

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
lun. 26 août					
mar. 27 août					
mer. 28 août					
ven. 30 août					
lun. 2 sept.	<p>Accueil des élèves (1h) <i>Présentation de l'organisation en mathématiques et séance d'exercices 2h (sans préparation)</i></p> <p>Remarque sur les exemples du cours : * les « exemples fondamentaux » du cours sont tous à connaître (font explicitement partie du programme) ; * les « exemples classiques » du cours ne sont pas écrits dans le programme, mais reviennent souvent ; si possible, il vaut mieux les connaître ; * les « exemples pathologiques » du cours illustrent le fait qu'une propriété ne marche pas (réciproque ou absence d'une hypothèse d'un théorème par exemple) — ils ne font pas partie du programme, mais les avoir en tête évite de se tromper sur l'énoncé de la propriété correspondante ; * les « exemples » [tout court] sont juste des illustrations directes (et sans intérêt particulier à être mémorisés) de ce qui est écrit juste avant, pour en aider la compréhension.</p>	1.5, 1.6(3,4,5)		(1.11 ou [1.49 + 1.65 ou 1.100]) + [1.105 ou 1.89]	
mar. 3 sept.	<p>Méthodologie (révisions de PCSI en classe inversée)</p> <p>Savoir utiliser proprement un théorème. Utiliser à bon escient les mots de la logique. Quantificateurs et variables muettes. Raisonnements logiques classiques. Savoir rédiger une récurrence (simple, double ou forte)</p> <p>Chapitre 1 : Suites et fonctions (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</p> <p>Terme général des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrences linéaires d'ordre 2. Sommes, produits, factorielles, coefficients du binôme. Sommes doubles sur un rectangle ou sur un triangle. Formules de sommation : somme des n, des n², sommes des termes d'une suite géométrique (et variantes), formule du binôme.</p> <p>Maniement des inégalités dans R : calcul sur les inégalités, suites et fonctions monotones, inéquations, études de signe, fonctions majorées ou bornées. Inégalité des accroissements finis (et l'égalité des AF et le théorème de Rolle) et inégalité de Taylor-Lagrange.</p> <p>Fonctions convexes : caractérisation par la dérivée seconde ; inégalités associées (courbe sous les pentes et au dessus des tangentes). NB : l'inégalité de Jensen n'est pas au programme.</p> <p>Tracé de fonctions, équation de la tangente en un point, méthode d'étude des branches infinies.</p> <p><i>Injections, surjections, bijections, théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection</i></p> <p>Fonctions usuelles : exp, ln, puissances, sin, cos, tan, sinh, cosh, arcsin, arccos, arctan. NB : th, argsh, argch et argth ne sont pas au programme Objectif : connaître l'allure précise des courbes des fonctions et savoir faire le lien (dans les deux sens) avec leurs propriétés analytiques :</p> <p>définition, ensembles de définitions, valeurs particulières, dérivées, variations, limites, branches infinies. + révision des Formules usuelles de calcul algébrique À CONNAÎTRE PARFAITEMENT ET SANS HÉSITATION Y COMPRIS (ET SURTOUT) LES DESSINS</p> <p>Nombres complexes, formules de trigonométrie, linéarisation, (in)équations trigonométriques. Exponentielle complexe, forme trigonométrique, résolution de $z^n=a$.</p>	1.11(18,21), 1.12(132), 1.19(13, 17)	1.8, 1.10(5,6,7), 1.11(10), 1.21(2)		
mer. 4 sept.	<p><i>Injections, surjections, bijections, théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection</i></p> <p>Fonctions usuelles : exp, ln, puissances, sin, cos, tan, sinh, cosh, arcsin, arccos, arctan. NB : th, argsh, argch et argth ne sont pas au programme Objectif : connaître l'allure précise des courbes des fonctions et savoir faire le lien (dans les deux sens) avec leurs propriétés analytiques :</p> <p>définition, ensembles de définitions, valeurs particulières, dérivées, variations, limites, branches infinies. + révision des Formules usuelles de calcul algébrique À CONNAÎTRE PARFAITEMENT ET SANS HÉSITATION Y COMPRIS (ET SURTOUT) LES DESSINS</p> <p>Nombres complexes, formules de trigonométrie, linéarisation, (in)équations trigonométriques. Exponentielle complexe, forme trigonométrique, résolution de $z^n=a$.</p>	1.23(6), 1.27, 1.29			
ven. 6 sept.	<p>Polynômes : trinôme du second degré, coefficients, degré, racines, racines multiples, factorisation dans $C[X]$ ou $R[X]$, division euclidienne. Fonctions homographiques. !!! NE PAS CONFONDRE X et x !!!</p> <p>Polynômes de Lagrange : expression explicite à partir des conditions de valeurs au points d'interpolation. Existence et forme des solutions du problème d'interpolation. NB : le fait que les polynômes de Lagrange forment une base ne sera vu qu'au chapitre d'algèbre linéaire</p> <p>Fractions rationnelles : forme de la décomposition en éléments simples — uniquement dans le cas cas où le dénominateur est scindé et à racines simples. NB : le cas des pôles multiples est hors-programme (à moins de fournir la forme de la décomposition recherchée). La décomposition dans R qui fait intervenir des irréductibles de degré 2 est, si nécessaire, à guider en partant de celle sur C.</p>	1.34(2,4), 1.46(5,9)			
