_0) - Mg(x_0) = 0$

On considère la fonction  $h = g - Mf$ .

Par différence, il vient  $\forall x \in [0,1], h(x) = g(x) - Mf(x) = \int_0^1 K(x,z)(f(z) - Mg(z)) dz \leq 0$ .

Dès lors,  $0 = f(x_0) - Mg(x_0) = \int_0^1 K(x_0,z)(g(z) - Mf(z)) dz = \int_0^1 K(x_0,z)(h(z)) dz$ .

Donc  $\int_0^1 -K(x_0,z)(h(z)) dz = 0$

Or  $z \mapsto -K(x_0,z)(h(z))$  est continue, positive et l'intégrale est nulle, donc  $\forall z \in [0,1], K(x_0,z)(h(z)) = 0$ .

Comme  $K$  est strictement positive, il vient  $\forall z \in [0,1], h(z) = 0$ , donc  $\forall x \in [0,1], g(x) = Mf(x)$ .

En particulier,  $g(x_0) = Mf(x_0) = M^2g(x_0)$ . Comme  $g(x_0) > 0$ , on conclut  $M^2 = 1$ , donc comme  $M > 0$ , on a nécessairement  $M = 1$ . On déduit bien que  $\boxed{f = g}$

**Exercice 40 (Oral ENS 25,3) :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ . On suppose que  $f, f', f''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

1) Montrer que  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \left| \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} - f'(x) \right| \right) = 0$ .

2) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x(1+\varepsilon)) - f(x)}{\varepsilon}$

Ind :

- 1) Utiliser Taylor-Lagrange.
- 2) Utiliser Taylor-Lagrange et pas la première question.

1) On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange. On fixe  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On considère  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f''(x)| \leq M. \text{ Alors } |f(x+\varepsilon) - f(x) - \varepsilon f'(x)| \leq M \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Alors  $\left| \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} - f'(x) \right| \leq M \frac{\varepsilon}{2}$ . Ce majorant ne dépend pas de  $x$ .

$$\text{Donc } 0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \left| \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} - f'(x) \right| \right) \leq M \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Par encadrement, } \boxed{\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \left| \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} - f'(x) \right| \right) = 0}$$

2) On utilise de nouveau Taylor-Lagrange :  $|f(x+x\varepsilon) - f(x) - x\varepsilon f'(x)| \leq M \frac{(x\varepsilon)^2}{2}$ .

$$\text{Donc } \left| \frac{f(x(1+\varepsilon)) - f(x)}{\varepsilon} - x f'(x) \right| \leq M \frac{x^2}{2} \varepsilon. \text{ Donc par encadrement, } \boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x(1+\varepsilon)) - f(x)}{\varepsilon} = x f'(x)}$$

**Exercice 41 (Oral ENS 25,5) :** soit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(x) \rightarrow 0$  et  $f(x) \rightarrow 0$ .

On considère  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x+1)$  et  $x \mapsto f(x+2)$ .

Que dire de  $f$  si la famille  $(f, g, h)$  est liée ?

Ind : prendre  $f$  non nulle et montrer que  $(f, g)$  est libre.

Puis considérer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = \alpha f(x+1) + \beta f(x)$ .

Fixer  $a \in \mathbb{R}$  et étudier les deux suites définies par  $U_n = f(a+n)$  et  $V_n = f(a-n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Bien regarder les racines de l'équation caractéristique associées à cette suite récurrente linéaire.

On suppose que  $f$  n'est pas la fonction nulle (dans ce cas  $(f, g, h)$  est liée).

On suppose aussi que  $(f, g, h)$  est liée.

On va d'abord montrer que  $(f, g)$  est libre, ce qui permettra d'affirmer que  $h$  est combinaison linéaire de  $f, g$ .

Si par l'absurde  $(f, g)$  est liée, comme  $f$  est non nulle, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = \lambda f(x)$ .

$\lambda \neq 0$  car sinon,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = 0$  et  $f$  est nulle.

