

Partie I:

1a) Soit $F = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(0)\}$.

Comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, $\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq A, f(x) \geq f(0) + 1$

De même, $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} +\infty$, $\exists B \in \mathbb{R}, \forall x \leq B, f(x) \geq f(0) + 1$

Donc $F \subset [B, A]$ et F est bornée

Montrons que F est fermé: Soit $(x_n) \in F^{\text{cl}}$, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \in \mathbb{R}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(0)$.

Or f est continue en x , donc $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ et en passant la
 inégalité à la limite, $f(x) \leq f(0)$, donc $x \in F$.

F est fermé dans $\mathbb{R}$

b) On a vu au a), $F \subset [B, A]$, $B \leq 0 \leq A$.

f est continue sur le segment $[B, A]$, donc par le théorème de
borne atteinte, possède un minimum sur $[B, A]$, noté m .

De plus, pour $x \notin [B, A]$, $x \notin F$ donc $f(x) > f(0)$.

Soit $x_* \in [B, A]$, $f(x_*) = m$. Comme $0 \in F$, $0 \in [B, A]$, donc

$f(x_*) = m \leq f(0)$ et $\forall x \in [B, A]$, $f(x) \geq f(x_*)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(x_*)$ et $f(x_*) = \min \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$

2a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Comme f' est L -Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, $|f'(x) - f'(y)| \leq L |x - y|$

$$\text{donc } |f'(x) - f'(y)|^2 \leq L |x - y| (f'(x) - f'(y))$$

Or f' est croissante sur $\mathbb{R}$ (car f est convexe), donc si $x \leq y$,

$$f'(x) \leq f'(y) \text{ et } (x - y)(f'(x) - f'(y)) \geq 0.$$

Réciproquement, si $x > y$, $(x - y)(f'(x) - f'(y)) \geq 0$.

$$\text{Donc on a bien } \underline{|f'(x) - f'(y)|^2 \leq L (x - y)(f'(x) - f'(y))}$$

2b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |\tilde{x} - \tilde{y}|^2 &= |(x - \tau f'(x)) - (y - \tau f'(y))|^2 \\ &= |(x - y) + \tau (f'(y) - f'(x))|^2 \\ &= |x - y|^2 + \tau^2 |f'(y) - f'(x)|^2 - 2\tau (x - y)(f'(x) - f'(y)) \\ &\leq |x - y|^2 + \tau^2 L (x - y)(f'(x) - f'(y)) + 2\tau (x - y)(f'(x) - f'(y)) \underline{(2a)} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \boxed{|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x - y|^2 - \tau(2 - \tau L)(x - y)(f'(x) - f'(y))}$$

2c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Alors } \underline{\tilde{x}_n = x_n - \tau f'(x_n) = x_{n+1}} \text{ et } \tilde{x}_* = x_* - \tau f'(x_*).$$

Or x_* est un minimum de f , donc f possède un minimum global atteint en x_* , et $f'(x_*) = 0$, donc $\underline{\tilde{x}_* = x_*}$

On déduit du 2b) que :

$$|x_{n+1} - x_a|^2 \leq |x_n - x_a|^2 - 2(2-2L)(x_n - x_a)(f'(x_n) - f'(x_a)) \quad (2)$$

Or $2(2-2L) \geq 0$ car $0 < 2 \leq \frac{2}{L}$.

$$\text{En outre, } |(x_n - x_a)(f'(x_n) - f'(x_a))| = (x_n - x_a)(f'(x_n) - f'(x_a))$$

(comme f' est croissante sur $\mathbb{R}$, c'est vrai si $x_n > x_a$ et si $x_n \leq x_a$).

$$\text{Donc } 2(2-2L)(x_n - x_a)(f'(x_n) - f'(x_a)) \geq 0.$$

$$\text{Donc } |x_{n+1} - x_a|^2 \leq |x_n - x_a|^2 \text{ et } \underline{|x_n - x_a| \text{ est décroissante}}$$

$$3a) \text{ Ici, } f(x) = \frac{1}{2} Lx^2 \text{ donc } f'(x) = Lx.$$

$$\text{Donc } x_{n+1} = x_n - 2f'(x_n) = x_n - 2Lx_n$$

$$\text{donc } \underline{x_{n+1} = (1-2L)x_n}$$

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: " $x_n = (1-2L)^n x_0$ " : $P(n)$