lun. 9 sept.	<p>Chapitre 2 : Calcul des limites (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</p> <p>Méthodes algébriques de calcul d'une limite pour les suites et fonctions à valeurs dans R : - théorèmes de calcul sur les limites ; caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction - limites des fonctions usuelles ; continuité ; limite de la suite (a^n) pour a réel ; - équivalence, prépondérance, domination ; règles de calcul usuelles ; - résultats usuels : comparaison des puissances en 0 / en l'infini ; croissances comparées de puissances/ exp/ ln ; formule de Stirling (programme de PC ; non démontrée pour l'instant) ; - développements limités : définition, comment en déduire un équivalent ; - obtention d'un dl : par la formule de Taylor-Young, par primitivation, par dérivation, par somme, par produit, par composée ; - Dls usuels à connaître parfaitement (en 0) : $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^r$, $1/(1+x)$, $\ln(1+x)$, \arctan, \tan (ordre 3), \cosh, \sinh</p>	1.66(2), 1.74(8,10), 1.82(4)			
mar. 10 sept.	<p>Méthodes analytiques de calcul d'une limite pour les suites et fonctions à valeurs dans R : - passage à la limite dans une inégalité large. Obtention d'une inégalité, localement, d'après une inégalité stricte avec la limite. - théorèmes de limite par encadrement, minoration ou majoration Théorème d'obtention d'un équivalent par encadrement - théorème de la limite monotone pour les suites et les fonctions</p> <p>Méthodes d'étude de la limite spécifiques aux suites : - théorème sur les suites adjacentes - exemple d'étude des suites définies implicitement par $f_n(u_n)=0$ - exemple d'étude des suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$: définition, étude graphique, limites finies possibles...</p> <p>Extension de la notion de convergence aux suites et aux fonctions à valeurs dans C. Exemple fondamental de la suite (a^n) : convergence pour a complexe ; limite pour a réel.</p>	2.15, 2.18(9,12,20), 2.20(10,11,20)	1.95, 1.108, 2.8(9,14,15), 2.11	[2.17 ou 2.80] + [2.72 ou 2.65 ou 2.16] + [4 questions parmi : 2.18(17,27) + 2.20(13,19,21,27,28)]	
mer. 11 sept.	<i>séance d'exercices</i>	2.25, 2.38(4,6,15), 2.45(1)			
ven. 13 sept.	<p>Chapitre 3 : Calcul différentiel à une variable (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</p> <p>Dérivée d'une fonction d'une variable réelle, dérivée à gauche ou à droite, dérivée sur une partie Dérivées des fonctions usuelles À CONNAÎTRE PARFAITEMENT !!! NE PAS CONFONDRE f et f(x) !!!</p> <p>Théorème de dérivabilité et dérivée d'une réciproque.</p> <p>Extension de la dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes.</p> <p>Calculs de dérivées n-ièmes. Formule de Leibniz.</p> <p>Régularité d'une fonction : fonction n fois dérivable et dérivée n-ième, fonction de classe C-n, fonction de classe C-infini, régularité des fonctions usuelles (elles sont C-infini là où elle sont définies, sauf exceptions À CONNAÎTRE PARFAITEMENT) Théorèmes de calcul sur les fonctions à valeurs réelles ou complexes n fois dérivables, de classe C-n, de classe C-infini : somme, produit, composée. Théorème sur la limite de la dérivée. Application à l'étude de la régularité d'un raccordement ou d'un prolongement de fonctions, NB : le théorème de prolongement de classe C-n n'est pas au programme (seulement pour n=1, c'est le théorème sur la limite de la dérivée)</p> <p>PC : extension des notions de convergence/continuité/dérivabilité et dérivée aux fonctions à valeurs dans IK^n ; Formules de calcul de dérivée pour : $u+v$, $u(\phi(t))$ avec ϕ à valeurs réelles, $L(u)$ avec L linéaire, $B(u,v)$ avec B bilinéaire, $M(u_1, \dots, u_p)$ avec M p-linéaire (admis).</p>	3.20(1)			

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
lun. 16 sept.	<p>Calcul de primitives : primitives usuelles A CONNAÎTRE PARFAITEMENT. Primitive d'une somme, d'une combinaison linéaire ; primitivation par parties, par changement de variable Primitive de certaines fractions rationnelles, notamment $1/(x-a)^n$ et $(ax+b)/(x^2+px+q)$ et fractions rationnelles à dénominateur scindé à racines simples NB : le cas général de la décomposition en élément simple (existence, unicité et méthodes dans le cas général) n'est pas au programme de PC, mais il faut savoir se débrouiller dans les situations simples, et savoir trouver les coefficients d'une forme proposée NB : les révisions sur les intégrales seront effectuées à l'occasion d'un chapitre ultérieur NB : les règles de Bioche ne sont plus au programme de CPGE (depuis fort longtemps...)</p> <p>Vocabulaire des équations différentielles de PCSI (savoir reconnaître et nommer chaque type d'équation au programme). Exemples de changement de fonction inconnue. Principe général de résolution des équations linéaires. Résolution des équations différentielles linéaires : $y'-a(x)y=b(x)$; $y''+ay'+by=0$; $y''+ay'+by=\exp(mx)$; $y''+ay'+by=B \cos(\omega x)$ ou $B \sin(\omega x)$. À SAVOIR FAIRE PARFAITEMENT. NB : pour les équations d'ordre deux, les seconds membres de la forme $P(x)\exp(mx)$, $P(x) \cos(\omega x)$ ou $P(x)\sin(\omega x)$ avec P polynôme non constant ne sont pas au programme. Exemples de résolution d'équation par changement de fonction inconnue.