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a+n) = \lambda^n f(a)$ , donc  $f(a) = \frac{1}{\lambda^n} f(a+n)$ .

Donc si  $|\lambda| \geq 1$ , comme  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\frac{1}{\lambda^n} f(a+n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = 0$ , ce qui est absurde. Donc  $|\lambda| < 1$ .

Dès lors,  $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = \lambda f(a-1)$  et par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a) = \lambda^n f(a-n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et  $f$  est nulle.

C'est absurde, donc  $(f, g)$  est libre. De même,  $(g, h)$  est libre.

Comme  $(f, g, h)$  est liée, on considère  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = \alpha f(x+1) + \beta f(x)$ .

On fixe  $a \in \mathbb{R}$  et on considère deux suites définies par  $U_n = f(a+n)$  et  $V_n = f(a-n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \alpha U_{n+1} + \beta U_n$ . On note (C) :  $x^2 = \alpha x + \beta$ .

De même,  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \alpha V_{n+1} + \beta V_{n+2}$ , avec  $\beta \neq 0$  car  $(g, h)$  est libre. On note (C') :  $\beta x^2 + \alpha x - 1 = 0$ .

$(U_n)$  et  $(V_n)$  sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

On note  $r, s$  les racines de (C) et  $r', s'$  celles de (C'). Il vient  $rs = -\beta$  et  $r's' = -\frac{1}{\beta}$ .

On a donc  $|rs| \geq 1$  ou  $|r's'| \geq 1$ . On traite le cas  $|rs| \geq 1$ .

- Si (C) admet une racine double  $r$  : alors  $|r| \geq 1$ . Soient  $A, B \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = (An + B)r^n$ .

Si  $A \neq 0$ ,  $|U_n| \sim |A|n|r|^n$ , ce qui est absurde car  $U_n = f(a+n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $A = 0$

Donc  $|U_n| \geq |B|$ , donc  $B = 0$  et  $U_0 = f(a) = 0$ .

- Si  $\Delta = \alpha^2 + 4\beta < 0$  (C) possède deux racines complexes conjuguées  $r = \rho e^{i\theta}$  et  $s = \rho e^{-i\theta}$ , avec  $\rho \geq 1$  et  $\theta \neq 0[\pi]$ . Soient  $A, B \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = A\rho^n e^{in\theta} + B\rho^n e^{-in\theta}$ .

Alors  $W_n = \frac{U_n}{\rho^n} e^{in\theta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (car  $|W_n| \leq |U_n|$ ), avec  $W_n = A e^{2in\theta} + B$ .

Donc  $|W_{n+1} - W_n| = |A| |e^{2i\theta} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $A = 0$ , puis  $B = 0$  et  $U_0 = f(a) = 0$

- Si  $\Delta = \alpha^2 + 4\beta > 0$ ,  $r = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$  et  $s = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$ . Soient  $A, B \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = Ar^n + Bs^n$ .

- Si  $\alpha > 0$ ,  $|s| > |r|$ , donc comme  $|rs| \geq 1$ ,  $|s| > 1$ .

Alors  $\frac{U_n}{s^n} = A \left(\frac{r}{s}\right)^n + B \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$  et par ailleurs  $\frac{U_n}{s^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $B = 0$  et  $U_n = Ar^n$ .

Donc si  $|r| \geq 1$ ,  $|U_n| \geq |A|$  et  $A = 0$ , donc  $U_0 = f(a) = 0$

Il reste à traiter le cas  $|r| < 1$ . On a  $f(a+1) = \alpha f(a) + \beta f(a-1)$ , donc  $U_1 = \alpha U_0 + \beta V_1$

Donc  $Ar = \alpha A + \beta V_1$ , donc  $Ar^2 = \alpha rA + \beta rV_1$  et comme  $r^2 = \alpha r + \beta$ ,  $A\beta = \beta rV_1$ .

