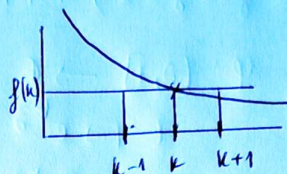


3) Page 4. On cherche un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. (4.1)

On pose, pour $t \geq 1$: $f(t) = \frac{1}{t^2}$. f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Soit $N \geq n+1$ et $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$.

$$\text{Alors } \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$



$$\text{Donc en sommant : } \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{1}{t^2} dt.$$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ convergent.

On peut donc passer l'inégalité à la limite :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt, \text{ donc } \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Par le théorème d'encadrement on a l'équivalent, $\boxed{R_n \sim \frac{1}{n}}$

Série exponentielle : si $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge. (4.2)

$$\text{le plus, } \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Preuve : On fixe $z \in \mathbb{C}$, non nul (le résultat est vrai pour $z=0$).

On considère $\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $t \mapsto e^{tz}$.

On a alors $\varphi^{(n)}(t) = z^n e^{tz}$, donc $\forall t \in [0,1], |\varphi^{(n+1)}(t)| \leq |z|^{n+1} |e^{tz}|$

Or si $u \in \mathbb{C}$, $u = a+ib$, $|e^u| = |e^a e^{ib}| = e^a = e^{\operatorname{Re}(u)} \leq e^{|u|}$

Donc $\forall t \in [0,1], |\varphi^{(n+1)}(t)| \leq |z|^{n+1} e^{|z|}$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à φ :

$$\left| \varphi(1) - \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|} (1-0)^{n+1}$$

$$\text{donc } \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}$$

Par encadrement, $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z$.

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

(4.3)

Pos $a_n = \frac{1}{2} \times \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \times b_{n+1}$, où $b_n = \frac{4^n}{n!}$.

Or $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} b_{n+1}$ aussi.

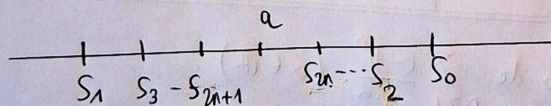
Donc $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, et $\sum_{n \geq 0} a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2} (e^4 - 1)}$

4) Séries alternées.

preuve du TSSA : on prend $U_0 \geq 0$ et $U_n = (-1)^n V_n$, où

$(V_n) = (|U_n|)$ décroît vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.



$S_0 = U_0 \geq 0$; $S_1 = U_0 + U_1 = V_0 - V_1$; $S_2 = S_0 + U_1 + U_2$

donc $S_2 = V_0 - V_1 + V_2 \leq S_0$; $S_3 = S_1 + U_2 + U_3 = S_1 + V_2 - V_3 \geq S_1$

Plus généralement, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = -V_{2n+1} + V_{2n+2} \leq 0$

donc (S_{2n}) est décroissante

$$S_{2(n+1)+1} - S_{n+1} = U_{2n+3} + U_{2n+2} = V_{2n+2} - V_{2n+3} \geq 0 \quad (4.4)$$

donc (S_{2n+1}) est croissante

Enfin, $S_{n+1} - S_n = U_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (S_n) et (S_{n+1}) sont adjacentes

donc (S_n) et (S_{n+1}) convergent vers une limite $a \in \mathbb{R}$.

Donc (S_n) converge et $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge.

On étudie maintenant le signe du reste $R_n = a - S_n$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \leq a \leq S_n$.

Donc $S_{n+1} - S_n \leq a - S_n \leq 0$ et $U_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$

De même, $S_{n+1} \leq a \leq S_{n+2}$ et $0 \leq R_{n+1} \leq U_{2n+2}$.

Ainsi, R_n a même signe que U_{n+1} et $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |U_{n+1}|$

Exemple : Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) : Si $\alpha > 0$

On pose $U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$. $(|U_n|) = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est décroissante et tend vers 0. La série est absolument convergente.

Donc avec le TSSA, $\sum U_n$ converge

Si $\alpha \leq 0$, $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $\sum U_n$ diverge grossièrement.