</p> <p>Unicité de la solution d'un problème de Cauchy associé aux types d'équations $y'-a(x)y=b(x)$; $y''+ay'+by=f(x)$ où a et b sont des constantes [résultat admis]. NB : le cas d'ordre deux où a et b sont des fonctions n'est plus au programme. NB : les équations vectorielles $Y'+A(x)Y=B(x)$ [Y et B à valeurs dans \mathbb{R}^n, A(x) matrice carrée] ne sont plus au programme Ni le théorème de Cauchy-Lipschitz associé (existence et unicité de la solution d'un pb de Cauchy associé). NB : les résultats sur l'étude des équations différentielles $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ ne sont plus au programme (théorème de structure de l'ensemble des solutions, wronskien, méthode de variations DES constantes) — mais la méthode de variation de LA constante peut être envisagée si le changement de fonction inconnue est donné ! NB : les équations autonomes ne sont pas au programme.</p>		2.73(1,2), 3.8,3.11(2),3.20 (2,3), 3.22(6), 3.24		DS 1 : calcul du tg d'une suite définie par récurrence forte via une suite de polynômes (5Q) ; Ex 2 : caractérisation des fonctions affines/convexes par le milieu (10Q) ; Ex 3 : dév asymptotique d'une suite récurrente avec trigonométrie (4Q) ; Ex 4 : Expression de $\sinh x$ comme un produit infini ; avec des polynômes (9Q) ; Ex 5 : limite autour d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 (3Q)
mar. 17 sept.	<i>séance d'exercices</i>	3.27(2,4,7), 3.29		3.34 ou ([3.4 ou 3.5] + [3.44 ou 3.47])	
mer. 18 sept.	<p>Chapitre 4 : Intégration (révisions de PCSI rapidement en classe et extensions de PC)</p> <p>Rappel de PCSI : théorème fondamental de l'analyse (lien primitive/intégrale) ; calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide d'une primitive. REVOIR LE CALCUL DE PRIMITIVES. !!! NE PAS CONFONDRE PRIMITIVE ET INTÉGRALE !!!</p> <p>Fonctions continues par morceaux sur un segment NB : la classe C^n par morceaux n'est pas au programme pour $n>0$ Extension de l'intégration aux fonctions continues par morceaux sur un segment.</p> <p>Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque (i.e. continue par morceau sur tout segment contenu dans l'intervalle — c'est exactement ce qui suffit pour définir les intégrales impropres).</p> <p>Définition de l'intégrale impropre sur un intervalle semi-ouvert ; sur un intervalle ouvert. Remarque : le programme de PC/PC* n'envisage pas l'intégration de fonctions qui ne seraient pas, au minimum, continues par morceaux sur l'intervalle ouvert délimité par les bornes de l'intégrale. Exemples fondamentaux À CONNAÎTRE : $1/x^r$ sur $]0,1[$, $1/x^r$ sur $]1,+\infty[$, $\exp(-x)$ sur $[0,+\infty[$, $\ln x$ sur $]0,1[$, fonctions constantes. REVOIR LE CALCUL DE LIMITES</p>				
ven. 20 sept.	<p>Linéarité de l'intégration ; relation de Chasles ; cas des intégrales impropres.</p> <p>Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 ; pour des intégrales impropres la convergence de $[\int uv]_a^b$ assure que les deux intégrales sont de même nature. Sinon revenir à des intégrales partielles puis étudier la convergence de chaque terme.</p> <p>Formule de Taylor avec reste intégrale sur un segment. REVOIR : inégalité de Taylor-Lagrange et formule de Taylor-Young</p>	4.12(1,2,8)			
lun. 23 sept.	<p>Changement de variable dans une intégrale sur un segment ; extension au cas d'une intégrale impropre de fonctions continues (avec un changement de variable C^1 strictement monotone bijectif entre les deux intervalles d'intégration). Dans le cas sur un segment, c'est une formule de calcul ; dans le cas impropre c'est un théorème dont l'emploi doit être justifié proprement. Exemples fondamentaux À CONNAÎTRE : les changements de variables affines sont licites dans les intégrales impropres.</p> <p>Propriétés analytiques de l'intégration : * positivité ; * croissance ; * inégalité triangulaire (pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes) ; * une fonction continue, positive, d'intégrale nulle est la fonction nulle. * inégalité de Cauchy-Schwarz (pour les fonctions continues à valeurs réelles — NB : le cas d'égalité ne sera abordé que dans le cadre du cours d'analyse dans les EVN). Faire attention que les bornes soient bien dans le sens croissant. Cas des intégrales impropres (il faut d'abord que tout converge).</p>	4.16(1)	3.36(10,16,20,29), 3.37(7), 3.43,3.58(3)		
mar. 24 sept.	<p>Méthode d'encadrement d'une somme par des intégrales (ou d'une intégrale par des sommes).</p> <p>Convergence d'une intégrale impropre sans calcul de primitive : * intégrales faussement impropres ; * théorème de comparaison globale (par majoration sur tout l'intervalle) pour les intégrales impropres de fonctions POSITIVES.</p>	4.42(1,4)		[(4.11 ou 4.7) + [4.17 ou 4.29] + [3 question parmi : 4.12(9,10,11,12) + 4.13(2,3,6))] ou 4.34	
mer. 25 sept.	<p>Cours 1h * théorème de comparaison locale (par majoration locale, équivalent, petit « o », grand « O ») pour les intégrales impropres de fonctions POSITIVES. → pour une intégrale impropre : vocabulaire de la convergence ou la divergence en une de ses bornes NB : la règle « $x^\alpha f(x)$ » de Riemann n'est pas au programme ; il faut la redémontrer à chaque fois, dans le cas particulier étudié — avec un théorème de comparaison.</p> <p>Exercices : 1h</p>	4.21(13,21)			