Mais  $\beta \neq 0$  et  $rs = -\beta$ , donc  $r \neq 0$  et  $V_1 = \frac{A}{r}$ . Puis  $V_0 = \alpha V_1 + \beta V_2$ , donc  $\beta V_2 = V_0 - \alpha V_1$ , et

$\beta V_2 = A \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{A}{r^2} (r^2 - \alpha r) = \frac{A}{r^2} \beta$  et  $V_2 = \frac{A}{r^2}$ , puis par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{A}{r^n}$ , donc

$|V_n| \geq |A|$  et  $A = 0$ , donc  $U_0 = f(a) = 0$ .

- De même si  $\alpha < 0$  avec  $|s| < |r|$  et  $|r| > 1$ .

- Si  $\alpha = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = \beta f(x)$ , donc c'est absurde car on peut montrer que  $(f, h)$  est libre. Finalement, dans tous les cas, on obtient  $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = 0$ , ce qui est absurde (on a supposé  $f$  non nulle).  
**Donc si  $(f, g, h)$  est liée, alors  $f$  est la fonction nulle.**

**Exercice 42 (oral ESPCI 24, Angel, 5) :** soit  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 - z + \frac{i}{n^3}\right)}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1.
- 2) Montrer que  $f$  est définie sur tout le disque unité fermé.
- 3) Montrer que  $f$  n'est pas continue sur le disque unité fermé.

Ind :

- 1) Montrer d'abord que  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^5 + in^2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\left(1 + \frac{i}{n^3}\right)^k}$  : on aimerait ensuite échanger les deux

sommes. On peut utiliser le théorème de Fubini sur les familles sommables (hors programme dans ce contexte non probabiliste), ou bien prouver que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right) = 0$  à l'aide d'une majoration du module.

- 2) Séparer deux cas suivant que  $z = 1$  ou pas.
- 3) Poser  $z_N = \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i \frac{1}{N^3}$  et minorer la partie réelle de  $f(z_N)$  en isolant le terme en  $n = N$ .

- 1) On prend  $|z| < 1$ .

Il vient  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 + \frac{i}{n^3}\right) \left(1 - \frac{z}{1 + \frac{i}{n^3}}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^5 + in^2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\left(1 + \frac{i}{n^3}\right)^k}$ . Si on note  $u = \frac{z}{\left(1 + \frac{i}{n^3}\right)}$ , on a

bien  $|u| < 1$  car  $\left|1 + \frac{i}{n^3}\right| > 1$ . Donc  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right)$ .

On s'intéresse à  $\sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^5 \left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}}$  (c'est une somme finie de séries

convergentes). Si on pose, pour  $k \in \mathbb{N}$  fixé :  $b_{n,k} = \frac{1}{n^5 \left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}}$ , alors  $n^2 b_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc la série

$\sum_{n \geq 1} b_{n,k}$  converge absolument et on pose  $a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}}$ .

Il vient alors  $\sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{z^k}{\left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \left( a_k - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 + in^{-3}\right)^{k+1}} \right)$ .

De plus,  $|a_k| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 |1 + in^{-3}|^{k+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} = C$ , donc comme  $|z| < 1$ ,  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  converge et on peut séparer

la somme en deux.

Donc  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right)$ .

Or  $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} = C_N$ , donc  $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right| \leq C_N \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^k$ .

Donc par encadrement,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{(1+in^{-3})^{k+1}} \right) = 0$  et  $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

Donc  $f$  est développable en série entière, avec un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

De plus, si  $z = 1 + \frac{i}{k^3}$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \frac{1}{\left(1 - z + \frac{i}{n^3}\right)}$  n'est pas défini.

Donc  $R \leq \left| 1 + \frac{i}{k^3} \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^6}}$ , donc en passant à la limite,  $R \leq 1$ .

$f$  est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1.

On peut aussi utiliser le théorème de Fubini sur les familles sommables, mais c'est normalement hors programme puisqu'on n'est pas dans un contexte probabiliste....

2) Si  $|z| \leq 1$ , on pose  $U_n(z) = \frac{1}{n^5 \left(1 - z + \frac{i}{n^3}\right)}$ .