• $P(0)$ est vraie

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Alors $x_{n+1} = (1-2L)(1-2L)^n x_0$

donc $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (1-2L)^n x_0}$$

$$3b) 0 < 2 < \frac{2}{L} \Leftrightarrow 0 < 2L < 2 \Leftrightarrow -1 < 1-2L < 1$$

• si $0 < 2 < \frac{2}{L}$, alors $|1-2L| < 1$ et $x_n \rightarrow 0$
 $n \rightarrow +\infty$

Si non, $|1-\alpha L| \geq 1$ et $|x_n| = |1-\alpha L|^n |x_0| \geq |x_0| > 0$

donc $x_n \not\rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$

Donc par disjonction de cas, $x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{L}$

4) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et g est convexe sur $\mathbb{R}$, donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
et g' est croissante sur $\mathbb{R}$.

Or pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - \alpha x$.

$x \mapsto f'(x) - \alpha x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a donc $f'(x) - \alpha x \leq f'(x+1) - \alpha(x+1)$

Donc $0 < \alpha \leq f'(x+1) - f'(x) \leq L(x+1-x)$ car f' est L -

lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{0 < \alpha \leq L}$

5) Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - (f(0) + xf'(0) + \frac{\alpha x^2}{2})$

Donc $h'(x) = f'(x) - f'(0) - \alpha x = (f'(x) - \alpha x) - (f'(0) - \alpha \cdot 0)$

Avec 4), comme $x \mapsto f'(x) - \alpha x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, il vient

$h'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, et $h'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$, avec $h(0) = 0$

Donc

x	0
$h'(x)$	$- \quad +$
h	$\nearrow 0 \searrow$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$

et $f(x) \geq f(0) + xf'(0) + \frac{\alpha x^2}{2} f''(0)$

On utilise alors 1):

(3)

comme $\alpha > 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$

Donc d'après 1b), $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = \min \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ et
 f possède un minimum sur $\mathbb{R}$

6) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

comme $(f'(x) - f'(y))(x - y) = (f'(y) - f'(x))(y - x)$, et que $|x - y| = |y - x|$,

on peut supposer $x \leq y$ sans perte de généralité.

Alors comme $x \mapsto f'(x) - \alpha x$ est croissante, il vient

$$f'(x) - \alpha x \leq f'(y) - \alpha y, \text{ donc } \alpha(y - x) \leq f'(y) - f'(x)$$

$$\text{et comme } y - x \geq 0, \quad \alpha(y - x)^2 \leq (f'(y) - f'(x))(y - x)$$

$$\text{On a donc bien } \underline{\alpha|x - y|^2 \leq (f'(x) - f'(y))(x - y)}$$

7) On reprend 2b). On cherche à vérifier la hypothèse.

Tout d'abord, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x) + \alpha x$, avec $\alpha > 0$. Or g est convexe, donc g' est croissante et $x \mapsto \alpha x$ l'est aussi.

Donc par somme, f' est croissante et f est convexe

$$\text{Donc avec 2b), } |x - y|^2 \leq |x - y|^2 - (2 - 2\alpha) \geq (x - y)(f'(x) - f'(y))$$

$$\underline{\text{Or avec 6)}, } -\alpha|x - y|^2 \geq -(f'(x) - f'(y))(x - y)$$

Donc $|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x - y|^2 (1 - \alpha \bar{c}(2 - L\bar{c}))$

8) x_* est un minimum de f sur $\mathbb{R}$ donc f possède un minimum global sur $\mathbb{R}$, atteint en x_* (qui n'est pas une extrémité de l'intervalle). Donc f est dérivable en x_* et $f'(x_*) = 0$