ven. 27 sept.	<p>Cours 1h Exemple classique de la fonction Gamma (aucune connaissance n'est exigible ; toute affirmation doit être redémontrée).</p> <p>Intégrales absolument convergentes ; toute intégrale absolument convergente est convergente ; la réciproque est fautive (contre-exemple classique de l'intégrale de Dirichlet : vu en classe mais aucune connaissance dessus n'est exigible)</p> <p>Rendu DS1 1h</p>				
lun. 30 sept.	Cours déplacé au mardi 1/10 (DS informatique)				

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mar. 1 oct.	<p>Fonctions intégrables (\mathcal{L}^1; notation qui est au programme), stabilité par somme, produit par un scalaire. Expression des théorèmes de comparaison avec l'intégrabilité. → pour une fonction : vocabulaire de l'intégrabilité en un point. NB : les fonctions de carré intégrable ne sont plus au programme</p> <p>Exemples de fonctions définies par une intégrale de la forme : $x \rightarrow \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ (x dans les bornes) Exemples de fonctions définies par une intégrale (éventuellement impropre) de la forme : $x \rightarrow \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t) dt$ (x dans la fonction qu'on intègre).</p> <p><i>Cours de 13h à 15h</i></p> <p>Chapitre 5 : Séries (révisions de PC SI rapidement en classe et extensions de PC)</p> <p>Rappels de PC SI : vocabulaire de base sur les séries : terme général, sommes partielles, série, convergence ou divergence (nature), somme d'une série convergente. Utilisation de formules de télescopage. Divergence grossière d'une série.</p> <p>Rappels de PC SI : exemple fondamental À CONNAÎTRE PARFAITEMENT : - série géométrique (condition nécessaire et suffisante de convergence et formule de sommation — à partir de l'entier p)</p> <p>Rappels de PC SI : relation de Chasles. Opérations sur les séries et éventuellement leurs sommes (en cas de convergence) : somme, produit par un scalaire, décalage d'indice, cas des séries lacunaires. Convergence d'une série à termes complexes.</p> <p>Rappels de PC SI : théorèmes de comparaison pour les séries À TERMES POSITIFS : - par majoration ou minoration du terme général ; ou par négligeabilité [$o(\cdot)$] ou domination [$O(\cdot)$] - par équivalence du terme général (à rechercher en priorité). Pour une série à terme positifs, le programme autorise les notations : [somme]\llinfini ou [somme]\gginfini.</p> <p>NB : le théorème de comparaison d'une série à une intégrale n'est plus au programme, mais le résultat peut être obtenu par la technique d'encadrement/minoration des sommes partielles d'une série par une intégrale (que le programme demande aux élèves de maîtriser).</p> <p>Rappels de PC SI : exemple fondamental À CONNAÎTRE PARFAITEMENT : - séries de Riemann (convergence si et seulement si $\alpha > 1$).</p> <p>Règle $\ll n^\alpha u_n \gg$ de Riemann (hors-programme : à redémontrer à chaque fois avec un théorème de comparaison).</p>		4.13(5), 4.16(4,7), 4.24, 4.34(6,16), 4.42(4,14)	[4.54 + 4.37 + 4.80] ou 4.60	
mer. 2 oct.	<p>Règle de d'Alembert pour les séries à termes STRICTEMENT POSITIFS</p> <p>Rappels de PC SI : séries absolument convergentes (définition ; toute série absolument convergente est convergente ; réciproque fautive). Théorèmes de comparaison pour les séries absolument convergentes (par majoration locale de la valeur absolue, équivalent, prépondérance ou domination).</p> <p>Théorème spécial des séries alternées : convergence, majoration et signe du reste.</p> <p><i>Remarque : tout autre règle de convergence des séries est hors programme (Cauchy, Raabe-Duhamel, etc.)</i></p>				
ven. 4 oct.	<i>séance d'exercices</i>	4.42(20), 4.47, 4.57			
lun. 7 oct.	Définition du produit de Cauchy de deux séries ; convergence et somme si les deux séries sont absolument convergentes.	5.33(2a,2b)			
mar. 8 oct.	<p>Définition de la convergence simple d'une série de fonctions définies sur un ensemble X.</p> <p>Séries entières : définition.</p> <p>Rayon de convergence R : définition [comme la borne supérieure des $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée], théorème de caractérisation : c'est l'unique R tq : il y a [divergence grossière si $z > R$ et convergence absolue si $z < R$]. → on peut remplacer la convergence absolue par : la série converge OU le tg tend vers 0 OU le tg est borné (et analogue pour le dv grossière)</p> <p>Calcul direct lorsque $a_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n }$ converge (règle de d'Alembert pour les séries entières).</p> <p>Théorèmes de comparaison pour les séries entières : si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$; si $a_n \ll b_n$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \gg R_b$ (attention à l'inversion du sens de l'inégalité).</p>	5.42	4.64, 5.1(6,12,20,34), 5.12(4,9)	[5.24 + 5.27] ou [5.37 + 5.38]	