Si  $z = 1$ , il vient  $U_n(z) = -\frac{i}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} U_n(z)$  converge.

Si  $z \neq 1$ ,  $n^2 U_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\sum_{n \geq 1} U_n(z)$  converge aussi.

Donc  $f$  est définie sur tout le disque unité fermé.

3) Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $z_N = \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i \frac{1}{N^3}$ . On a  $|z_N| = 1$ .

Alors  $f(z_N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}} + i \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{N^3}\right)\right)}$ .

Donc  $\operatorname{Re}(f(z_N)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}}{n^5 \left( \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{N^3}\right)^2 \right)}$ .

Il s'agit d'une somme de nombres positifs, supérieure ou égale au terme obtenu pour  $n = N$  :

$\operatorname{Re}(f(z_N)) \geq \frac{1}{N^5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}\right)}$ .

Or  $\frac{1}{N^5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^6}}\right)} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{N^5} \left(\frac{N^6}{2}\right)$ , donc par encadrement,  $\operatorname{Re}(f(z_N)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ .

En particulier, la suite  $(z_N)$  converge vers 1 lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ , mais  $f(z_N)$  ne tend pas vers  $f(1)$ . Avec la caractérisation séquentielle,  $f$  n'est pas continue en 1 donc sur le disque unité fermé.

**Exercice 43 (oral X 24, Andréa,4)** : soient deux suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$  et  $(b_n)$  diverge.

On suppose que  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  converge vers  $s \in \mathbb{R}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  et  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ . Montrer que  $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$  converge vers  $s$ .

Ind : revenir à la définition de limite. Majorer  $\left|\frac{A_n}{B_n} - s\right| = \left|\frac{A_n - sB_n}{B_n}\right|$  en coupant la somme en deux. Montrer que

$B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et conclure avec la double détente.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , il vient  $B_{n+1} - B_n = b_{n+1} \geq 0$ , donc  $(B_n)$  est croissante. Si elle convergeait, on aurait  $b_n = B_n - B_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui n'est pas le cas. Donc  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

On utilise la définition de limite : soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, \left|\frac{a_n}{b_n} - s\right| \leq \varepsilon$ .

Donc pour  $n \geq N$ ,  $|a_n - sb_n| \leq \varepsilon b_n$ .

On s'intéresse à  $W_n = \left|\frac{A_n}{B_n} - s\right| = \left|\frac{A_n - sB_n}{B_n}\right|$

Il vient alors pour  $n \geq N$  :  $A_n - sB_n = \sum_{k=0}^N (a_k - sb_k) + \sum_{k=N+1}^n (a_k - sb_k)$

Donc  $|A_n - sB_n| \leq \left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right| + \sum_{k=N+1}^n |a_k - sb_k| \leq \left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n b_k$ .

Or  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$ , donc  $|A_n - sB_n| \leq \left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right| + \varepsilon B_n$ .

Ainsi,  $W_n = \left|\frac{A_n - sB_n}{B_n}\right| \leq \frac{\left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right|}{B_n} + \varepsilon$ .

C'est la double détente :  $\left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right|$  est une constante et  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc  $\frac{\left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right|}{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N', \frac{\left|\sum_{k=0}^N (a_k - sb_k)\right|}{B_n} \leq \varepsilon$ . Donc  $\forall n \geq \max(N, N'), \left|\frac{A_n}{B_n} - s\right| \leq 2\varepsilon$ .

On retrouve la définition de limite et  $\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$  converge vers  $s$ .

**Exercice 44 (oral ENS 24, Andréa,4)** : On considère une suite  $(a_n)$  définie par  $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1}^3 = 8 - a_n^2 \end{cases}$ .

Que dire de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{n+1} - a_n|$  ?

Ind : poser  $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$  et étudier cette fonction sur  $[0, 2]$ . Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Il s'agit d'une suite récurrente. On note pour  $x \in \mathbb{R}_+$  :  $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$ . Par composée,  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . On a  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$ . De plus,  $f(0) = 8^{1/3} = 2$ , donc  $a_1 = 2$ , et  $f(2) = 4^{1/3} > 0$ .

