

4.Séries numériques

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A) Convergence des séries numériques

1) Définitions :

Séries divergentes et convergentes (*) : soit $(U_n) \in K^{\mathbb{N}}$. La série numérique de terme général U_n est notée $\sum U_n$ ou $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

On considère la suite (S_n) d'éléments de K telle que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = U_0 + \dots + U_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, S_n est la somme partielle d'ordre n des termes de la série $\sum U_n$.

- On dit que la série $\sum U_n$ est **convergente** si la suite (S_n) est convergente. On dit qu'elle est **divergente** sinon.
- Quand une série converge, la limite de la suite (S_n) est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$. $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ est alors un nombre : c'est la **somme** de la série $\sum U_n$.

Remarques :

- La notation $\sum U_n$ a donc toujours un sens, alors qu'on ne peut écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ que si on sait que la série converge.
- Si $n_0 \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$ et $\sum_{n \geq n_0} U_n$ ont même nature (mais pas même somme si elles convergent). Les premiers termes n'ont donc pas d'importance pour déterminer la nature d'une série. En effet $\sum_{n=n_0}^n U_k = \sum_{n=0}^n U_k - (U_0 + U_1 + \dots + U_{n_0-1})$. Les deux suites diffèrent d'une constante.

Propriété (*) : Si une série $\sum_n U_n$ est convergente, alors nécessairement la suite (U_n) tend vers zéro. Si (U_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum_n U_n$ est **grossièrement divergente**.

La réciproque est fausse.

Preuve :

Remarque : c'est une différence avec les intégrales puisqu'on peut avoir $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ qui converge alors que $f(t)$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Reste d'une série convergente (*) : soit $(U_n) \in K^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est convergente. On définit alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$ qui est le reste de la série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$. On a alors $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Opération sur les séries convergentes :

- Soit $\lambda \in K$. Si $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ convergent, alors $\sum_n (U_n + \lambda V_n)$ est convergente. On a de plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda U_n + V_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$.
- Soit $\sum_n U_n$ une série de complexes. Alors $\sum_n U_n$ converge si et seulement si $\sum_n \operatorname{Re}(U_n)$ et $\sum_n \operatorname{Im}(U_n)$ convergent. On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(U_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(U_n)$

Remarques (*) :

- Ne jamais développer $\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n)$ si on ne sait pas que $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ convergent.
- Si $\sum_n U_n$ converge et $\sum_n V_n$ diverge, alors $\sum_n (U_n + V_n)$ diverge.
- Si $\sum_n U_n$ diverge et $\sum_n V_n$ diverge, alors on ne peut rien dire de $\sum_n (U_n + V_n)$

2) Séries à termes positifs :

Convergence des séries à termes positifs : on considère une série $\sum_n U_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ (il suffit que les termes soient positifs à partir d'un certain rang).

- Si on note $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors (S_n) est croissante.
- $\sum_n U_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.
- Lorsqu'une série $\sum_n U_n$ à termes positifs est divergente, on peut noter $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = +\infty$.

C'est faux si la série n'est pas à termes positifs :

Si $U_n = (-1)^n$ et $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$, (S_n) est majorée mais $\sum_n U_n$ diverge.

Critère de majoration (*) : Soient $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ deux séries. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, 0 \leq U_n \leq V_n$. Alors :

- Si $\sum_n V_n$ converge, alors $\sum_n U_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} V_n$
- Si $\sum_n U_n$ diverge, alors $\sum_n V_n$ diverge.

Exemple : soient $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ deux séries à termes positifs, convergentes. Alors $\sum_n \sqrt{U_n V_n}$ est convergente.

Méthode de comparaison série-intégrale (*) : soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ (ou $[p, +\infty[$, avec $p \in \mathbb{N}$) monotone, positive, Si on peut trouver une primitive de f , on peut utiliser $\int f(t)dt$ pour estimer $\sum f(n)$. Cela permet de faire plusieurs choses :

- 1) Nature de série : trouver la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- 2) Equivalent de somme partielle de série divergente : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$
- 3) Equivalent du reste de série convergente : donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

3) Séries de référence

Rappel : sommes géométriques. Soit $q \in \mathbb{C}$. Soit $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

- Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $\sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$
- Si $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$

Séries géométriques (*) : soit $q \in \mathbb{C}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. On a alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$. En

particulier, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Le reste de cette série est alors donné par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$

Séries de Riemann (*). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Série exponentielle (*): soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Exemple : Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}$

4) Séries alternées.