mer. 9 oct.	<p>Opérations sur les séries entières : sommes, produit par un scalaire, substitutions simples sur la variable.</p> <p>Théorèmes d'intégration terme à terme et de dérivabilité d'une série entière sur $] -R, R[$ (en admettant – provisoirement – la continuité de sa somme).</p> <p>NB : le théorème d'Abel n'est pas au programme [si une série entière converge en R (resp. -R) alors la somme de la série entière est continue en R (resp. -R)]</p> <p>Théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur $] -R, R[$</p>				
ven. 11 oct.	<p>Produit de Cauchy de séries entières.</p> <p>Fonctions développables en série entière. Opérations sur les fonctions développables en série entière (somme, produit par un scalaire, composée par $x \rightarrow x^q$ ou $x \rightarrow kx$, produit, dérivée, primitive).</p> <p>NB : seuls sont au programme les DSE en 0 (en puissances de x ou z).</p> <p>Série de Taylor d'une fonction C-infini.</p> <p>Recherche des solutions développables en série entière d'une équation différentielle.</p> <p>Développements en série entière À CONNAÎTRE : $\exp(z)$, $z^p/(1-z)$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ ainsi qu'un domaine de validité (donné par le rayon de la SE).</p> <p>!! A cette date !! ne sont pas encore au programme : unicité du DSE ; DSE de $(1+x)^r$, de sin, cos, cosh, sinh ; sommation de certaines séries entières</p>				
lun. 14 oct.	<p>Unicité du développement en série entière.</p> <p>Développements en série entière À CONNAÎTRE : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $(1+x)^r$ ainsi qu'un domaine de validité (donné par le rayon de la SE).</p> <p>Exemple d'utilisation de séries entières pour montrer qu'une fonction est de classe C-infini ($x \rightarrow 1/x^* \arctan x$; prolongée par 1 en 0).</p> <p>Exemples de calcul de la somme de certaines séries entières.</p>				
mar. 15 oct.	<p>Chapitre 6 : Vocabulaire et calculs algébriques (révisions de PC SI en classe inversée et compléments de PC)</p> <p>COURS DE PC SI A REVOIR SUR : Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss ; méthode de Gauss-Jordan Calcul matriciel : - opérations : somme, produit par un scalaire, produit, transposée, puissance, - matrices particulières (A CONNAÎTRE) : diagonale, triangulaire, symétrique, antisymétrique, de symétrie, de projecteur, nilpotente, orthogonale, de rotation - produits, puissances, inversibilité et inverse → CONNAÎTRE les différentes méthodes classiques</p> <p>PC : Produit de matrices par bloc, matrices diagonales par blocs, matrices triangulaire par blocs PC : Produit de matrices par blocs, matrices diagonales par blocs, matrices triangulaire par blocs PC : matrices orthogonales, matrices de rotations ; notation $O(n)$ et $SO(n)$; description explicite de $SO(2)$.</p> <p><i>Séance d'exercices 40 min</i></p>	5.33(2C), 5.40(1)	5.12(14), 5.20, 5.21(4,5), 5.21(2,5), 5.26(1)	5.90	

DS 2 : (4h) Ex1 : étude d'une primitive de $(1+x^4)^{-1/2}$ (Extraits de E3A PC 2011 ; 5Q) Ex2 : calcul d'intégrales impropres dont $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} dx$ (E3A PC 2015 ; épreuve 1, Exercice 2 ; 13Q) ; Ex3 : vitesse de convergence d'une suite réelle (extraits de Centrale PC 2017 ; 11 Q) ; Ex4 : calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > na)$ avec X de loi Exponentielle → reformulé sans probabilités (7Q)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mer. 16 oct.	COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Déterminant d'une matrice (existence et unicité admises) : formule de développement selon une ligne ou une colonne, effet des opérations sur les lignes ou les colonnes, déterminant d'un produit et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le déterminant, déterminant $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$ (Sarrus), déterminant d'une matrice triangulaire, déterminant de la transposée. <i>Séance d'exercices 1h40</i>	5.40(1',2), 5.44, 5.48(5,6,7,11,14)			
ven. 18 oct.	PC : polynômes de matrice (substitution de X par A) ; utilisation d'un polynôme annulateur pour le calcul des puissances successives ou pour étudier l'inversibilité. Puissances (ou polynôme) d'une matrice diagonale (ou triangulaire) par blocs. COURS DE PCSI A REVOIR SUR le vocabulaire algébrique : - Fonctions partielles d'une fonction de plusieurs variables ; - savoir exprimer, nommer et reconnaître les propriétés des opérations algébriques (associativité, commutation et commutativité, distributivité, élément neutre, inversibilité et inverse) ; - savoir pour les ensembles usuels (fonctions, matrices notamment) et leurs opérations usuelles (somme, produit...) si ces propriétés sont vraies ou fausses ; - faire attention à la propriété de simplification « $ab=ac \Rightarrow b=c$ » et à la propriété « $a=0$ ssi $a=0$ ou $b=0$ » qui sont souvent fausses ; connaître les cas usuels où c'est vrai quand même. - image directe ou réciproque d'une partie par une fonction. !! A cette date !! n'est encore au programme de colles : formules de déterminant par blocs, déterminant de Vandermonde, stabilité d'une partie par une fonction ou une opération <i>Rendu DS2 (40min)</i>				
lun. 21 oct.					
mar. 22 oct.					
mer. 23 oct.					
ven. 25 oct.					
lun. 28 oct.					
mar. 29 oct.					
mer. 30 oct.					
ven. 1 nov.					