Donc  $f([0, 2]) \subset [f(2), f(0)] \subset [0, 2]$  et par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, 2]$ .

De plus, pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = -\frac{2}{3}x(8 - x^2)^{-2/3} = -\frac{2}{3}x \frac{1}{(f(x))^2}$

Donc pour  $x \in ]0, 2]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{4}{3} \frac{1}{(f(2))^2}$ , donc  $|f'(x)| \leq \frac{4^{1/3}}{3} \leq \frac{2}{3} = k$ .

On utilise l'inégalité des accroissements finis.

Comme  $f$  est continue sur  $[0, 2]$ , dérivable sur  $]0, 2[$ , à valeurs réelles, il vient

$$\forall x, y \in [0, 2], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

En particulier, comme  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, 2]$ , il vient  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq k|a_n - a_{n-1}|$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}|$ .

Par récurrence, il vient  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |a_{n+1} - a_n| \leq k^n |a_1 - a_0|$ .

Comme  $0 \leq k < 1$  (l'application  $f$  est contractante sur  $]0, 2]$ ),  $\sum k^n |a_1 - a_0|$  converge, donc  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  aussi.

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{n+1} - a_n|$  est convergente.

**Exercice 45 (oral ENS 24, Matthias, 5) :** Soit  $(P_n)$  une suite de polynômes à coefficients réels, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - e^x| = 0. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(P_n) = +\infty$$

Ind : on peut procéder par l'absurde et montrer qu'il existe une suite  $(Q_n)$  extraite de  $(P_n)$  qui est de degré

borné. Si on a  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k$ , prendre  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq d}$  deux à deux distincts et étudier les limites des  $Q_n(\lambda_i)$  pour montrer avec Vandermonde que  $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_k$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} (P_n(x) - e^x) = 0$ , on peut dire que  $(P_n)$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers la fonction  $x \mapsto e^x$ .

On procède par l'absurde et on suppose qu'on n'a pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(P_n) = +\infty$ .

Alors il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \deg(P_n) \leq d$ . Soit un tel  $d$

Pour  $N = 0$ , on prend  $n_0 \geq N, \deg(P_{n_0}) \leq d$  et on pose  $Q_0 = P_{n_0}$ . On pose  $n_0 = \varphi(0)$

Puis pour  $N = n_0 + 1$ , on prend  $n_1 \geq N, \deg(P_{n_1}) \leq d$  et on pose  $Q_1 = P_{n_1}$  et  $n_1 = \varphi(1) > \varphi(0)$ .

On construit ainsi par récurrence une suite  $(Q_n) = (P_{\varphi(n)})$  de polynômes qui vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(Q_n) \leq d$ . Elle est extraite de  $(P_n)$  donc converge aussi vers  $x \mapsto e^x$  dans l'espace vectoriel normé des fonctions  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$ , à valeurs réelles, muni de  $\|\cdot\|_\infty$ .

On écrit ensuite pour  $x \in [-1, 1]$  :  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k$ .

Comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple, il vient  $\forall x \in [-1, 1], Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ .

On prend  $-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_d < 1$ . On a alors pour tout  $j \in \llbracket 0, d \rrbracket$  :  $\sum_{k=0}^d a_{n,k} (\lambda_j)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda_j}$ .

On écrit cela matriciellement : si  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \dots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & & \lambda_1^d \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_d & & \lambda_d^d \end{pmatrix}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0} \\ e^{\lambda_1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$ .

On a donc  $AX_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} B$  (convergence coordonnée par coordonnée).

Or comme les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts, on peut dire avec Vandermonde que  $A$  est inversible.

Or  $X \mapsto A^{-1}X$  est linéaire en dimension finie, donc continue.

Donc  $A^{-1}(AX_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A^{-1}B$ , donc la suite  $(X_n)$  converge dans  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Avec la convergence coordonnée par coordonnée, il vient  $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_k$ .

