Probabilités : Préparation aux Oraux 2026

Séance 1 : Jeudi 28 Mai

Cours : revoir tout le chapitre 8

Exercice 1 (oral IMT 25, Rémy,2) : Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim P(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

1) Calculer directement $E(X(X-1)\dots(X-r+1))$, avec $r \in \mathbb{N}^*$.
2) Retrouver ce résultat avec la fonction génératrice.

Ind :

1) Utiliser le théorème de transfert.
2) Dériver terme à terme l'expression de $G_X(t)$.

1) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On souhaite appliquer le théorème de transfert.

On considère $S = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)...(n-r+1)P(X=n) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On a donc $S = e^{-\lambda} \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r)!} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+r}}{n!} = \lambda^r$.

Donc la famille $\left(n(n-1)...(n-r+1)P(X=n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et par théorème de transfert,

$X(X-1)\dots(X-r+1)$ est d'espérance finie et $\boxed{E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = S = \lambda^r}$

2) Comme $X \sim P(\lambda)$, on sait que $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$.

Le rayon de convergence de cette série entière étant égal à $+\infty$ (pour la loi de Poisson), on peut dériver terme à terme autant de fois qu'on le souhaite.

Donc $G_X'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1}$, puis $G_X''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$

Dès lors, par récurrence, $G_X^{(r)}(t) = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)..(n-1+r)P(X=n)t^{n-r}$.

Donc $G_X^{(r)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-r+1))$

Mais par ailleurs $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, donc $G_X^{(r)}(t) = \lambda^r e^{\lambda(t-1)}$ et $G_X^{(r)}(1) = \lambda^r$.

On retrouve donc bien $\boxed{E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = S = \lambda^r}$

Exercice 2 (Oral IMT 25, Ninon,2) : Au sein d'une population, chaque personne a une probabilité p d'être contaminée. Une personne saine en contact avec un malade a 2 chances sur 3 d'être contaminée à son tour. Un examinateur (sain) visite cette ville de n habitants.

1) Soit N le nombre de personnes contaminées qu'il rencontre. Déterminer la loi de N.
2) Quelle est la probabilité pour que l'examinateur soit contaminé à la fin ?

Ind :

1) Reconnaître une loi usuelle.
2) Utiliser l'événement contraire et la formule des probabilités totales.

1) N est le nombre de personnes contaminées que l'examinateur rencontre. Il y a n habitants, donc on réalise n fois la même expérience aléatoire, de manière indépendante, avec une probabilité de succès (la personne rencontrée est contaminée) égale à p. Donc $\boxed{N \sim B(n,p)}$

2) On note A l'événement « l'examinateur est contaminé à la fin », et $\overline{A}$ son événement contraire. Alors on utilise la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(N=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Donc $P\left(\overline{A}\right)=\sum_{k=0}^{n}P(N=k)P\left(\overline{A}/N=k\right)$.

Si l'examinateur a rencontré k personnes contaminées, sa probabilité de ne pas être contaminé à la fin est de $\left(\frac{1}{3}\right)^k$. Donc $P\left(\overline{A}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{1}{3^k}=\left(\frac{p}{3}+1-p\right)^n=\left(1-\frac{2p}{3}\right)^n$.

On trouve donc $\boxed{P(A)=1-\left(1-\frac{2p}{3}\right)^n}$. Si $p=0$, on trouve bien $P(A)=0$ (personne n'est malade) et si $p=1$ (tout le monde est malade), $P\left(\overline{A}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (l'examinateur n'est contaminé par aucun habitant de la ville).

Exercice 3 (Oral CCINP 24, Pauline,3) :

Soit $a>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_n(a)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a^k}{a^k+1}$

1) Donner un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.
2) a) Montrer que la suite $(U_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   b) On suppose $a\in\left]0,1\right]$. Etudier la limite de $(U_n(a))$ quand n tend vers l'infini.
3) a) Etudier la convergence de la suite $(-\ln(U_n(a)))$ quand n tend vers l'infini.

   b) Trouver les valeurs de a telles que la limite de $(U_n(a))$ n'est pas nulle.
4) On prend une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On tire aléatoirement une boule. Si on pioche une boule blanche, on la remet et on double le nombre de boules blanches dans l'urne.
   Si on pioche la boule noire, on s'arrête.
   On note B_i : « on tire une boule blanche au i-ème tour »
   On pose C_n : « on n'a tiré que des boules blanches jusqu'au n-ème tour », et $\pi_n=P(C_n)$.
   Pour quelle valeur de a a-t-on $U_n(a)=\pi_n$?
5) Quelle est la probabilité que l'on ne pioche jamais la boule noire ?

Ind :
1) Immédiat.
2) a) Montrer que la suite est décroissante et minorée.
   b) Traiter le cas $a=1$ à part et utiliser une majoration.
3) a) Se ramener à la nature d'une série.
   b) Utiliser 2) et 3a) en séparant les cas.
4) Utiliser la formule des probabilités composées.
5) Déterminer $P\left(B=\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_k\right)$.

1) On a directement $\boxed{\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x}$
2) a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $U_n(a)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a^k}{a^k+1}>0$ et la suite $(U_n(a))$ est minorée.

   De plus, $U_{n+1}(a)=\frac{a^n}{a^n+1}U_n(a)\le U_n(a)$.

   Donc $\boxed{(U_n(a)) \text{ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers } l(a)\ge 0}$.

   b) On suppose $a\in\left]0,1\right[$. Alors $0\le U_n(a)\le\prod_{k=0}^{n-1}a^k$, donc $0\le U_n(a)\le a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

   Or $a^{\frac{n(n+1)}{2}}=\exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\ln(a)\right)\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Donc par encadrement, $U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Si $a=1$, $U_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

$\boxed{\text{Donc si } a \in]0,1],\ U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$.