Donc $\sum U_n \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 0$

On suppose $U_n = \frac{1}{2^n}$ et $U_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). (4.5)

Alors si $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2N} = \sum_{k=0}^{2N} U_k = \sum_{k=0}^N U_{2k} + \sum_{k=0}^{N-1} U_{2k+1}$

donc $S_{2N} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty$

donc (S_n) diverge et $\sum U_n$ diverge

Exemple : Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^3+1}$.

On note pour $n \geq 1$: $U_n = \frac{e^{in\theta}}{n^3+1}$. Alors $0 \leq |U_n| \leq \frac{1}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3}$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, donc par majoration, $\sum_{n \geq 1} U_n$ est

absolument convergente, donc convergente : $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge

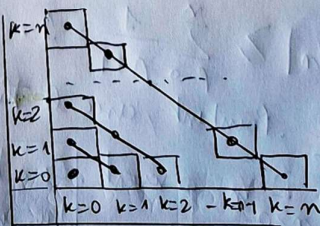
Produit de Cauchy : explication

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |U_n|$ et $\sum |V_n|$ convergent.

On regarde $(U_0 + \dots + U_n)(V_0 + \dots + V_n)$.

On trouve $(U_0 V_0) + (U_0 V_1 + U_1 V_0) + (U_0 V_2 + U_1 V_1 + U_2 V_0) + \dots +$

$\sum_{k=0}^n U_k V_{n-k} + \dots$



Exemples (produit de Cauchy)

(4.6)

- Posons pour $k \in \mathbb{N}$: $a_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ et $b_k = \frac{1}{2^k}$.

Alors comme $|\frac{1}{2}| < 1$, $\sum b_k$ est absolument convergente.

De même, comme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (absolument), c'est aussi le

Cas de $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2}$. De plus, $W_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Donc par produit de Cauchy, $\sum_{n \geq 0} W_n$ converge.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2 2^{n-k}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{donc } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \frac{\pi^2}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{3}}$$

- Soit $U_n = V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Soit $W_n = \sum_{k=0}^n U_k V_{n-k}$.

$$\text{Ainsi } W_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \times \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{p+1} \sqrt{n-p+1}}$$

$$\text{Donc } |W_n| = \sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{p+1} \sqrt{n-p+1}}$$

$$\text{Or pour } p \in \mathbb{N}, \sqrt{p+1} \sqrt{n-p+1} \leq \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} = n+1.$$

$$\text{Donc } |W_n| \geq \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+1} = 1. \text{ Donc } W_n \not\rightarrow 0 \text{ et}$$

$\sum W_n$ diverge. Pourtant, avec le théorème sur les séries alternées,

$\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_{n \geq 0} V_n$ convergent. On a besoin de l'absolue convergence dans un produit de Cauchy.

Critère d'équivalence :

preuve. Comme $u_n \sim v_n$, $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \rightarrow 1$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$

$$\text{Donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Ainsi pour } n > N, 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n.$$

$$\text{On pose } \sum u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum v_n \text{ CV}.$$

$$\Rightarrow \text{Si } \sum u_n \text{ CV, alors comme } 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n, \sum \left(\frac{1}{2}\right) v_n \text{ CV,}$$

$$\text{donc } \sum v_n \text{ CV.}$$

$$\Leftarrow \text{Si } \sum v_n \text{ CV, alors } \sum \frac{3}{2} v_n \text{ CV donc par majoration,}$$

$$\sum u_n \text{ CV. On a bien } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ ont même nature}$$

Remarque (*). Soit pour $n \geq 1, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

$$\text{On note pour } n \geq 1 : a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } b_n = \frac{1}{n}.$$

$$\text{Ainsi } |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Donc } (|a_n|) \text{ est décroissante et tend vers } 0.$$

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge avec le TSA (c'est une série alternée).}$$

$$\text{De plus, } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ diverge, donc } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge}$$

$$\text{Pourtant, } u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{car } u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

$$\text{et } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ CV}$$

Exemples :

(4.8)

a) Nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Soit $u_n = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^n}\right)$. $u_n \sim \frac{1}{2^n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} \geq 0$.