Dès lors, pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^d a_{n,k} x^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sum_{k=0}^d a_k x^k$ . Mais on a aussi  $Q_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x$ , donc par unicité de la

limite,  $\forall x \in [-1, 1], \sum_{k=0}^d a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$ . C'est absurde par unicité du développement en série entière (on n'a pas

$$\frac{1}{(d+1)!} = 0. \quad \boxed{\text{Donc on a bien } \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(P_n) = +\infty.}$$

**Exercice 46 (oral ESPCI 24, Raphaël, 5) :** soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fonctions continues telles que

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0. \text{ Montrer que } \left( \int_0^1 f^2(t)dt \right) \left( \int_0^1 g^2(t)dt \right) \geq 4 \left( \int_0^1 f(t)dt \right) \left( \int_0^1 g(t)dt \right)^2$$

On pourra commencer par prouver le résultat pour des fonctions constantes par morceaux.

Ind : prendre une subdivision régulière de  $[0, 1]$  et écrire le résultat attendu pour des fonctions constantes par morceaux. Traduire le résultat à l'aide de produits scalaires et de normes de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  en utilisant

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \text{ Décomposer les vecteurs à l'aide de } \text{Vect}(E) \oplus (\text{Vect}(E))^\perp = \mathbb{R}^n \text{ et montrer le résultat attendu}$$

avec Cauchy-Schwarz et des normes de vecteurs.

Généraliser le résultat aux fonctions continues de  $\mathbb{R}^n$  à l'aide des sommes de Riemann

On considère une subdivision régulière  $(c_0, \dots, c_n)$  de  $[0, 1]$  donnée par  $c_k = \frac{k}{n}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On définit les fonctions  $f_n$  et  $g_n$  par  $\forall x \in [c_k, c_{k+1}[$ ,  $f_n(x) = \lambda_k$  et  $g_n(x) = \mu_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , avec

$$f_n(1) = \lambda_n \text{ et } g_n(1) = \mu_n. \text{ Alors } \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k, \int_0^1 g_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \text{ et } \int_0^1 f_n(t)g_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mu_k.$$

On suppose donc  $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mu_k = 0$  et on veut prouver que  $\left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 \right) \geq 4 \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \right)^2$ , ce qui

$$\text{équivalut à } n^2 \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 \right) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 \right) \geq 4 \left( \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \right) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \right)^2.$$

$$\text{On pose alors } U = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, V = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

On veut montrer que  $n^2 \|U\|^2 \|V\|^2 \geq 4 \langle U, E \rangle^2 \langle V, E \rangle^2$  lorsque  $\langle U, V \rangle = 0$ .

On sait que  $\text{Vect}(E) \oplus (\text{Vect}(E))^\perp = \mathbb{R}^n$ .

On décompose  $U = \alpha E + U'$  et  $V = \beta E + V'$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\langle U', E \rangle = \langle V', E \rangle = 0$ .

On a alors  $\|U\|^2 = \alpha^2 \|E\|^2 + \|U'\|^2 = \alpha^2 n + \|U'\|^2$ ,  $\|V\|^2 = \beta^2 n + \|V'\|^2$ ,  $\langle U, E \rangle = \alpha n$ ,  $\langle V, E \rangle = \beta n$ .

En outre  $\langle U, V \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha \beta n + \langle U', V' \rangle = 0$

On veut donc montrer que  $n^2 (\alpha^2 n + \|U'\|^2) (\beta^2 n + \|V'\|^2) \geq 4\alpha^2 \beta^2 n^4$  lorsque  $\langle U', V' \rangle = -\alpha \beta n$ .

Ceci équivaut à  $(\alpha^2 n + \|U'\|^2) (\beta^2 n + \|V'\|^2) \geq 4\alpha^2 \beta^2 n^2$ .

Or avec Cauchy-Schwarz,  $\langle U', V' \rangle^2 = (\alpha \beta n)^2 \leq \|U'\|^2 \|V'\|^2$ .