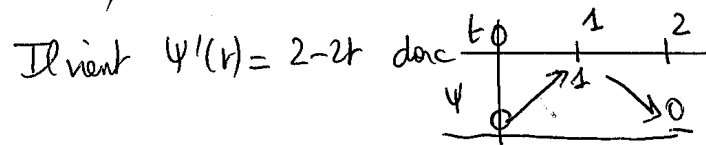
Donc de nouveau $\tilde{x}_* = x_*$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $|\tilde{x}_n - x_*| \leq |x_n - x_*| (1 - \alpha \bar{c}(2 - L\bar{c}))$ (avec 7))

Donc $|x_{n+1} - x_*| \leq \rho |x_n - x_*|$, avec $\rho = 1 - \alpha \bar{c}(2 - L\bar{c})$

Ici, $0 < \bar{c} < \frac{2}{L}$, donc $2 - L\bar{c} > 0$ et $\rho < 1$ ($\alpha > 0, \bar{c} > 0$)

En outre, on étudie $\psi: t \mapsto t(2-t) = 2t - t^2$ sur $[0, 2]$.



donc $\forall t \in [0, 2], t(2-t) \leq 1$. Or ici $\alpha \bar{c}(2 - L\bar{c}) \leq L\bar{c}(2 - L\bar{c})$

d'après 4) qui donne $\alpha \leq L$.

De plus, $0 < \bar{c} < \frac{2}{L}$ donc $0 < L\bar{c} < 2$ et $\alpha \bar{c}(2 - L\bar{c}) \leq \psi(L\bar{c}) \leq 1$

On a donc bien $\rho \geq 0$ et $0 \leq \rho < 1$

En outre, par récurrence, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_*| \leq \rho |x_n - x_*|$,

on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x_*| \leq \rho^n |x_0 - x_*|$

Partie III

(4)

9) f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale. Elle est aussi C^1 sur $\mathbb{R}_-$.

De plus, f est continue en 0 car $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} f(0)$.

En outre, $T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $T(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$, donc f

est dérivable en 0. Enfin, $f'(x) = x^2$ si $x > 0$ donc de même
 $f'(x) = 0$ si $x \leq 0$

$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$ et f' est continue en 0. f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = x^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f'(x) = 0$.

Donc f' est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$: elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

(si $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \leq f'(0) \leq f'(y)$)

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On a directement $\min(f(x), x \in \mathbb{R}) = f(0) = 0$. Cette valeur est atteinte en tout point de $\mathbb{R}_-$, et si $x > 0$, $f(x) > 0$.

Donc l'ensemble des minimiseurs de f est $\mathbb{R}_-$

10 a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on prouve " $\frac{1}{6} \geq x_n > 0$ " = $Q(n)$

$\rightarrow Q(0)$ est vraie

$\rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ vraie. Alors $x_n > 0$, donc

$f'(x_n) = x_n^2$ et $x_{n+1} = x_n - 2f'(x_n) = x_n(1 - 2x_n)$

Or $\forall x_n < 1$, donc $x_{n+1} > 0$

De plus, $0 < 1 - 2x_n < 1$, donc $x_{n+1} < x_n < \frac{1}{6}$.

Donc $Q(n+1)$ est vraie

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < \frac{1}{6}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $f'(x_n) = x_n^2$,

donc $x_{n+1} = x_n - 2x_n^2 = x_n(1 - 2x_n) < x_n$ (car $1 - 2x_n < 1$)

Donc (x_n) est décroissante

b) (x_n) est décroissante, minorée par 0, donc par le théorème de la limite monotone, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in [0, \frac{1}{6}[$ (avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n \leq x_0 < \frac{1}{6}$)

Donc $x_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ et $x_n(1 - 2x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(1 - 2l)$ par opérations.

Par unicité de la limite, $l = l(1 - 2l)$

$\Leftrightarrow l[2l] = 0$. Donc $l = 0$ et $\boxed{x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $\frac{1}{x_n} + \frac{2}{1 - 2x_n} = \frac{1}{x_n(1 - 2x_n)} = \frac{1}{x_{n+1}}$.