3) a) $-\ln(U_n(a)) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{a^k}{a^k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)$.

Si $a \in]0,1]$, $\left(\ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)\right)$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)$ diverge grossièrement et la suite $(-\ln(U_n(a)))$ est divergente.

Si $a>1$, $\ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^k}$. Or $\sum_k \frac{1}{a^k}$ converge et c'est une série à termes positifs. Donc la série $\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{a^k}\right)$ converge et la suite $(-\ln(U_n(a)))$ est convergente.

Donc $\boxed{(-\ln(U_n(a))) \text{ converge si et seulement si } a>1}$

b) On a vu au 2) que si $a \in]0,1]$, alors $(U_n(a))$ converge vers une limite nulle.

De plus, avec 3a), si $a>1$, $-\ln(U_n(a)) \underset{n\to+\infty}{\to} c \in \mathbb{R}$ et $U_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-c} > 0$.

Donc $\boxed{(U_n(a)) \text{ converge vers une limite non nulle si et seulement si } a>1}$.

4) Il vient directement $C_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$.
Avec la formule des probabilités composées, $P(C_n) = P(B_1)P(B_2 / B_1)\ldots P(B_n / B_1 \cap .. \cap B_{n-1})$
Pour $k \in [\![2,n]\!]$, on calcule $P(B_k / B_1 \cap .. \cap B_{k-1})$.
Si on a pioché $k-1$ boules blanches dans l'urne, il y a $2.2....2 = 2^{k-1}$ boules blanches dans l'urne, et 1 boule noire, donc $2^{k-1}+1$ boules au total.
Donc $P(B_k / B_1 \cap .. \cap B_{k-1}) = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}+1}$. En outre, $P(B_1) = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\pi_n = P(C_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^k+1} = U_n(2)}$

5) On note B l'événement : « on ne pioche jamais la boule noire ».
Alors $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$. Donc $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n)$

On a vu au 3a) que $-\ln(U_n(2)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Donc $\boxed{P(B) = \lim_{n\to+\infty} U_n(2) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) > 0}$

On a vu que cette série était convergente, mais je ne vois pas trop comment calculer sa somme.

Exercice 4 (oral IMT 25, Laurène,3) : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X est d'espérance et de variance finie strictement positives.

1) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Soit 1_A telle que $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon. Montrer que $1_A X$ est d'espérance finie.
2) On pose $\mathrm{P}_X(A) = \frac{\mathrm{E}(1_A X)}{\mathrm{E}(X)}$. On suppose que X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $A = (X \in 2\mathbb{N}) = \{\omega \in \Omega, \exists k \in \mathbb{N}, X(\omega) = 2k\}$. Calculer $\mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}_X(\mathrm{A})$.

1) Pour $\omega\in\Omega$, $|1_A X(\omega)|\le 1+X^2(\omega)$. En effet, c'est vrai si $|X(\omega)|\le 1$, et si $|X(\omega)|>1$, il vient directement $|1_A X(\omega)|\le |X(\omega)|\le X^2(\omega)\le 1+X^2(\omega)$.

Or X de variance finie donc X^2 est d'espérance finie et par majoration, $\boxed{1_A X \text{ est d'espérance finie.}}$

2) On commence par calculer $\mathrm{P}(A)=P\left(\bigcup_{k\ge 0}(X=2k)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2k)$.

Donc $\boxed{\mathrm{P}(A)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=ch(\lambda)e^{-\lambda}=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda}\right)}$

De plus, on pose $Y=1_A X$. Si $\exists k\in\mathbb{N}, X(\omega)=2k$, alors $Y=2k$ et sinon $Y=0$.

Donc $Y(\Omega)=\{2k, k\in\mathbb{N}\}$ et $E(1_A X)=E(Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}2k\,P(Y=2k)$.

Donc $E(1_A X)=\sum_{k=0}^{+\infty}2k\,P(X=2k)=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Donc $\boxed{E(1_A X)=\lambda e^{-\lambda}sh(\lambda)}$. Donc $\boxed{\mathrm{P}_X(A)=\frac{\lambda e^{-\lambda}sh(\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda}\right)}$

Exercice 5 (oral Mines 25, Antonin,4) : Soit $n>1$. Soit E l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$. On munit E de la loi uniforme. Calculer la probabilité pour $f\in E$ soit surjective.

Ind : pour déterminer le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$ qui sont surjectives, considérer l'unique élément de $[\![1,n-1]\!]$ qui possède deux antécédents, choisir ces deux antécédents, puis regarder ce qui se passe pour les éléments restants.

Notons A l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$ qui sont surjectives. On aura $P(A)=\frac{card(A)}{card(E)}$.

Il y a $(n-1)^n$ applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$ (on a $(n-1)$ possibilités pour l'image de chaque élément de $[\![1,n]\!]$). Donc $card(E)=(n-1)^n$.

Il reste à déterminer $card(A)$.

Lorsque $f\in E$ est surjective, un élément a de l'ensemble d'arrivée possède deux antécédents, et les autres un seul. Il y a $n-1$ manières de choisir a, puis $\binom{n}{2}$ manières de choisir les deux antécédents b,c de a.

Alors $g:\begin{array}{l}[\![1,n]\!]\setminus\{b,c\}\to[\![1,n-1]\!]\setminus\{a\}\\ k\mapsto f(k)\end{array}$ est bijective : il y a donc $(n-2)!$ possibilités pour le choix de g.