De plus,  $(\alpha^2 n \|V'\|^2 + \beta^2 n \|U'\|^2) = \|\alpha \sqrt{n} V' + \beta \sqrt{n} U'\|^2 - 2\alpha \beta n \langle U', V' \rangle \geq 2\alpha^2 \beta^2 n^2$ .

On a donc bien  $(\alpha^2 n + \|U'\|^2) (\beta^2 n + \|V'\|^2) \geq 4\alpha^2 \beta^2 n^2$  et le résultat est vrai pour  $f$  et  $g$  constantes par morceaux définies auparavant.

On utilise ensuite les sommes de Riemann pour approcher  $f$  et  $g$  continues sur  $[0, 1]$  à l'aide de fonctions

constantes par morceaux. On suppose  $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ .

On prend  $n \geq 2$  et on pose  $\lambda_k = f_n(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right)$  et  $\mu_k = g_n(c_k) = g\left(\frac{k}{n}\right)$  pour  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ .

On pose aussi  $\lambda_{n-1} = 1$  et  $\mu_{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k \mu_k$  (ainsi, on a bien  $\int_0^1 f_n(t)g_n(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mu_k = 0$ ).

Donc avec ce qui précède,  $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2\right) \geq 4 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\right)$  (1).

Or  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} f^2\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^2\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f^2\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n}$ . Or  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc

bornée et ainsi  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t)dt$ .

De même,  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} g^2\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\mu_{n-1}^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^2\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} g^2\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{\mu_{n-1}^2}{n}$ .

Or  $\frac{\mu_{n-1}}{n} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f g\left(\frac{n-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ , donc  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g^2(t)dt$ .

De même,  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)dt$  et  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t)dt$ .

On conclut en passant l'inégalité (1) à la limite :  $\boxed{\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right) \left(\int_0^1 g^2(t)dt\right) \geq 4 \left(\int_0^1 f(t)dt\right) \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2}$

**Exercice 47 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) :** soit  $f$  une fonction  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , bornée.

- 1) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2}\right) = |f(0)|$ .
- 2) On suppose en plus  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \neq 0$ . Donner un équivalent de  $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Ind :

- 1) Montrer tout d'abord que  $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |f(x)| e^{-tx^2}$  possède bien un maximum  $M_t$  sur  $\mathbb{R}$  en exploitant la définition de limite et le théorème des bornes atteintes. Utiliser ensuite la définition de la continuité de  $f$  en 0 et obtenir le résultat avec la définition de limite.

- 2) Etudions sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $h_t : x \rightarrow x e^{-tx^2}$  et déterminer son maximum  $N_t$ . Exprimer  $g_t$  à l'aide de  $f_t$  et procéder de manière analogue au 1), en encadrant  $\frac{M_t}{N_t}$  pour  $t$  assez grand.

- 1) Soit  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C$ . Pour  $t \geq 1$ , on considère  $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |f(x)| e^{-tx^2}$ .

On justifie que  $g_t$  possède un maximum sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est constante nulle, c'est bien le cas.

Sinon, soit  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(c) \neq 0$ . Soit  $u = g_t(c) = |f(c)| e^{-tc^2} > 0$ .

Comme  $g_t(x) = |f(x)| e^{-tx^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $g_t(x) = |f(x)| e^{-tx^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ , on peut trouver  $A > 0$  tel que

$\forall x \notin [-A, A], g_t(x) \leq \frac{u}{2}$ . En particulier,  $c \in [-A, A]$ . Sur le segment  $[-A, A]$ ,  $g_t$  est continue, donc

possède par théorème des bornes atteintes un maximum  $M_t \geq u = g_t(c)$ .

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, g_t(x) \leq M_t$  et  $g_t$  possède un maximum égal à  $M_t$  sur  $\mathbb{R}$ .

On prouve maintenant que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (M_t) = |f(0)|$ , avec  $M_t = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2}$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en 0,  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} |f(0)|$ .