lun. 4 nov.	COURS DE PC : - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, déterminant de Vandermonde. NB : les formules de Cramer ne sont pas au programme. - Trace d'une matrice : définition, linéarité, trace de la transposée, trace d'un produit.	6.82			
mar. 5 nov.	COUR DE PC : - stabilité d'une partie par une fonction ou par une opération EXEMPLES À CONNAÎTRE : stabilité ou non des ensembles de matrices usuels (scalaires, diagonales, triangulaires sup, symétriques, antisymétriques, inversibles, orthogonales) par somme, produit par un scalaire, produit, inverse, transposition ; Formules d'inverse d'un produit ou de la transposée. EXEMPLES À CONNAÎTRE : stabilité ou non des ensembles usuels de fonctions (polynomiales, développables en série entière, n fois dérivables, C^n , C infini, C_{mor} , intégrables) par somme, produit par un scalaire, produit (sauf pour intégrables), composée (sauf pour C_{mor} , intégrables et DSE), dérivation (pour certains, mais pas pour d'autres) ; → revoir et connaître les définitions de ces ensembles et savoir quels sont les théorèmes qui expriment ces stabilités NB : groupes, anneaux et corps ne sont pas au programme. Les relations d'équivalence ne sont pas au programme.		5.49(6), 5.56(3,6,8,14,20), 5.63	(5.61 ou 5.66) + [5.73 ou (5.54 + 5.64)]	
mer. 6 nov.	<i>Séance d'exercices</i>	5.72(4,6,7,10,12), 6.11			
ven. 8 nov.	Chapitre 7 : Algèbre linéaire (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC) COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels ; exemples de sous-espaces vectoriels de matrices, de suites, de polynômes, de fonctions (À CONNAÎTRE) ; intersection et espace engendré. Méthodes d'étude de l'inclusion ou de l'égalité de deux sous-espaces vectoriels. COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Applications linéaires. EXEMPLES À CONNAÎTRE : application linéaire canoniquement associée à une matrice ; évaluation en un point, composition à droite par une fonction donnée, dérivation, substitution, transposition, intégration, applications partielles d'un produit Opérations sur les applications linéaires ; ; noyau et image d'une application linéaire et le lien avec l'injectivité et la surjectivité. Formes linéaire et hyperplans (=noyau d'une forme linéaire) COURS DE PC : polynômes d'endomorphismes Stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Résolution d'un « problème » (=équation) linéaire ; Exemples (À CONNAÎTRE) : suites arithmético-géométriques, équations différentielles linéaires, systèmes linéaire avec second membre, interpolation de Lagrange <i>Séance d'exercices 1h</i>	6.29(2)			
lun. 11 nov.					
mar. 12 nov.	COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Applications bilinéaire. Produits scalaires ; exemples (À CONNAÎTRE) : $K^n, Mn(K), C([a,b], \mathbb{R})$ NB : l'extension à l'espace des fonctions définies sur un intervalle quelconque, continues et de carré intégrable n'est plus au programme NB : seuls sont au programme les produits scalaires sur les espaces vectoriels réels ; les produits scalaires hermitiens ne sont pas au programme. Orthogonalité ; de deux vecteurs, de deux parties ; famille orthogonale ; orthogonal d'une partie. Norme préhilbertienne ; propriétés usuelles de norme ; norme au carré d'une somme ; formules de polarisation. REMARQUE : l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire ont été vues en PCSI mais elles ne seront revues et exploitées qu'à l'occasion du cours de topologie,	6.20	6.34, 6.37, 6.49, 6.51, 6.56(3)	(6.45 ou 6.55) + (6.89 ou 6.72) + 6.73	
mer. 13 nov.	COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Familles libre, génératrices, bases ; exemples fondamentaux (À CONNAÎTRE). NB : les familles infinies ne sont pas au programme COURS DE PC : les $n+1$ polynômes de Lagrange forment une base de $K_n[X]$ COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Dimension ; exemples fondamentaux (À CONNAÎTRE) Méthodes pour trouver une base (extraction, complétion, dimension...) Savoir trouver une base de $\ker A$ et de $\text{Im } A$ (où A est une matrice) — A SAVOIR FAIRE IMPÉRATIVEMENT Familles de vecteurs dans les espaces préhilbertiens. Orthonormalisation de Gram-Schmidt (FORMULES À CONNAÎTRE). COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Rang (d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice, d'un système linéaire) ; théorème du rang, une matrice et sa transposée ont le même rang (admis) . Caractérisations des isomorphismes en dimension finie.	6.56(9), 6.66, 6.87(1)			

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
ven. 15 nov.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Coordonnées d'un ou plusieurs vecteurs dans une base, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale (espace euclidien) ; caractérisation d'une base par l'inversibilité de la matrice des coordonnées ; matrice de passage ; COURS DE PC : dans un espace euclidien de dimension n, une famille de n vecteurs est une base orthonormale si et seulement si la matrice de ses coordonnées dans une b.o.n. est une matrice orthogonale.</p> <p>Matrice d'une application linéaire dans deux bases ou d'un endomorphisme dans une base. Formules de changement de base(s) pour un vecteur, pour un endomorphisme, ou pour une application linéaire. Calcul du noyau et/ou de l'image d'une application linéaire en calculant le noyau ou l'image de sa matrice dans des bases (ne pas confondre les vecteurs et leurs coordonnées). ATTENTION : les mots « canonique » et « canoniquement » ne doivent être utilisés que pour des EV où il y a une base canonique (K^n, $M_{\{n,p\}}(K)$ ou $K_n[X]$ — et c'est tout !)</p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.</p> <p>COURS DE PC : Trace d'un endomorphisme.</p> <p>COURS DE PC : Un sev est stable par un endomorphisme si et seulement si la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure par blocs dans une base adaptée.</p> <p>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme : matrices semblables ; sommes de SEV ; projections, symétries et autres endomorphismes particuliers</p>	7.98(2,4)			