On obtient donc $card(A)=(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!$

On obtient donc $\boxed{P(A)=\frac{card(A)}{card(E)}=\frac{n!}{2(n-1)^{n-1}}}$

Exercice 6 (oral Mines 25,3) : Soit X une variable aléatoire positive qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $E(X^k)=\int_0^{+\infty}k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt$.

Ind : Poser $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$ avec $0\le x_1<x_2<...<x_n$. Utiliser Chasles.

On pose $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$, avec $0 \le x_1 < x_2 < ... < x_n$. On pose $x_0 = 0$.

Comme $P(X>t)=0$ lorsque $t > x_n$, $\int_0^{+\infty} k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt = \int_0^{x_n} k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt$ et l'intégrale converge.

On calcule alors avec Chasles : $\int_0^{+\infty} k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k\,t^{k-1}P(X>x_i)\,dt$.

Donc $\int_0^{+\infty} k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{i+1}^k - x_i^k\right)P(X>x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P(X>x_{i-1}) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^k P(X>x_i)$ avec un changement d'indice.

Donc $\int_0^{+\infty} k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^k\left(P(X>x_{i-1})-P(X>x_i)\right)+x_i^n P(X=x_n) - 0P(X>0)$.

On a donc bien $\boxed{\int_0^{+\infty} k\,t^{k-1}P(X>t)\,dt = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^k P(X=x_i) + x_i^n P(X=x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P(X=x_i) = E(X^k)}$

Séance 2 : Mercredi 10 Juin

Cours : revoir tout le chapitre 12

Exercice 7 (Oral CCINP 25, Marin,2) : soit N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de X sachant $N=n$ est une loi binomiale $B(n,p)$. Déterminer la loi de X.

Ind : utiliser la formule des probabilités totales.

Tout d'abord, on remarque que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On utilise la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k / N=n)P(N=n)$.

Donc $P(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}$.

Donc $P(X=k) = \frac{p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n\frac{\lambda^{n+k}}{n!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$.

Donc $\boxed{X \sim P(\lambda p)}$

Exercice 8 (Oral IMT 25, Alice,2) :
Soit $n \ge 1$ bactéries. Chaque jour, chaque bactérie a une probabilité $p \in]0,1[$ de mourir, indépendante de celle des autres bactéries.
On note X_i le jour où meurt la i-ème bactérie
X est le nombre minimum de jours tel que toutes les bactéries soient mortes.

1) Déterminer la loi de X_i pour $1 \le i \le n$.
2) Calculer $P(X>k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que X est d'espérance est finie et la calculer (sous forme de somme finie).

Ind :

1) Reconnaître une loi usuelle.
2) Calculer plutôt $P(X \le k)$.
3) Développer l'expression précédente avec le binôme de Newton. Poser $q = 1-p$.

1) On reconnait le temps d'attente d'un premier « succés » (qui correspond à la mort de la bactérie). Donc pour $1 \le i \le n$, $\boxed{X_i \sim G(p)}$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. On calcule plutôt $P(X \le k) = P(X_1 \le k, X_2 \le k, .., X_n \le k)$.

Donc par indépendance, $P(X \le k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le k) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(X_i > k)\right) = \left(1 - (1-p)^k\right)^n$.

Donc $\boxed{P(X > k) = 1 - P(X \le k) = 1 - \left(1 - (1-p)^k\right)^n}$

3) X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $E(X) \in [0, +\infty]$ existe toujours.

On la calcule en posant $q = 1 - p \in]0,1[$:

$$P(X > k) = 1 - \left(1 - (1-p)^k\right)^n = 1 - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i q^{ki} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \left(q^i\right)^k.$$

Or pour $i \in [\![1, n]\!]$, $q^i \in]0,1[$, donc $\sum_k \left(q^i\right)^k$ est convergente.

Donc par somme finie de séries convergentes, $\sum_{k \ge 0} P(X > k)$ converge, donc X est d'espérance est finie (car X est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$).

De plus, $\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - q^i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - (1-p)^i}}$

Pour $n = 1$, on trouve $E(X) = \frac{1}{p}$, ce qui convient.

Exercice 9 (Oral Centrale 25,3) : Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, où $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim G(p)$, avec $p \in]0,1[$, $\lambda > 0$ et X, Y indépendantes.

1) Soit $U = rg(M)$. Déterminer $E(U)$.
2) Soit C la plus grande valeur propre de M. Déterminer son espérance et sa variance.

Ind :

1) Etudier quand M est inversible avec le déterminant.
2) Calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors $rg(N) \ge 1$ et N est inversible si et seulement si $\det(N) \ne 0$. Or $\det(N) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ car $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Donc $P(U = 1) = P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) P(Y = n)$ car X, Y sont indépendantes.

Donc $P(U = 1) = e^{-\lambda} p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (1-p)^{n-1} = \frac{e^{-\lambda} p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (1-p)^n = \frac{e^{-\lambda} p}{1-p} \left(e^{\lambda(1-p)} - 1\right)$.

Donc $\boxed{P(U = 1) = \frac{p}{1-p} \left(e^{-\lambda p} - e^{-\lambda}\right)}$

Puis $E(U) = P(U = 1) + 2\left(1 - P(U = 1)\right) = 2 - P(U = 1)$. Donc $\boxed{E(U) = 2 - \frac{p}{1-p} \left(e^{-\lambda p} - e^{-\lambda}\right)}$

2) Comme $M \in S_2(\mathbb{R})$, par théorème spectral, elle est diagonalisable et possède donc deux valeurs propres réelles (éventuellement identiques), notées α, β.

De plus, $M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (X+Y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, donc $\alpha = X+Y \in Sp(M)$.

En outre, $tr(M) = \alpha + \beta = 2X$, donc $\beta = X - Y < \alpha$, et $C = X+Y$.