Définition (*) : Soit $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum U_n$ est alternée lorsque le signe de $(-1)^n U_n$ est constant (autrement dit, le signe de U_n change à chaque fois).

Théorème spécial des séries alternées (TSSA, *) : on considère une série alternée $\sum U_n$. On suppose que $(|U_n|)$ est décroissante et converge vers 0. Alors $\sum U_n$ converge. De plus, si on note alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$, alors R_n a même signe que U_{n+1} et $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |U_{n+1}|$.

Dessin et preuve : on se place dans le cas où $U_0 \geq 0$. Alors $U_n = (-1)^n V_n$, où $(V_n) = (|U_n|)$ décroît vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

On a $S_{2n+2} - S_{2n} = U_{2n+2} + U_{2n+1} = V_{2n+2} - V_{2n+1} \leq 0$ et (S_{2n}) décroissante, (S_{2n+1}) croissante.

Les deux suites sont adjacentes : soit $a = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ leur limite. $R_n = a - S_n$

Alors $S_{2n+1} \leq a \leq S_{2n}$, $S_{2n+1} - S_{2n} \leq a - S_{2n} \leq 0$ donc $U_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$.

De plus, $S_{2n+1} \leq a \leq S_{2n+2}$ donc $0 \leq R_{2n+1} \leq U_{2n+2}$ et on a bien le résultat.

Remarque : Sous les mêmes hypothèses, on a aussi $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$ du signe de U_0 et $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \right| \leq |U_0|$

La relation $S_1 \leq a \leq S_0$ donne $U_1 + U_0 \leq a \leq U_0$, donc $0 \leq V_0 - V_1 \leq a \leq U_0$, d'où le signe et la majoration.

Exemple : nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Quand la série converge, majorer

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Remarque : le résultat devient faux si on enlève une des trois hypothèses :

- C'est clair si la série n'est pas alternée ($U_n = \frac{1}{n}$), si elle ne converge pas vers 0.
- Si on prend $U_{2n} = \frac{1}{2^n}$ et $U_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$, $S_{2n} \rightarrow -\infty$

5) Séries absolument convergentes :

On s'intéresse dans ce paragraphe à la série $\sum_n U_n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{C}$.

Définition : Une série $\sum_n U_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_n |U_n|$ est convergente.

On dit alors que la suite (U_n) est **sommable** et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n| < +\infty$.

Proposition (*) : Une série absolument convergente est convergente. La somme d'une suite sommable est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$. De plus, on a alors $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$

Remarque : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente.

Exemple : nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^3 + 1}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition (*) : soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes complexes. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum W_n$, avec $W_n = \sum_{p=0}^n U_p V_{n-p} = \sum_{p+q=n} U_p V_q$

Proposition admise (*) : soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes complexes absolument convergentes. Alors la série produit de Cauchy $\sum W_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} U_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} V_q \right).$$

Explication : regarder $(U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n)(V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n)$.

Preuve éventuelle : si les deux séries sont à termes positifs. Avec $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n V_k$ et

$$\sum_{k=0}^n W_k \leq S_n T_n \leq \sum_{k=0}^{2n} W_k$$

Exemples :

- On admet $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pose $W_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2 2^{n-k}}$.

Montrer que $\sum W_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \frac{\pi^2}{6} * 2 = \frac{\pi^2}{3}$.

- Soit $U_n = V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Alors $|W_n| = \sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}} \geq \frac{n+1}{n+1}$ et $\sum W_n$ DV

B) Convergence des séries par comparaison

1) Critère d'équivalence :

Proposition (*) : Soient $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ deux séries de réels.

On suppose $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} V_n$ et que V_n est de signe constant. Alors $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ ont même nature.

Remarque : si (U_n) est à valeurs négatives, on utilise le résultat pour la suite $(-U_n)$

Remarque (*) : il est essentiel que V_n est de signe fixe pour pouvoir conclure. On prend par

exemple $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

$\sum_{n \geq 2} U_n$ diverge. Pourtant $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

Exemples :

a) Nature de $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

b) Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$

2) Convergence par domination :

Proposition (*) : on suppose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{C}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \in \mathbb{R}_+$. On suppose de plus que $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(V_n)$ (c'est en particulier le cas si $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(V_n)$). Alors si $\sum_n V_n$ converge, la série $\sum_n U_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque : attention au signe de V_n . Sinon cela ne marche pas : $\frac{1}{n} = o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exemples :

a) Nature de $\sum U_n$, avec $U_n = n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)$

b) Nature de $\sum_n U_n$, avec $U_n = n \left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \right)$

c) On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ et que $\sum U_n$ converge. Montrer que $\sum U_n^2$ converge.