Donc soit  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in [-\alpha, \alpha], |f(x)| \leq |f(0)| + \varepsilon$ . Donc pour  $x \in [-\alpha, \alpha] : |g_t(x)| \leq |f(0)| + \varepsilon$ .

Pour  $|x| \geq \alpha$ ,  $|f(x)| e^{-tx^2} \leq C e^{-t\alpha^2}$ . Or  $C e^{-t\alpha^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Soit donc  $t_0 \geq 1$  tel que  $\forall t \geq t_0, C e^{-t\alpha^2} \leq |f(0)| + \varepsilon$ .

Pour  $t \geq t_0$ , on a donc  $\forall x \in \mathbb{R}, |g_t(x)| \leq |f(0)| + \varepsilon$ , donc  $g_t(0) \leq M_t \leq |f(0)| + \varepsilon$

On a donc  $\forall t \geq t_0, |f(0)| \leq M_t \leq |f(0)| + \varepsilon$ .

C'est la définition de limite et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2} \right) = |f(0)|$ .

- 2) On suppose  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \neq 0$ . Alors  $g_t(0) = 0$  et pour  $x \neq 0$ ,  $g_t(x) = \left| \frac{f(x)}{x} \right| |x| e^{-tx^2}$ .

Etudions sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $h_t : x \rightarrow x e^{-tx^2}$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $h_t'(x) = (1 - 2tx^2) e^{-tx^2}$ .

Elle est croissante puis décroissante et possède donc un maximum atteint pour  $2tx^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$ .

Le maximum de  $h_t$  sur  $\mathbb{R}_+$  est atteint en  $x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$  et vaut  $N_t = \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

On a d'une part  $M_t = \max_{x \in \mathbb{R}} g_t(x) \geq g_t\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right) = \left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right| \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{1}{\sqrt{e}}$ , donc  $\sqrt{2te} M_t \geq \left| \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right|$  (1).

On fixe de nouveau  $\varepsilon > 0$ .

Il vient par définition  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0} |f'(0)|$ . On peut donc considérer  $\alpha > 0$  tel que

$\forall x \in [-\alpha, \alpha], \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |f'(0)| + \varepsilon$ . Alors  $\forall x \in [-\alpha, \alpha], |g_t(x)| \leq (|f'(0)| + \varepsilon) N_t$ .

Pour  $|x| \geq \alpha$ ,  $|f(x)| e^{-tx^2} \leq C e^{-t\alpha^2}$ , donc  $0 \leq \frac{|g_t(x)|}{N_t} \leq C \sqrt{2te} e^{-t\alpha^2}$ . Or par croissance comparée,

$\sqrt{2te} e^{-t\alpha^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Soit donc  $t_0 \geq 1$  tel que  $\forall t \geq t_0, C \sqrt{2te} e^{-t\alpha^2} \leq |f'(0)| + \varepsilon$ .

Pour  $t \geq t_0$ , on a donc  $\forall x \in \mathbb{R}, |g_t(x)| \leq (|f'(0)| + \varepsilon) N_t$ , donc  $M_t \leq (|f'(0)| + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2te}}$

On a donc avec (1) :  $\forall t \geq t_0, (|f'(0)| + \varepsilon) \geq \sqrt{2t}M_t \geq \left| \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2t}})}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right|$ .

On utilise la double détente.

Par composée de limites,  $\left| \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2t}})}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} |f'(0)|$ , donc il existe  $t_1 \geq 1$  tel que  $\forall t \geq t_1, \left| \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2t}})}{\frac{1}{\sqrt{2t}}} \right| \geq |f'(0)| - \varepsilon$ .

Pour  $t \geq \max(t_0, t_1)$ , il vient  $\forall t \geq t_0, (|f'(0)| + \varepsilon) \geq \sqrt{2t}M_t \geq (|f'(0)| - \varepsilon)$

On reconnait la définition de limite et  $\sqrt{2t}M_t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} |f'(0)|$ .

Donc  $M_t = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| e^{-tx^2} \sim \frac{|f'(0)|}{\sqrt{2t}}$