Dès lors, $\boxed{E(C) = E(X)+E(Y) = \lambda + \frac{1}{p} \text{ et } V(C) = V(X)+V(Y) = \lambda + \frac{1-p}{p^2}}$

Exercice 10 (Oral Mines 25, Marin,3) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On note, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \ln(x)$ si $x > 0$ et 0 sinon.

1) Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) Calculer $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$

Ind :

1) Utiliser Bienaymé-Tchebychev.
2) Utiliser le théorème de transfert et obtenir le résultat sous forme de somme (je n'ai pas réussi à simplifier).

1) Comme les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, on sait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Donc $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et

$P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4}\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right)$ car $\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4}\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right)$.

On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right) \leq 16V\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Or $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4n}$, donc $0 \leq nP\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right) \leq 4$ et $\left(nP\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right)\right)$ est bornée.

Donc $\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)}$

2) On utilise le théorème de transfert. Comme S_n prend un nombre fini de valeurs, on n'a pas besoin de vérifier la sommabilité et on pose $g(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

Alors $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = E\left(g(S_n)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k) - \ln(n)\right) P(S_n = k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\ln(k) - \ln(n)\right)$.

$$\boxed{E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\ln(k) - \ln(n)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\ln(k)\right) - \left(\ln(n)\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$$

Exercice 11 (oral Mines 25, Marius,3) :
On considère un espace probabilisé. Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout entier naturel k, $P(X_k=1)=p$ et $P(X_k=-1)=1-p$. On considère $Y_k=\prod_{i=1}^{k}X_i$ et on définit pour $k\in\mathbb{N}$: $a_k=P(Y_k=1)$ et $b_k=P(Y_k=-1)$

Montrer qu'il existe $Q\in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}$. Expliciter a_k et b_k pour $k\in\mathbb{N}$.

Ind : utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_{k+1}=1),(X_{k+1}=-1))$, puis calculer Q^k en limitant les calculs (trouver un vecteur propre simple et remarquer que les sous-espaces propres doivent être orthogonaux).

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_{k+1}=1),(X_{k+1}=-1))$. Il vient pour $k\in\mathbb{N}$: $a_{k+1}=P(Y_{k+1}=1)=P\big((Y_{k+1}=1)\cap(X_{k+1}=1)\big)+P\big((Y_{k+1}=1)\cap(X_{k+1}=-1)\big)$
$a_{k+1}=P\big((Y_k=1)\cap(X_{k+1}=1)\big)+P\big((Y_k=-1)\cap(X_{k+1}=-1)\big)$.
Par lemme des coalitions, Y_k et X_{k+1} sont indépendantes. Donc $a_{k+1}=pa_k+(1-p)b_k$.
De même, $b_{k+1}=P(Y_{k+1}=-1)=P\big((Y_{k+1}=-1)\cap(X_k=1)\big)+P\big((Y_{k+1}=1)\cap(X_k=-1)\big)$.
Donc $b_{k+1}=a_{k+1}=(1-p)a_k+pb_k$.

$$\boxed{\text{On pose } Q=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \text{ et on a bien } \forall k\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}}.$$

Par récurrence, on déduit que $\forall k\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}=Q^k\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}=Q^k\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.
On a besoin de calculer la première colonne de Q^k.
$Q=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R})$, donc par théorème spectral, Q est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux. On remarque que $Q\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=(2p-1)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.
On note B la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $C=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right)$. C'est une base orthonormée constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme q canoniquement associé à Q.
On pose $P=P_{B,C}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.
Donc par formule de changement de base, $Q=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2p-1\end{pmatrix}P^T$, et $Q^k=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (2p-1)^k\end{pmatrix}P^T$ par récurrence.

Donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}=Q^k\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(2p-1)^k\\ 1-(2p-1)^k\end{pmatrix}}$. On a bien $a_k+b_k=1$.

Exercice 12 (Oral Centrale 25, Corentin,4) : soit $N\in\mathbb{N}^*$. On considère une population de N individus divisée en deux parties. A chaque étape, on choisit deux personnes dans la population. La première personne est retirée, et la seconde est réintroduite, avec en plus un nouvel individu du même groupe.
On note X_0 le nombre d'individus de la population qui appartiennent au premier des deux groupes à l'instant initial, et X_n le nombre d'individus de la population qui appartiennent au premier groupe après n étapes.

1) Pour $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$, déterminer $P(X_{n+1}=j\,/\,X_n=i)$. (NB : lorsque $P(X_n=i)\neq 0$)
2) Démontrer que $E(X_n)$ ne dépend pas de n.

Ind :

1) Traiter les différents cas suivant les valeurs de i.
2) Utiliser la formule des probabilités totales et bien organiser son calcul en exprimant tous les termes de $E(X_{n+1})-E(X_n)$ en fonction des $P(X_n=j)$.

1) On note $G1$ le premier groupe, et $G2$ le second.

On peut tout d'abord remarquer que le nombre d'individus de la population reste inchangé à chaque étape (puisqu'on enlève et qu'on rajoute une personne). Donc pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega)=[\![0,N]\!]$.

Soit $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$. Alors il y a trois possibilités pour les deux personnes choisies lors de l'étape $n+1$:

- On prend deux individus du même groupe. La population du groupe 1 est alors inchangée. Il s'agit de prendre successivement deux individus de $G1$, ou de $G2$, et l'union est disjointe.

  On déduit que pour $i\in[\![0,N]\!]$: $\boxed{P(X_{n+1}=i/X_n=i)=\left(\frac{i}{N}\right)\left(\frac{i-1}{N-1}\right)+\left(\frac{N-i}{N}\right)\left(\frac{N-i-1}{N-1}\right)}$
- On prend d'abord une personne de $G1$ (qui est retirée), puis une de $G2$ (qui est remise avec une personne du même groupe).