Comme $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CV, $\boxed{\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}}$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $v_n = \frac{1}{n^\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

$v_n \sim \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}} = w_n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > 0$.

$\sum w_n$ CV $\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} w_n$ ont même nature, donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} v_n \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}}$$

Convergence par domination. On suppose $u_n = o(v_n)$, avec

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \in \mathbb{C} \\ v_n \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$. Soit als $M, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n| \leq M |v_n| = M v_n$.

Or $\sum_{n \geq 0} M v_n$ converge, donc $\sum u_n$ ACV, donc CV

Exemple :

(4.9)

$$a) U_n = n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right); \quad \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\text{Donc } U_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad \text{Or } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \text{ converge et } \forall n \geq 1, \frac{1}{n^3} \geq 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum U_n \text{ est ACV, donc CV}}$$

$$b) U_n = n \left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \right).$$

$$\bullet \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (\ln(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3))$$

$$\bullet \sin u = u + O(u^3) \text{ donc } \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{Donc } U_n = n \left(O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

$$\text{Comme } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CV, } \underline{\underline{\sum U_n \text{ est ACV, donc CV}}}$$

$$c) \text{ Comme } \sum U_n \text{ converge, } U_n \rightarrow 0.$$

$$\text{Donc } U_n^2 = U_n \times U_n = o(U_n). \quad \text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0 \text{ et}$$

$$\sum_{n \geq 0} U_n \text{ CV donc } \underline{\underline{\sum_{n \geq 0} U_n^2 \text{ CV}}}$$

Méthode du $n^\alpha U_n$

(4.10)

a) Si $n^\alpha U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, avec $\alpha > 1$: alors $U_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Or $\alpha > 1$ et $\forall n \geq 1, \frac{1}{n^\alpha} > 0$, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV et $\sum U_n$ ACV donc CV.

b) On traite le cas où $n U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}^*$.

Alors $U_n \sim \frac{a}{n}$. Or $\left(\frac{a}{n}\right)$ est de signe fixe et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ DV

donc $\sum_{n \geq 0} U_n$ DV

Exemple :

a) Soit $U_n = \frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$.

Alors $n U_n = \sqrt{n} \ln^3(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Donc pour n assez

grand, $n U_n \geq 1$ et $U_n \geq \frac{1}{n} > 0$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ DV, donc $\boxed{\sum U_n \text{ DV}}$

b) On pose $V_n = n^\alpha e^{-\sqrt{n}} = e^{\alpha \ln n - \sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}(\alpha \sqrt{n} - 1)}$

Donc pour $\alpha = 1$: $n e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et de même qu'a),

$\boxed{\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}} \text{ DV}}$

Séries de Bertrand

(4.11)

Soit pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

① si $\alpha < 1$: $n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ donc pour assez

grand, $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$ et $\sum u_n$ DV

② si $\alpha > 1$: $\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\gamma} \quad \frac{1}{\alpha}$. On prend $\gamma \in]1, \alpha[$.

Alors $n^\gamma u_n = \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}}$, avec $\alpha - \gamma > 0$. Donc par

comparaison, $n^\gamma u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.

Or $\gamma > 1$ donc $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ CV et $\forall n \geq 1, \frac{1}{n^\gamma} \geq 0$ donc

$\sum u_n$ ACV, donc CV

③ si $\alpha = 1$

a) si $\beta < 0$: $n u_n = \frac{1}{(\ln n)^\beta} = (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, donc $\sum u_n$ DV.

b) si $\beta = 0$: $u_n = \frac{1}{n}$ et $\sum u_n$ DV

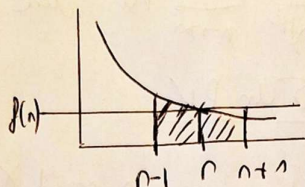
c) si $\beta > 0$: $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$. On fait une comparaison

avec une intégrale. On pose $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ sur $[2, \infty[$.

