

Programme de colles PCC :

La colle commence obligatoirement par une question de cours. Cela peut être au choix :

- Un ou deux énoncés parmi ceux qui sont proposés sans démonstration (pour au moins un élève du groupe)
- Un énoncé avec sa démonstration (uniquement parmi ceux qui sont exigibles).

Ensuite, le colleur propose un ou plusieurs exercices de son choix.

Du 02/11 au 06/11 (semaine 5)

Les questions de cours :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Définition de l'absolue convergence. Intégrabilité.
- Lien entre absolue convergence et convergence. Majoration de $\left| \int_a^b f(t) dt \right|$.
- Cas d'une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur I .
- Exemples de référence : intégrabilité de $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ en 0^+ et en $+\infty$, de $t \rightarrow \ln(t)$ en 0^+ et de $t \rightarrow e^{-at}$ en $+\infty$.
- Lien entre l'intégrabilité de $h \rightarrow f(a+h)$ en 0 et celle de f en a .
- Critères de convergence par comparaison : cas où $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, où $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$ et $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$
- Lorsque f est continue par morceaux sur $I = [a, b[$ et de signe fixe (au voisinage de b), alors f est intégrable en b si et seulement si $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.
- Vocabulaire des séries : convergence, somme, reste.
- Lien logique entre $\sum U_n$ converge et $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.
- Critère de majoration pour les séries à termes positifs.
- Pratique de la comparaison série-intégrale pour obtenir l'équivalent d'un reste ou d'une somme partielle.
- Séries de référence : séries géométriques, séries de Riemann, série exponentielle.
- Théorème spécial sur les séries alternées avec signe et majoration du reste en valeur absolue.
- Séries absolument convergentes. Lien avec la convergence.
- Produit de Cauchy.
- Critères pour étudier la nature d'une série : critères d'équivalence, de domination et de négligeabilité.
- Comparaison aux séries de Riemann avec l'utilisation pratique de $n^\alpha U_n$.
- Formule de Stirling.
- Règle de d'Alembert pour une série à termes strictement positifs.
- Lien suite-série.
- Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice : Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre.
- Valeurs propres d'une matrice triangulaire.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice : degré, terme en X^{n-1} et terme constant si $A \in M_n(K)$.
- Lien entre racines du polynôme caractéristique et valeurs propres. Majoration du nombre de valeurs propres distinctes d'une matrice.
- Multiplicité d'une valeur propre.
- Polynôme caractéristique, spectre et multiplicité des valeurs propres de deux matrices semblables.
- Encadrement de la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ à l'aide de sa multiplicité.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration : rien cette semaine.

- Etude de la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- Etude de l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- Développement asymptotique à la précision $o(1)$ de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur les séries et les intégrales généralisées.

Du 09/11 au 14/11 (semaine 6)

Les élèves ayant des colles prévues le mercredi 11 Novembre doivent contacter les colleurs concernés pour les déplacer.

Les questions de cours :

Reprise de la totalité du programme de la semaine précédente sur les séries et la réduction.

En plus :

1) Un ou plusieurs énoncés sans démonstration à choisir parmi les suivants :

- Définition d'endomorphisme et de matrice diagonalisable. Lien entre les deux.
- $f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E . Énoncé analogue pour une matrice.
- Diagonalisabilité d'une matrice $A \in M_n(K)$ ayant une seule valeur propre ou ayant n valeurs propres distinctes.
- Théorème de Cayley-Hamilton.
- Critère de diagonalisabilité utilisant un polynôme scindé à racines simples.
- Diagonalisabilité de l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable.

2) Un des résultats suivants, avec la démonstration :

- Développement asymptotique à la précision $o(1)$ de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- $f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f .
- $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que pour chaque valeur propre, la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.
- Lien entre valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur.

Les thèmes d'exercices :

Tout exercice sur les séries numériques. Tout exercice de difficulté modeste sur la réduction sans trigonalisation.