  On déduit que pour $i\in[\![1,N]\!]$: $\boxed{P(X_{n+1}=i-1/X_n=i)=\left(\frac{i}{N}\right)\left(\frac{N-i}{N-1}\right)}$
- On prend d'abord une personne de $G2$ (qui est retirée), puis une de $G1$ (qui est remise avec une personne du même groupe).

  On déduit que pour $i\in[\![0,N-1]\!]$: $\boxed{P(X_{n+1}=i+1/X_n=i)=\left(\frac{N-i}{N}\right)\left(\frac{i}{N-1}\right)}$

Ce sont les seules possibilités : $\boxed{\text{pour } j\notin\{i-1,i,i+1\},\ P(X_{n+1}=j/X_n=i)=0}$

On peut vérifier que la somme est bien égale à 1 :

$$\left(\frac{i}{N}\right)\left(\frac{i-1}{N-1}\right)+\left(\frac{N-i}{N}\right)\left(\frac{N-i-1}{N-1}\right)+2\left(\frac{N-i}{N}\right)\left(\frac{i}{N-1}\right)=\frac{(N-i)^2-N+2iN-i^2}{N(N-1)}=1.$$

2) $X_n(\Omega)\subset[\![0,N]\!]$ et $E(X_{n+1})=\sum_{j=1}^{N} jP(X_{n+1}=j)$

On utilise la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(X_n=i)_{0\le i\le N}$.

Il vient pour $j\ge 1$: $P(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{N}P(X_{n+1}=j/X_n=i)P(X_n=i)$.

On sait que $\left(\frac{j}{N}\right)\left(\frac{j-1}{N-1}\right)+\left(\frac{N-j}{N}\right)\left(\frac{N-j-1}{N-1}\right)=1-2\frac{j(N-j)}{N(N-1)}$

Donc avec 1), pour $j<N$

$$P(X_{n+1}=j)=\left(1-2\frac{j(N-j)}{N(N-1)}\right)P(X_n=j)+\frac{j-1}{N}\left(\frac{N-(j-1)}{N-1}\right)P(X_n=j-1)+\frac{j+1}{N}\left(\frac{N-(j+1)}{N-1}\right)P(X_n=j+1)$$

Et pour $j=N$: $P(X_{n+1}=N)=P(X_n=N)+\frac{1}{N}P(X_n=N-1)$.

$$\sum_{j=1}^{N} j\frac{j-1}{N}\left(\frac{N-(j-1)}{N-1}\right)P(X_n=j-1)=\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)j(N-j)P(X_n=j)=\sum_{j=0}^{N}(j+1)j(N-j)P(X_n=j)$$

et $$\sum_{j=1}^{N-1} j\frac{j+1}{N}\left(\frac{N-(j+1)}{N-1}\right)P(X_n=j+1)=\sum_{j=2}^{N}(j-1)j(N-j)P(X_n=j)=\sum_{j=0}^{N}(j-1)j(N-j)P(X_n=j)$$

$$E(X_{n+1})-E(X_n)=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=0}^{N}j(N-j)P(X_n=j)\left(j+1+j-1-2j\right)=0$$

$\boxed{\text{Donc } E(X_n) \text{ ne dépend pas de } n}$.

En plus :

Exercice 13 (oral Centrale 24, Antoine,5) Soit $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.

On pose $X=\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $Y=\sum_{k=1}^{N}(1-X_k)$. On note aussi $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)$ pour $t,u\in[-1,1]$.

1) Exprimer $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)$ en fonction de la fonction génératrice de N.
2) Montrer que si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

Ind :

1) Appliquer le théorème de transfert à $Z=(N,X)$ en prenant $f(n,k)=t^k u^{n-k}$. Reconnaître une loi binomiale quand on conditionne.
2) Montrer que $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=E\left(t^X\right)E\left(u^Y\right)$. Ecrire cette égalité à l'aide de doubles sommes et utiliser deux fois l'unicité du développement en série entière.

1) Soient $t,u\in[-1,1]$. On remarque que $X+Y=N$, donc $t^X u^Y = t^X u^{N-X}$.

On constate que X et N sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose pour $n,k\in\mathbb{N}$: $f(n,k)=t^k u^{n-k}$

On applique le théorème de transfert à $Z=(N,X)$.

$(f(n,k)P((N,X)=(n,k)))=\left(t^k u^{n-k}P\left(N=n,X=k\right)\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$ est bien sommable car

$\left|t^k u^{n-k}P\left(N=n,X=k\right)\right|\leq P\left(N=n,X=k\right)$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=n,X=k)=1$.

Donc par théorème de transfert, $E\left(f(N,X)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P\left(N=n,X=k\right)t^k u^{n-k}$ (1).

On calcule $P\left(N=n,X=k\right)=P\left(N=n\right)P\left(X=k/N=n\right)$

Or $P\left(X=k/N=n\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=k/N=n\right)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ si $k\in[\![0,n]\!]$ (en effet, les X_i sont indépendantes et la loi conditionnelle de X sachant $N=n$ est ainsi une loi binomiale), et $P\left(X=k/N=n\right)=0$ si $k>n$.

Donc $G(t,u)=E\left(f(N,X)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(N=n\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k u^{n-k}\right)$.