On a bien $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{2}{1 - 2x_n}$ (1)

On veut montrer $x_n \leq \frac{x_0}{1 + n2x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \geq \frac{1 + n2x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0} + n2$.

Or (1) donne $\frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_{n-1}} + 2$ (car $\frac{1}{1 - 2x_n} \geq 1$ avec $1 - 2x_n \in]0, 1[$)

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}} \right) \geq \sum_{k=1}^n \bar{c} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0} \geq n\bar{c}. \quad (5)$$

$$\text{On a bien } \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_0} + n\bar{c} = \frac{1+n\bar{c}x_0}{x_0}$$

$$\text{donc } \underline{\underline{0 \leq x_n \leq \frac{x_0}{1+n\bar{c}x_0}}}$$

11) On procède par disjonction de cas.

$$\rightarrow \text{si } x_0 \in]0, \frac{1}{\bar{c}}[, \text{ avec } 10c, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_n \leq \frac{x_0}{1+n\bar{c}x_0}$$

donc par encadrement, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$\rightarrow \text{si } x_0 \leq 0 : \text{ alors } x_1 = x_0 - \bar{c} f'(x_0) = x_0 \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}_-, f'(x) = 0)$$

donc par récurrence, $x_n = x_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ et $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \in \mathbb{R}_-$

$\rightarrow$ si $x_0 \geq \frac{1}{\bar{c}} : \text{ alors } x_1 = x_0(1 - \bar{c}x_0) \leq 0$ et on est ramené au cas précédent.

Das tous les cas, (x_n) converge vers un réel $x \in \mathbb{R}_-$, donc vers un minimum de f .

12a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. (1) donne $\forall t \in (0, 1), f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$

On note $\varphi(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$.

$\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ donc d'après Taylor-Young, $\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + o(t)$ $t \rightarrow 0^+$

avec $\varphi(0) = f(x)$ et $\varphi'(0) = (y-x)f'(x)$.

$$\text{Donc } f((1-t)x+ty) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} f(x) + (y-x)f'(x)t + o(t)$$

$$\text{Donc } f((1-t)x+ty) - ((1-t)f(x) + tf(y)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} t(f(x) - f(y) + f'(x)(y-x)) + o(t)$$

$$\text{Donc } a(t) = \frac{f((1-t)x+ty) - ((1-t)f(x) + tf(y))}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} (f(x) - f(y) + f'(x)(y-x))$$

Or $\forall t \in (0,1]$, $a(t) \leq 0$, donc nécessairement $f(x) - f(y) + f'(x)(y-x) \leq 0$

$$\text{On a donc bien } \underline{f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)}$$

12b) On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on étudie $d(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{L}{2}(y-x)^2 - f(y)$

d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(y) = f'(x) + \frac{L}{2}(y-x)^2 - f'(y)$

$$\text{donc } d'(y) = (f'(x) - f'(y)) + \frac{L}{2}(y-x)^2$$

Si $x \geq y$, $f'(x) \geq f'(y)$ (f' est croissante car f est convexe).

$$\text{Donc } f'(x) - f'(y) = |f'(x) - f'(y)| \leq L|x-y| = L(x-y)$$

$$\text{Donc } \underline{d'(y) \leq 0}$$

$$\text{Si } x < y, f'(x) - f'(y) = -|f'(x) - f'(y)| \geq -L|x-y| = -L(y-x)$$

Donc $d'(y) \geq 0$. Ainsi, d est croissante sur $[x, +\infty[$, décroissante

sur $] -\infty, x]$. Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $d(y) \geq d(x) = 0$

$$\text{On a bien } \underline{\underline{\forall y \in \mathbb{R}, f(y) \leq f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{L}{2}(y-x)^2}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique 12b) pour $y = x_{n+1}$ et $x = x_n$.