Remarques :

- Utiliser les O permet de limiter les calculs par rapport à la recherche d'un équivalent.
- Par contre, cela ne sert que pour prouver la convergence de $\sum_n U_n$. Avoir

$$U_n = O(V_n) \text{ avec } \sum_n V_n \text{ divergente n'a pas d'intérêt.}$$

3) Comparaison aux séries de Riemann :

Méthode (*) : comparaison à une série de Riemann à l'aide de $n^\alpha U_n$.

Soit $\sum_n U_n$ une série de réels.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\sum_n U_n$ converge.
- Si $n U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $\sum_n U_n$ diverge.

Preuve : à expliquer.

Exemples :

- Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}}$.
- Nature de $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$. On posera $V_n = n^\alpha e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ et on étudiera $\ln(V_n)$.

Exemple : séries de Bertrand. Nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- On discute d'abord sur $\alpha < 1$, $\alpha > 1$.
- On traite ensuite le cas $\alpha = 1$ avec $\beta \leq 0$ et $\beta > 0$ en comparant avec une intégrale.

4) Comparaison aux séries géométriques :

Proposition admise (*) : formule de Stirling. $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Exemple : déterminer la nature de $\sum U_n$ si $U_n = \left(\frac{2n}{n}\right)^{-1}$.

Proposition (*, règle de d'Alembert) : soit (U_n) une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $0 \leq a < 1$, alors la série $\sum U_n$ converge.
- Si $a > 1$, alors $\sum U_n$ diverge grossièrement.

Preuve :

Remarque : ce critère n'est pas fin du tout (prendre $U_n = n^{1000}$ ou $U_n = \frac{1}{n^{1000}}$).

Il est utile lorsqu'on a des factorielles et des puissances.

Exemple : Nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$

5) Lien suite-série :

Lien suite-série (*) : soit (U_n) une suite d'éléments de K . Alors (U_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (U_n - U_{n-1})$ est convergente.

Preuve : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $S_N = \sum_{n=1}^N (U_n - U_{n-1}) = U_N - U_0$

Par définition, la série $\sum_{n \geq 1} (U_n - U_{n-1})$ est convergente si et seulement si la suite (S_N) est convergente. Comme $S_N = U_N - U_0$, (S_N) est convergente si et seulement si (U_N) est convergente. Donc on a bien le résultat.

Exemple (*,PV) : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Alors la suite (U_n) est convergente. Sa limite est la constante d'Euler.

Preuve : soit $n \geq 2$. Alors $U_n - U_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) \right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Or si u tend vers 0, $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

Donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $U_n - U_{n-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} > 0$

Donc comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergente, $\sum_{n \geq 2} (U_n - U_{n-1})$ converge absolument, donc converge, et avec le lien suite-série, (U_n) est convergente.

C) Méthodes pour l'étude de la convergence d'une série.

Méthode (*) :

- Uniquement si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{R}_+$:
 - On peut majorer U_n pour montrer que $\sum_n U_n$ converge, ou la minorer pour montrer que $\sum_n U_n$ diverge.
 - Utiliser la règle de d'Alembert.
 - Si $U_n = f(n)$ où f est monotone et admet une primitive facile à calculer, on peut comparer avec une intégrale.
- Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{R}$, on peut :
 - Etudier l'absolue convergence et se ramener à une série à termes positifs.
 - Utiliser le TSSA si les hypothèses sont vérifiées.
 - Faire un développement asymptotique. **Il faut aller jusqu'à un terme de signe fixe, ou jusqu'au terme général d'une série absolument convergente.**
 - Comparer à une série de Riemann (méthode du $n^\alpha U_n$)
- Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{C}$, on peut étudier l'absolue convergence ou éventuellement séparer partie réelle et imaginaire.

Exemples. Déterminer la nature des séries suivantes :

- Nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
- Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) \sin^3 n}{n^2}$
- $U_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$
- $V_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \right)$
- Nature de $\sum \frac{4^n n!}{n^n}$