Donc $\boxed{G(t,u)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(N=n\right)\left(pt+(1-p)u\right)^n=G_N\left(\left(pt+(1-p)u\right)\right)}$

2) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Alors soient $t,u\in[-1,1]$. $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=G_N\left(\left(pt+(1-p)u\right)\right)=\exp\left(\lambda\left(pt+(1-p)u-1\right)\right)$

Si on prend $u=1$: $E\left(t^X\right)=\exp\left(\lambda\left(pt-p\right)\right)$. Pour $t=1$: $E\left(u^Y\right)=\exp\left(\lambda\left(p-1+(1-p)u\right)\right)$.

Donc on constate que $G(t,u)=E\left(t^X u^Y\right)=E\left(t^X\right)E\left(u^Y\right)$

Or, de nouveau avec le théorème de transfert, $E\left(t^X u^Y\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P\left(X=k,Y=n\right)t^k u^n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)t^k u^n=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)t^k\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)u^n\right).$$

Il vient donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)u^n\right)t^k=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k)P(Y=n)u^n\right)\right)t^k\right)$ (les familles sont sommables donc on peut sommer dans l'ordre qu'on veut).
Par unicité du développement en série entière, il vient

$$\forall k\in\mathbb{N},\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k,Y=n)u^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=k)P(Y=n)u^n\right).$$

Puis de nouveau par unicité du développement en série entière,
$\forall k,n\in\mathbb{N},P(X=k,Y=n)=P(X=k)P(Y=n)$. $\boxed{\text{Donc } (X,Y) \text{ sont indépendantes}}$.

Exercice 14 (oral Mines 24, Matthias,3) : Soit (Ω,A,P) un espace probabilisé. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires uniformes, indépendantes, à valeur dans $\{-1,1\}$. On note $X_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$.
Etudier le comportement asymptotique des suites $(E(\sin(X_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(E(\cos(X_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$

Ind : utiliser que $e^{iX_n}=\cos(X_n)+i\sin(X_n)$.

On remarque que pour $n\in\mathbb{N}^*$, il vient $e^{iX_n}=\cos(X_n)+i\sin(X_n)$.
Par linéarité de l'espérance, il vient alors $E\left(e^{iX_n}\right)=E(\cos(X_n))+i\,E(\sin(X_n))$.
Donc $E(\cos(X_n))=\mathrm{Re}\left(E\left(e^{iX_n}\right)\right)$ et $E(\sin(X_n))=\mathrm{Im}\left(E\left(e^{iX_n}\right)\right)$.
On calcule ainsi $E\left(e^{iX_n}\right)=E\left(\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)\right)=E\left(\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right)$.
Comme les $(\varepsilon_k)_{1\le k\le n}$ sont indépendantes, les $\left(\exp\left(\frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right)_{1\le k\le n}$ le sont aussi.
Donc $E\left(e^{iX_n}\right)=\prod_{k=1}^{n}E\left(\exp\left(\frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\right)+\exp\left(-\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)=\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$, avec le théorème de transfert.
En particulier, $\boxed{E(\sin(X_n))=0}$

$$E(\cos(X_n))=\mathrm{Re}\left(E\left(e^{iX_n}\right)\right)=\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=\exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

Or $n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, donc $n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{-1}{2}$

Dès lors, $\boxed{E(\cos(X_n))=\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{\sqrt{e}}}$

Exercice 15 (Oral ENS 25,4) : soient Y,Z deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si pour tous polynômes $Q,R\in\mathbb{R}[X]$, $E(Q(Y)R(Z))=E(Q(Y))E(R(Z))$.

Ind : procéder par double implication et utiliser les polynômes de Lagrange.

Tout d'abord, on suppose que Y et Z sont indépendantes. Alors on sait que toute fonction de Y et toute fonction de Z le sont également, donc en particulier, si $Q,R\in\mathbb{R}[X]$, $E(Q(Y)R(Z))=E(Q(Y))E(R(Z))$.
Réciproquement, on suppose $\forall Q,R\in\mathbb{R}[X],E(Q(Y)R(Z))=E(Q(Y))E(R(Z))$.
Soient $Q,R\in\mathbb{R}[X]$.

On utilise le théorème de transfert pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h:(y,z)\mapsto Q(y)R(z)$.

Comme Y,Z prennent un nombre fini de valeurs, $Q(Y)R(Z)=h(Y,Z)$ est d'espérance finie et il vient $E(Q(Y)R(Z))=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}h(i,j)P(Y=i,Z=j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}Q(i)R(j)P(Y=i,Z=j)$.

En outre, par théorème de transfert, $E(Q(Y))E(R(Z))=\left(\sum_{i=0}^{n}Q(i)P(Y=i)\right)\left(\sum_{j=0}^{n}R(j)P(Z=j)\right)$.

On a donc $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}Q(i)R(j)P(Y=i,Z=j)=\left(\sum_{i=0}^{n}Q(i)P(Y=i)\right)\left(\sum_{j=0}^{n}R(j)P(Z=j)\right)$.

On utilise les polynômes de Lagrange : on considère ainsi, pour $k\in[\![0,n]\!]$; L_k tel que $L_k(k)=1$ et pour $l\neq k$, $L_k(l)=0$.

On obtient donc $E(L_k(Y)L_l(Z))=P(Y=k,Z=l)=P(Y=k)P(Z=l)$.

$\boxed{\text{Donc } Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes et on a bien l'équivalence voulue}}$.

Exercice 16 (Oral ENS 25,5) : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose qu'il existe un réel positif a tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)\geq 2a$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X admet une variance et que $f(X)$ est d'espérance finie. Montrer que $E(f(X))-f(E(X))\geq aV(X)$.

Ind : Utiliser la fonction $g(x)=f(x)-ax^2$ et interpréter l'exercice à l'aide de la fonction g. Penser à l'inégalité de Jensen.

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-ax^2$. Alors g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et il vient $g''(x)=f''(x)-2a\geq 0$. Donc g est convexe.