(6)

$$\text{Alors } y - x = -\tau f'(x_n).$$

$$\text{Donc } f(x_{n+1}) \leq f(x_n) + f'(x_n)[- \tau f'(x_n)] + \frac{L}{2} (\tau f'(x_n))^2$$

$$\text{donc } \underline{f(x_{n+1}) \leq f(x_n) + |f'(x_n)|^2 \left[\frac{\tau}{2} (2 - L\tau) \right]}$$

$$\text{Or } 0 < \tau < \frac{2}{L} \text{ donc } 0 < \tau L < 2 \text{ et } \frac{\tau}{2} (2 - L\tau) > 0.$$

$$\text{Donc } f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \text{ et } \underline{(f(x_n)) \text{ est décroissante}}$$

13) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\underline{\text{On utilise 12a): } f(x_*) \geq f(x) + f'(x)(x_* - x)}$$

$$\text{donc } f(x) - f(x_*) \leq f'(x)(x - x_*)$$

Or f' est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(x_*) = 0$ donc si $x > x_*$, $f'(x) \geq 0$

$$\text{et } f'(x)(x - x_*) = |f'(x)(x - x_*)|$$

De même, si $x \leq x_*$, $f'(x) \leq 0$ et $f'(x)(x - x_*) = |f'(x)(x - x_*)|$

Enfin, $f(x_*) = \min_{x \in \mathbb{R}} \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ donc $f(x) - f(x_*) \geq 0$

$$\text{On a bien } \underline{0 \leq f(x) - f(x_*) \leq |x - x_*| f'(x)}$$

14) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $x_0 \neq x_*$

$$\underline{\text{Avec 12c), } f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \frac{\tau}{2} (2 - L\tau) |f'(x_n)|^2}$$

Les hypothèses de 2e) sont renforcées : $0 < \tau < \frac{2}{L}$ donc $0 < \tau \leq \frac{2}{L}$,

f est L -lipschitzienne, f possède un minimum x_* ,
 $f \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$ est convexe.

Donc $(|x_n - x_*|)$ est décroissante.

On veut montrer $|f'(x_n)| \geq \frac{|f(x_n) - f(x_*)|}{|x_0 - x_*|}$

Avec 13), il vient $|f(x_n) - f(x_*)| \leq |x_n - x_*| |f'(x_n)|$

donc $|f(x_n) - f(x_*)| \leq |x_0 - x_*| |f'(x_n)|$ (car $(|x_n - x_*|)$ est décroissante).

Donc comme $x_0 - x_* \neq 0$, $|f'(x_n)| \geq \left| \frac{f(x_n) - f(x_*)}{x_0 - x_*} \right|$

donc $\frac{\sigma}{2} (2 - 2L) (f'(x_n))^2 \geq \frac{\sigma}{2} (2 - 2L) \left| \frac{f(x_n) - f(x_*)}{x_0 - x_*} \right|^2$

et on a bien $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \frac{\sigma}{2} (2 - 2L) \frac{|f(x_n) - f(x_*)|^2}{|x_0 - x_*|^2}$

15)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence $P(n)$: " $a_n \leq \frac{a_0}{1 + nca_0}$ ".

• $P(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

→ si $a_{n+1} = 0$, le résultat est vrai

→ sinon, $a_{n+1} > 0$ et donc $a_n > 0$ (avec $a_{n+1} \leq a_n - a_n^2 c$)

car on sait $a_n > 0$, et $1 - a_n c > 0$ (sinon $a_{n+1} \leq a_n(1 - a_n c) \leq 0$)

Donc $\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_n(1-ca_n)} = \frac{1}{a_n} + \frac{c}{1-ca_n} \quad (2)$ (7)

On veut montrer $a_{n+1} \leq \frac{a_0}{1+(n+1)ca_0} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1+(n+1)ca_0}{a_0} = \frac{1}{a_0} + (n+1)c$

On sait que $a_n \leq \frac{a_0}{1+nc a_0}$ avec $P(n)$, donc $\frac{1}{a_n} \geq nc + \frac{1}{a_0}$.