$f(t) = \left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{(\ln t)^\beta}$ donc f est décroissante sur $(2, \infty[$ par

produit de fonctions décroissantes et positives.

Ds'la, pour $n \geq 3$: $\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$



Donc pour $N \geq 3$, $\int_3^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=3}^N f(n) \leq \int_2^N f(t) dt$

Or $\int_2^N f(t) dt = \int_2^N \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln t)^\beta} dt = \int_2^N u'(t) [u(t)]^{-\beta} dt$, où $u(t) = \ln t$.

donc si $\beta \neq 1$, $\int_2^N f(t) dt = \frac{1}{1-\beta} [u(t)^{1-\beta}]_2^N = \frac{1}{1-\beta} \times (\ln N)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}$

De même, $\int_3^{N+1} f(t) dt = \frac{1}{1-\beta} [(\ln(N+1))^{1-\beta} - (\ln 3)^{1-\beta}]$.

• Si $\beta < 1$, par encadrement, $\sum_{n=3}^N f(n) \rightarrow +\infty$ et $\sum u_n$ DV

• Si $\beta > 1$, $\int_2^N f(t) dt \leq \frac{1}{\beta-1} (\ln 2)^{1-\beta}$, donc $S_N = \sum_{n=3}^N f(n) \leq \frac{1}{(\beta-1)} (\ln 2)^{1-\beta}$

Donc (S_n) est croissante et majorée : elle converge et $\sum u_n$ CV

• Si $\beta = 1$, $\int_3^{N+1} f(t) dt = \int_3^{N+1} \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln(\ln t)]_3^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$

donc $\sum u_n$ DV.

Donc $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

(4.13)

Exemple p10:

$$u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \text{On utilise la formule de Stirling:}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad \text{donc } (2n)! \sim \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \sqrt{4n\pi}$$

$$\text{Donc } u_n \sim \frac{2n\pi}{\sqrt{4n\pi}} \times \frac{1}{4^n} \quad \text{et } u_n \sim \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$$

$$\text{Donc } 2^n u_n \sim \sqrt{\pi} \frac{n^{1/2}}{2^n} \quad \text{donc } 2^n u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Donc } u_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right), \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} > 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

$$\text{donc } \boxed{\sum u_n \text{ CVA donc } \sum u_n \text{ CV}}$$

Règle de d'Alembert : preuve.

1) cas $0 \leq a < 1$. $\frac{b}{a} \quad \frac{1}{1}$ Soit $b \in]a, 1[$.

$$\text{Par exemple, } b = \frac{a+1}{2}$$

Par définition de limite (pour $\varepsilon = b - a > 0$), comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq b.$$

$$\text{Donc pour } n > N, u_{n+1} \leq b u_n.$$

$$\text{Donc si } n > N+2, u_n \leq b u_{n-1} \leq b^2 u_{n-2}.$$

$$\text{Donc par récurrence, } \forall n > N, 0 \leq u_n \leq b^{n-N} u_N$$

$$\text{Or } \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{b^N} u_N\right) b^n \text{ CV car } b \in]0, 1[.$$

Donc par majoration, $\sum_{n \geq N} u_n$ CV et $\underline{\sum_{n \geq 0} u_n}$ CV

2) cas $a > 1$

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, pour n assez grand ($n \geq N$), $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc $\forall n \geq N$, $u_{n+1} > u_n > u_N > 0$. Donc (u_n) ne peut pas converger vers 0 (sinon $0 > u_N > 0$ en passant à la limite)

Donc $\sum u_n$ DV grossièrement si $a > 1$

Exemple : Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$

On cherche à utiliser d'Alembert. On a bien $\forall n \geq 1$, $u_n > 0$.

$$\text{De plus, } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$$\text{Donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right). \text{ On pose } a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$a_n \sim n \times \frac{1}{n} = 1 \text{ donc } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$\text{Donc par composée de limites, (mais pas d'équivalents), } \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

Comme $0 \leq e^{-1} < 1$, avec d'Alembert:

$$\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$$