De plus, $g(X)=f(X)-aX^2$ est d'espérance finie par combinaison linéaire.

Alors $E(f(X))=E(g(X))+aE(X^2)$ et $f(E(X))=g(E(X))+a(E(X))^2$.

Donc $E(f(X))-f(E(X))\geq aV(X)\Leftrightarrow E(g(X))+aE(X^2)-g(E(X))-a(E(X))^2\geq aV(X)$.

Donc $E(f(X))-f(E(X))\geq aV(X)\Leftrightarrow g(E(X))\leq E(g(X))$.

On sait que g est convexe. On va utiliser l'inégalité de Jensen :

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_0,...,\lambda_n\in\mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k=1$, pour tous $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$ on a $g\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=0}^{n}\lambda_k g(x_k)$.

On veut prouver $g\left(\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k)\right)\leq\sum_{k=0}^{+\infty}g(k)P(X=k)$.

On pose $S_N=\sum_{k=0}^{N}P(X=k)$. $S_N\underset{N\to+\infty}{\to}1$, donc pour N assez grand, $S_N>0$.

Alors $g\left(\sum_{k=0}^{N}k\frac{P(X=k)}{S_N}\right)\leq\sum_{k=0}^{N}g(k)\frac{P(X=k)}{S_N}$, avec $\sum_{k=0}^{N}\frac{P(X=k)}{S_N}=1$

On passe cette inégalité à la limite quand N tend vers $+\infty$.

$\sum_{k=0}^{N}k\frac{P(X=k)}{S_N}=\frac{1}{S_N}\sum_{k=0}^{N}kP(X=k)\underset{N\to+\infty}{\to}E(X)$, donc par continuité de g, $g\left(\sum_{k=0}^{N}k\frac{P(X=k)}{S_N}\right)\underset{N\to+\infty}{\to}g\big(E(X)\big)$.

Par ailleurs, $\sum_{k=0}^{N}g(k)\frac{P(X=k)}{S_N}=\frac{1}{S_N}\sum_{k=0}^{N}g(k)P(X=k)\underset{N\to+\infty}{\to}E(g(X))$.

On a donc bien $g(E(X))\leq E(g(X))$ et ainsi : $\boxed{E(f(X))-f(E(X))\geq aV(X)}$

Exercice 17 (oral X 25,5) : Une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite transiente si et seulement si pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) < +\infty$. Soit $\alpha > 0$.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $X_i \sim P\left(\dfrac{\alpha}{i}\right)$, et que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que $(Y_n)_{n\geq 1}$ soit transiente.

Ind : déterminer la loi de Y_n. Encadrer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale, puis étudier ce qui se passe pour $A = \{0\}$.
Lorsque $A \subset \mathbb{N}$ est bornée, utiliser qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset [\![0, M]\!]$.

Tout d'abord, pour $t \in \mathbb{R}$, $t^{Y_n} = \prod_{k=1}^{n} t^{X_k}$ est d'espérance finie car les t^{X_k} sont indépendantes et d'espérance finie.

De plus, $G_{Y_n}(t) = E\left(t^{Y_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \exp\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}(t-1)\right)$, donc si on note $\lambda_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $Y_n \sim P(\lambda_n)$.

Si $A = \{0\}$ (bornée), on constate que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n}$.

Or par comparaison somme-intégrale, $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \dfrac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t} dt$, donc $\alpha \ln(n) \leq \lambda_n \leq \alpha(1 + \ln(n))$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n} \geq e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha \ln(n)}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) \geq e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Donc si $\alpha \leq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) = +\infty$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ n'est pas transiente.

On suppose maintenant $\alpha > 1$.
Soit $A \subset \mathbb{N}$, bornée. Soit $M \in \mathbb{N}$ telle que $A \subset [\![0, M]\!]$.

Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \in A) \leq \sum_{k=0}^{M} P(Y_n = k)$, donc $P(Y_n \in A) \leq e^{-\lambda_n} \sum_{k=0}^{M} \dfrac{\lambda_n^k}{k!}$.

Donc $P(Y_n \in A) \leq \dfrac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{M} \dfrac{(1+\ln(n))^k}{k!}$ Soit alors $\beta \in]1, \alpha[$.

Il vient $0 \leq n^\beta P(Y_n \in A) \leq \dfrac{1}{n^{\alpha-\beta}} \sum_{k=0}^{M} \dfrac{(1+\ln(n))^k}{k!}$.

Donc comme M est fixé, et que chaque terme de la somme tend vers 0, $n^\beta P(Y_n \in A) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc $P(Y_n \in A) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y_n \in A) < +\infty$, donc $(Y_n)_{n\geq 1}$ est transiente.

Donc $\boxed{(Y_n)_{n\geq 1} \text{ est transiente si et seulement si } \alpha > 1}$.

Exercice 18 (oral ENS Lyon 24, Raphaël,5) : pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que X_k suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose aussi que les (X_k) sont indépendantes. En cas de convergence, on pose $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} X_k z^k$ pour $z \in [0,1[$. Montrer que $\forall \varepsilon>0, \lim_{z \to 1^-} P\left(\left|(1-z)f(z)-1\right|>\varepsilon\right)=0$.

Ind : je n'ai trouvé qu'une solution très difficile avec la définition de limite en posant $\alpha>0$.

Noter $U=(1-z)f(z)-1=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(X_k-1)z^k\right)$ et $U_N=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{N}(X_k-1)z^k\right)$.

Montrer d'abord $P\left(\left|(1-z)f(z)-1\right|>\varepsilon\right) \le P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Majorer $P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$ avec Bienaymé-Tchebychev.