lun. 18 nov.	<p>COURS DE PC (extension à n quelconque des notions vues en PCSI pour $n=2$) : somme de n sous-espace vectoriels, famille de n sous-espace vectoriels en somme directe ; sous-espaces supplémentaires ; caractérisations À CONNAÎTRE (par la définition, par les familles de vecteurs, ...</p>				
mar. 19 nov.	<p>... par la dimension) ; Formule de Grassmann.</p> <p>Dans un espace préhilbertien, n sev orthogonaux sont en somme directe COURS DE PCSI A REVOIR SUR : dans un espace préhilbertien E, tout sev E_1 de dimension finie possède un unique supplémentaire orthogonal qui est l'orthogonal de E_1. Formule donnant la dimension de l'orthogonal lorsque E est euclidien.</p>		Prévision : 6.87(2,3), 7.4,7.5(2,5,9,10,19), 7.10(8)	(7.14 ou 7.33) + (7.77 ou 7.96(3,4,5,6)) + (7.119 ou 7.122)	
mer. 20 nov.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Projections, symétries, et leurs sous-espaces caractéristiques. Projections orthogonales ; définition (les sous-espaces caractéristiques son orthogonaux) et expression à l'aide d'une b.o.n. de l'espace sur lequel on projette. NE PAS CONFONDRE : une projection / la projection sur ... parallèlement à ... (idem pour les symétries).</p> <p>COURS DE PC : Symétries orthogonales : définition (les sous-espaces caractéristiques son orthogonaux)</p> <p>Endomorphismes autoadjoints et Isométries d'un espace euclidien : définition ; caractérisation matricielle en base orthonormé. N.B. : le programme préconise d'éviter l'ancien vocabulaire d'automorphisme orthogonal (=isométrie) et d'endomorphisme symétrique (=autoadjoint) — avec raison, du fait des autres sens déjà rencontrés des mots « orthogonal » et « symétrie/symétrique »</p>				
ven. 22 nov.	<p>Caractérisation matricielle en b.o.n. des projections orthogonales ; une projection est orthogonale si et seulement si elle est autoadjointe. L'ensemble des isométries est stable par composition et par réciproque (tout isométrie est bijective). N.B. : le vocabulaire de « groupe orthogonal » et la notation $O(E)$ sont au programme, mais la notion de « groupe » est hors-programme. N.B. : l'ensemble des endomorphismes autoadjoints est noté $S(E)$ dans le programme, mais le programme ne précise plus qu'il faut savoir que c'est un sev de $L(E)$</p> <p>Étude des isométries en dimension 2 : * déterminant d'une isométrie ; distinction entre isométrie positive (rotation) et isométrie négative ; * en dimension 2 les matrices de rotation sont déterminées par un angle et elles commutent entre elles ; les matrices d'isométries négatives s'en déduisent par multiplication par $S = \text{diag}(1, -1)$ [et ce sont des matrices de symétries orthogonales] ; * en dimension 2 la matrice d'une rotation en base orthonormée ne change pas si l'on prend une autre base orthonormée de même orientation (i.e le déterminant de l'une dans l'autre vaut 1). * notion d'orientation d'un plan euclidien (choix d'un b.o.n. B particulière) et de base directe (son déterminant dans la base B vaut 1) : un endomorphisme est une rotation si et seulement l'image d'une b.o.n. directe est une b.o.n. directe ; angle d'une rotation. N.B. : les attendus du programme sur ce qui précède sont pas du tout clairs... ! N.B. : pour les matrices la notion de rotation est définie en toute dimension ; mais pour les endomorphismes la définition est réduite à la dimension 2 (!) N.B. : les spécificités des rotations en dimension 3 (axe, angle) sont hors-programme</p> <p>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme : * matrices semblables ; réduction</p>	7.141(4), 7.146			
lun. 25 nov.	séance d'exercices	7.13(3), 7.24(3,8,14), 7.26(4), 7.31			
mar. 26 nov.	<p>Chapitre 8 : Réduction</p> <p>COURS DE PCSI à revoir : Matrices semblables ; deux matrices semblables ont même déterminant et même rang et même trace ; utilisation de la formule de changement de base pour montrer que deux matrices sont semblables.</p>	8.1	7.34(6,7,10), 7.39(5), 7.44, 7.67,	(7.89 + 7.112) ou 7.171	
mer. 27 nov.	<p>Éléments propres d'une matrice. REVOIR IMPÉRATIVEMENT CHAPITRE 1 : cours sur les polynômes</p> <p>Polynôme caractéristique d'une matrice (unitaire par convention) ; multiplicité d'une valeur propre. Lien entre les valeurs propres et la trace ou le déterminant (lorsque le polynôme caractéristique est scindé).</p>	8.12(10), 8.18			
ven. 29 nov.	<p>Méthodes de recherche des valeurs propres d'une matrice : * à l'aide du polynôme caractéristique * cas des matrices triangulaires * La transposée ou une matrice semblable ont le même polynôme caractéristique que la matrice de départ * les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles * Les valeurs propres appartiennent à l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. Exemple des matrices de projecteur ou de symétrie</p> <p>Rendu DS3 (40min)</p> <p>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme : * éléments propres d'un endomorphisme * Les sous-espaces propres sont en somme directe. la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité. * diagonalisabilité et diagonalisation d'une matrice ou d'un endomorphisme, trigonalisation, théorème spectral ; * trigonalisation * applications classiques de la réduction (calcul de A^n, récurrences linéaires, systèmes différentiels, etc.)</p>				