Avec (2), il vient $\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_0} + nc + \frac{c}{1-ca_n} \geq \frac{1}{a_0} + (n+1)c$ car

$0 \leq 1-ca_n \leq 1$ avec $c > 0$ et $a_n > 0$

Donc $a_{n+1} \leq \frac{a_0}{1+(n+1)ca_0}$ et $P(n+1)$ est vraie

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \frac{a_0}{1+nc a_0}}$

16) On pose $a_n = f(x_n) - f(x_*) \geq 0$ (car x_* est un minimum de f)

Donc avec 14), $a_{n+1} \leq a_n - \frac{\bar{\epsilon}}{2} (2-\bar{\epsilon}L) \frac{a_n^2}{|x_0 - x_n|^2}$

On pose $c = \frac{\bar{\epsilon}}{2} (2-\bar{\epsilon}L) \times \frac{1}{|x_0 - x_n|^2} > 0$ (car $0 < \bar{\epsilon} < \frac{2}{L}$)

Les hypothèses de 15) sont donc vérifiées.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq \frac{a_0}{1+nc a_0}$ et par encadrement,

$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc $\underline{\underline{f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_*)}}$

17) On utilise 12c) : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [0, n-1]$.

Alors $f(x_i) - f(x_{i+1}) \geq \frac{\bar{\epsilon}}{2} |2-\bar{\epsilon}L| |f'(x_i)|$

On somme et avec une somme télescopique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) - f(x_{i+1})) \geq \frac{\beta}{2} (2-\beta L) \sum_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)|^2$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{f(x_0) - f(x_n) \geq \frac{\beta}{2} (2-\beta L) \sum_{0 \leq i < n} |f'(x_i)|^2}}$$

Or avec 12c), $(f(x_n))$ est décroissante et avec 16), $(f(x_n))$

converge vers $f(x_*)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $-f(x_n) \geq f(x_*)$ et

$$f(x_0) - f(x_*) \geq f(x_0) - f(x_n) \geq \frac{\beta}{2} (2-\beta L) \sum_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)|^2$$

Donc les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |f'(x_i)|^2$ sont majorées (avec $\frac{\beta}{2} (2-\beta L) > 0$ car $0 < \beta < \frac{2}{L}$).

Donc elle converge et $\underline{\underline{f'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}}$

18a) Avec le théorème de Bolzano-Weierstrass, il s'agit ici de montrer que (x_n) est bornée.

Avec 2c), comme f admet un minimum x_* , avec $0 < \beta \leq \frac{2}{L}$, $(|x_n - x_*|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, donc elle converge vers $a \in \mathbb{R}$. Elle est donc bornée : soit $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - x_*| \leq M.$$

$$\text{Alors } |x_n| = |x_n - x_* + x_*| \leq M + |x_*| \text{ et } \underline{\underline{(|x_n|) \text{ est bornée}}}$$

D'après Bolzano - Weierstrass, on peut considérer $\left(\begin{array}{l} x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_{**} \end{array} \right.$, avec $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante.

b) Comme $f'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $f'(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est une sous-suite de $(f'(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$).

Or f' est continue en x_{**} car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Donc $f'(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(x_{**})$ (car $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_{**}$).

Par unicité de la limite, $f'(x_{**}) = 0$

c) Comme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que f est convexe, f' est croissante sur $\mathbb{R}$

Or $f'(x_*) = f'(x_{**}) = 0$ (f possède un minimum global atteint en x_* , donc $f'(x_*) = 0$).

Si $x_* < x_{**}$, f' est donc nulle sur $[x_*, x_{**}]$ et f est constante sur $[x_*, x_{**}]$, donc $f(x_*) = f(x_{**}) = \min(\{f(x), x \in \mathbb{R}\})$, donc

x_{**} est bien un minimum de f sur $\mathbb{R}$

C'est vrai aussi si $x_{**} < x_*$, et si $x_{**} = x_*$.

Donc x_{**} est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

On utilise de nouveau 2c): $(|x_n - x_{**}|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(puisque x_{**} est un minimum de f)

Elle est minorée par 0, donc $|x_n - x_{**}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc } |x_{q(n)} - x_{**}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

$$\text{Mais } |x_{q(n)} - x_{**}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par unicité de la limite, $a = 0$ et $|x_n - x_{**}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$