Pour $M \ge 2$ et $r>1$, considérer $A(M,r)=\{\omega\in\Omega, \forall k\in\mathbb{N}, X_k \le M r^k\}$ et montrer qu'il existe $M\ge 2$ tel que $P(A(M,r)) \ge 1-\frac{\alpha}{2}$. Montrer que si $rz<1$, que $\omega \in E(A,r)$ et N est assez grand, alors $\left|(U-U_N)(\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\varepsilon>0$. Soit $\alpha>0$. Soit $z\in[0,1[$.

Alors en cas de convergence $(1-z)f(z)-1=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}X_k z^k-\sum_{k=0}^{+\infty}z^k\right)=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(X_k-1)z^k\right)=U$

On pose alors pour $N\in\mathbb{N}$: $U_N=(1-z)\left(\sum_{k=0}^{N}(X_k-1)z^k\right)$ et on a donc $U-U_N=(1-z)\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty}(X_k-1)z^k\right)$.

On remarque que $\left(|U|>\varepsilon\right)\subset\left(\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

En effet, $|U|=|U-U_N+U_N|\le|U-U_N|+|U_N|$, donc si $|U|>\varepsilon$, nécessairement $|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}$ ou $|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}$.

Dès lors, $\boxed{P\left(\left|(1-z)f(z)-1\right|>\varepsilon\right)=P(|U|>\varepsilon)\le P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\quad(1)}$.

Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, comme $E(U_N)=0$ et $V(U_N)=(1-z)^2\left(\sum_{k=0}^{N}1z^{2k}\right)\le\frac{(1-z)^2}{1-z^2}$, il vient $\boxed{P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{4}{\varepsilon^2}\frac{(1-z)}{1+z}\le\frac{4}{\varepsilon^2}(1-z)}$. Pour z assez proche de 1, on aura $\frac{4}{\varepsilon^2}(1-z)\le\frac{\alpha}{2}$.

Il reste à étudier $P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Pour $M\ge 2$ et $r>1$,on note $A(M,r)=\{\omega\in\Omega,\forall k\in\mathbb{N}, X_k\le M r^k\}$.

Alors $P(A(M,r))=P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty}(X_k\le M r^k)\right)=\lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k\le M r^k)\right)$.

Or par indépendance, $P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k\le M r^k)\right)=\prod_{k=0}^{n}P(X_k\le M r^k)$

Pour $k\in\mathbb{N}$, par inégalité de Markov (X_k est bien à valeurs positives), il vient $P(X_k>M r^k)\le\frac{1}{M r^k}$.

Donc $P(X_k\le M r^k)\ge\left(1-\frac{1}{M r^k}\right)$ et $\ln\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k\le M r^k)\right)\right)\ge\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{M r^k}\right)$.

Or pour $u\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\ln(1-u)\geq -2u$ (on étudie $g(u)=\ln(1-u)+2u$ et il vient $g'(u)=-\frac{1}{1-u}+2=\frac{1-2u}{1-u}\geq 0$, avec $g(0)=0$). Donc $\ln\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k\leq M\,r^k)\right)\right)\geq -\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{r^k}\geq -\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^k$

Donc $P\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k\leq M\,r^k)\right)\geq \exp\left(-\frac{2}{M}\frac{r}{r-1}\right)$, donc en passant à la limite, $1\geq P\big(A(M,r)\big)\geq \exp\left(-\frac{2}{M}\frac{r}{r-1}\right)$.

Par encadrement, $P\big(E(A,r)\big)\underset{M\to+\infty}{\to}1$, donc il existe $M\geq 2$ tel que $P\big(A(M,r)\big)\geq 1-\frac{\alpha}{2}$. Soit un tel M (qui dépend de r).

Or si $z\in[0,1[$ est fixé et si $\omega\in E(A,r)$, alors $0\leq\left|X_k(\omega)-1\right|z^k\leq M\,(rz)^k+z^k$.

Donc on fixe r tel que $1<r<\frac{1}{z}$, on aura $0<rz<1$ et par majoration, $\sum_{k\geq 0}(X_k(\omega)-1)z^k$ est absolument convergente, donc convergente. De plus, $\left|(U-U_N)(\omega)\right|=(1-z)\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty}(X_k(\omega)-1)z^k\right|\leq\sum_{k=N+1}^{+\infty}\left|X_k(\omega)-1\right|z^k$.

Donc $\left|(U-U_N)(\omega)\right|\leq\sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(M\,(rz)^k+z^k\right)\leq\frac{M\,(rz)^{N+1}+z^{N+1}}{1-z}$.

$z\in[0,1[$ étant donné, on choisit dans cet ordre $r>1$ tel que $0<rz<1$. Ensuite, on prend $M\geq 2$ tel que $P\big(A(M,r)\big)\geq 1-\frac{\alpha}{2}$. Enfin, on choisit N (qui dépend de z) tel que $\frac{M\,(rz)^{N+1}+z^{N+1}}{1-z}<\frac{\varepsilon}{2}$ (cette dernière quantité tendant vers 0 lorsque N tend vers l'infini).

On a prouvé que si $\omega\in A(M,r)$, alors $\left|(U-U_N)(\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset\overline{A(M,r)}$

Donc $P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\leq P\left(\overline{A(M,r)}\right)\leq\frac{\alpha}{2}$.

Donc avec (1) pour z assez proche de 1, $0\leq P\big(\left|(1-z)f(z)-1\right|>\varepsilon\big)\leq P\left(|U-U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|U_N|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\leq\alpha$.

Donc par définition de limite, $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \lim_{z\to 1^-}P\big(\left|(1-z)f(z)-1\right|>\varepsilon\big)=0}$