lun. 2 déc.	<p>Éléments propres d'un endomorphisme (en toute dimension) ; polynôme caractéristique et multiplicités (en dimension finie).</p>	8.25, 8.36(2)			
mar. 3 déc.	<p>Les sous espaces propres sont en somme directe. En dimension finie, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité.</p> <p>Diagonalisation effective d'une matrice à l'aide d'un base de vecteurs propres. Une matrice est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres vaut $M_{\{n,1\}}$. Dans ce cas, une base de vecteurs propres s'obtient par réunion de bases des sous-espaces propres. Inversement toute base de vecteurs propres est obtenu de cette manière.</p>	8.49	7.78, 7.101, 7.141(8), 8.6		

DS3 (3h) : Ex1 : Somme de la SE des $x^n/(4n^2-1)$ (E3A PSI 2008 ; 5Q) ;
Ex2 : $\det(H-Cbar)$ est réel (CCINP PSI 2021, début du Pb 2, modifier ; 6Q) ;
Ex3 : équation de Bessel ; inverse d'une SE (CCINP PSI 2018 Pb 1, partie II ; 9Q) ;
Ex4 : suites (u_n) telles que la série des a_{nu} converge (Centrale PSI 2009 maths 1, Extraits de la partie II ; 12 Q)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mer. 4 déc.	Exemple fondamental des matrices de projecteur ou de symétrie. Caractérisation d'une matrice $n \times n$ diagonalisable par l'une des propriétés suivantes : - elle est semblable à une matrice diagonale (c'est la définition) - il existe une base de $M_{\mathbb{C}}(n, \mathbb{C})$ formée de vecteurs propres (cas particulier de la caractérisation générale de deux matrices semblables) - les sous-espaces propres sont supplémentaires dans $M_{\mathbb{C}}(n, \mathbb{C})$; - la somme des dimensions des sous-espaces propres est (supérieure ou) égale à n ; - le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous-espace propres est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. - il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (thm admis pour l'instant ; la preuve sera faite pour les endomorphismes). - le polynôme scindé à racines simples dont les racines sont les valeurs propres est annulateur de A Conditions suffisantes de diagonalisabilité : - il y a n valeurs propres distinctes (pour une matrice d'ordre n) — et alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. - on a déjà trouvé (astucieusement) p valeurs propres distinctes telles que la somme des dimensions des p sous-espaces propres correspondants atteint n — et alors il n'y a pas d'autres valeurs propres et les minorations trouvées pour les dimensions des sous-espaces propres sont des égalités. Exemples classiques (non exigibles au programme, mais qu'il est vivement recommandé de connaître ; vus en classe) : matrice peine de 1, matrices nilpotentes, matrices triangulaires avec des coefficients diagonaux distincts, matrice qui possède une seule valeur propre (3 preuves)				
ven. 6 déc.	Définition d'un endomorphisme diagonalisable ; extension aux endomorphismes des théorèmes sur les matrices. Tout endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est lui aussi diagonalisable. !!! à cette date, ne sont pas encore au programme : * théorème spectral * théorème de Cayley-Hamilton * trigonalisation * applications classiques de la réduction (calcul de A^n, récurrences linéaires, etc.)	8.85, 8.88			
lun. 9 déc.	Théorème spectral (énoncé pour les endomorphismes, et énoncé pour les matrices)	8.117(1)			
mar. 10 déc.	Théorème de Cayley-Hamilton (admis). N.B. : le polynôme minimal est hors programme. Trigonalisabilité et trigonalisation : définition pour une matrice ou un endomorphisme ; une matrice ou un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	8.134	8.22, 8.36(6), 8.40, 8.52, 8.65,		
mer. 11 déc.	<i>Commentaire du programme : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication » (vu en classe : le cas où la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n-1$ en dimension $n=2$ ou $n=3$)</i> Applications classiques de la réduction (aucun résultat à connaître au programme ; tout est à redémontrer à chaque fois) : - calcul de A^k ;	8.128(1,3,2)			
ven. 13 déc.	Compléments HORS PROGRAMME EN PC* (aucune définition et aucun résultat à connaître ; tout résultat utilisé doit être redémontré) : - calcul du terme général de certaines suites récurrentes - étudier si deux matrices sont semblables en les réduisant N.B. : la résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants n'est plus au programme, - trouver des matrices X telles que $X^2=A$ (A donnée) - quelques résultats sur les matrices symétriques, antisymétriques, de projecteurs, de symétries, de rang 1 (écrit dans le poly, non vus en classe) ----- Matrices symétriques positives et définies positives; endomorphismes autoadjoints positifs/définis positifs. Seule la définition est à connaître (par le signe des valeurs propres de M ou par le signe de $X^T M X$).				
lun. 16 déc.					
mar. 17 déc.			Prévision : 8.79, 8.96, 8.117(2)	Sujet standard : matrice nilpotentes (31Q) ; Sujet Bis : matrices quasi-nilpotentes (21Q)	
mer. 18 déc.					
ven. 20 déc.					
lun. 23 déc.					
mar. 24 déc.					
mer. 25 déc.					
ven. 27 déc.					
lun. 30 déc.					
mar. 31 déc.					
mer. 1 janv.					
ven. 3 janv.					
lun. 6 janv.					
mar. 7 janv.					

DS4 (4h) : Ex 1 : Résolution algébrique d'une équation linéaire d'ordre 4 (10Q) Ex2 : matrices d'Hadamard (18) Pb 3 : déterminants de Gram et de Hankel, polynômes, intégrales impropres et espace euclidien (parties II et III de Centrale-1 PC 2021 modifiées : 17Q)