

Programme de colles PCC :

La colle commence par une brève question de cours. Cela peut être au choix :

- Un ou deux énoncés parmi ceux qui sont proposés sans démonstration (pour au moins un élève du groupe)
- Un énoncé avec sa démonstration (uniquement parmi ceux qui sont exigibles).

Ensuite, le colleur propose un ou plusieurs exercices de son choix.

Du 14/09 au 20/09 (semaine 1)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Racines n -èmes d'un complexe non nul.
- Partie entière : définition, encadrement.
- Définition de limite pour une suite réelle ou complexe convergente.
- Théorème de la limite monotone pour une suite réelle.
- Fonction Arcsin ou Arctan (domaine de définition, tracé, dérivée).
- Majoration de $\ln(1+x)$, de $|\sin(x)|$, minoration de e^x .
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Borne supérieure d'une fonction. Théorème des bornes atteintes.
- Théorème de dérivée de la réciproque pour une fonction C^∞ .
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Formule de Leibniz
- Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Définition de fonction convexe ou concave. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
- Développement limité d'une primitive.
- Formule de Taylor-Young.
- Développements limités usuels à connaître.
- Unicité du développement limité.
- Croissance comparée pour les suites.
- Théorème d'encadrement sur les équivalents.
- Caractérisation des racines d'ordre n d'un polynôme à l'aide des dérivées.
- Si $a \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, que dire de $\bar{a}$? Et en termes de multiplicité ?
- Théorème de d'Alembert-Gauss et polynômes scindés dans $\mathbb{C}[X]$.
- Décomposition des polynômes en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
- Relations coefficients-racines d'un polynôme scindé.
- Famille libre, génératrice : définition, nombre d'éléments dans un espace de dimension n
- Théorème de la base incomplète et de la base extraite.
- Définition de n sous-espaces vectoriels en somme directe.
- Base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$
- Dimension d'une somme et d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. Formule de Grassmann.
- Définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire. Lien avec injectivité et surjectivité.
- Equation linéaire de la forme $f(x) = b$ pour $f \in L(E, F)$. Lien avec l'équation homogène associée.
- Lien entre injectivité et surjectivité pour $f \in L(E, F)$ si $\dim(E) = \dim(F) = n \in \mathbb{N}$
- Liens entre l'image d'une base par une application linéaire et l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité en dimension finie.
- Définitions et propriétés des projections et des symétries. Caractérisation des projecteurs et des symétries.

- Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire et d'une matrice.
- Théorème du rang. Rang d'une composée, du produit de deux matrices et de la transposée.
- Matrice d'une application linéaire et d'un vecteur.
- Formule du produit de deux matrices.
- Binôme de Newton pour les matrices.
- Isomorphisme entre espaces d'applications linéaires et de matrices. Dimension de $L(E, F)$.
- Plusieurs manières de caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée.
- Transposée et inverse d'un produit de matrices carrées. Inverse de la transposée.
- Propriétés du déterminant d'une matrice : déterminant d'un produit, de la transposée, de l'inverse d'une matrice inversible. Effet de l'échange de deux colonnes, de l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres. Caractérisation de l'inversibilité.
- Formule de changement de base pour un endomorphisme. Définition de matrices semblables et lien entre les deux.
- Trace d'une matrice. Définition, linéarité. Trace d'un endomorphisme.
- Polynômes d'interpolation de Lagrange en $x_1, \dots, x_{n+1}$ deux à deux distincts. Somme.
- Matrice et déterminant de Vandermonde.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Si $A, B \in M_n(K)$, alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace, même rang et même déterminant.
- Lien entre rang et trace d'un projecteur en dimension finie.
- Les polynômes d'interpolation de Lagrange en $x_1, \dots, x_{n+1}$ deux à deux distincts forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Expression des coordonnées d'un polynôme dans cette base.
- Si $f \in L(E)$, et que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, alors les $\ker(f - \lambda_k \text{Id}_E)$ sont en somme directe.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice d'analyse de PCSI sans séries ni intégrales.

Tout exercice d'algèbre sur les polynômes, les applications linéaires et leurs matrices, ainsi que le déterminant.

Réserver les exercices sur la trace ou les matrices semblables pour la semaine suivante.

Du 21/09 au 27/09 (semaine 2)

Les questions de cours :

Reprise de l'intégralité du programme de la semaine précédente.

En plus :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Définitions : sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
- Matrice par blocs. Produit par blocs.
- Matrice d'un endomorphisme f dans une base adaptée à un sous-espace stable par f .
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices. Polynômes annulateurs.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice d'analyse de PCSI sans séries ni intégrales. Tout exercice d'algèbre sur les polynômes, les applications linéaires et leurs matrices, ainsi que le déterminant.

Tout exercice sur les matrices semblables, les blocs, la trace (pas de réduction bien sûr).