

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
lun. 26 août					
mar. 27 août					
mer. 28 août					
ven. 30 août					
lun. 2 sept.	<p>Accueil des élèves (1h) <i>Présentation de l'organisation en mathématiques et séance d'exercices 2h (sans préparation)</i></p> <p><i>Remarque sur les exemples du cours :</i>  * les « exemples fondamentaux » du cours sont tous à connaître (font explicitement partie du programme) ;  * les « exemples classiques » du cours ne sont pas écrits dans le programme, mais reviennent souvent ; si possible, il vaut mieux les connaître ;  * les « exemples pathologiques » du cours illustrent le fait qu'une propriété ne marche pas (réciproque ou absence d'une hypothèse d'un théorème par exemple) — ils ne font pas partie du programme, mais les avoir en tête évite de se tromper sur l'énoncé de la propriété correspondante ;  * les « exemples » [tout court] sont juste des illustrations directes (et sans intérêt particulier à être mémorisés) de ce qui est écrit juste avant, pour en aider la compréhension.</p>	1.5, 1.6(3,4,5)		(1.111 ou [1.49 + 1.65 ou 1.100]) + [1.105 ou 1.89]	
mar. 3 sept.	<p><b>Méthodologie (révisions de PCSI en classe inversée)</b></p> <p>Savoir utiliser proprement un théorème.  Utiliser à bon escient les mots de la logique.  Quantificateurs et variables muettes.  Raisonnements logiques classiques.  Savoir rédiger une récurrence (simple, double ou forte)</p> <p><b>Chapitre 1 : Suites et fonctions (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</b></p> <p>Terme général des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrences linéaires d'ordre 2.  Sommes, produits, factorielles, coefficients du binôme. Sommes doubles sur un rectangle ou sur un triangle.  Formules de sommation : somme des <math>n</math>, des <math>n^2</math>, sommes des termes d'une suite géométrique (et variantes), formule du binôme.</p> <p>Maniement des inégalités dans <math>\mathbb{R}</math> : calcul sur les inégalités, suites et fonctions monotones, inéquations, études de signe, fonctions majorées ou bornées. Inégalité des accroissements finis (et l'égalité des AF et le théorème de Rolle) et inégalité de Taylor-Lagrange.</p> <p>Fonctions convexes : caractérisation par la dérivée seconde ; inégalités associées (courbe sous les pentes et au dessus des tangentes).  <b>NB : l'inégalité de Jensen n'est pas au programme.</b></p> <p>Tracé de fonctions, équation de la tangente en un point, méthode d'étude des branches infinies.</p>	1.11(18,21), 1.12(132), 1.19(13, 17)	1.8, 1.10(5,6,7), 1.11(10), 1.21(2)		
mer. 4 sept.	<p>Fonctions usuelles : exp, ln, puissances, sin, cos, tan, sinh, cosh, arcsin, arccos, arctan.  <b>NB : th, argsh, argch et argh ne sont pas au programme</b>  Objectif : connaître l'allure précise des courbes des fonctions et savoir faire le lien (dans les deux sens) avec leurs propriétés analytiques :  définition, ensembles de définitions, valeurs particulières, dérivées, variations, limites, branches infinies.  + révision des formules usuelles de calcul algébrique  <b>À CONNAÎTRE PARFAITEMENT ET SANS HÉSITATION Y COMPRIS (ET SURTOUT) LES DESSINS</b></p> <p>Nombres complexes, formules de trigonométrie, linéarisation, (in)équations trigonométriques.  Exponentielle complexe, forme trigonométrique, résolution de <math>z^n = a</math>.</p>	1.23(6), 1.27, 1.29			
ven. 6 sept.	<p>Polynômes : trinôme du second degré, coefficients, degré, racines, racines multiples, factorisation dans <math>\mathbb{C}[X]</math> ou <math>\mathbb{R}[X]</math>, division euclidienne. Fonctions homographiques.  !!! NE PAS CONFONDRE X et x !!!</p> <p><b>Polynômes de Lagrange : expression explicite à partir des conditions de valeurs au points d'interpolation. Existence et forme des solutions du problème d'interpolation.</b>  <b>NB : le fait que les polynômes de Lagrange forment une base ne sera vu qu'au chapitre d'algèbre linéaire</b></p> <p>Fractions rationnelles : forme de la décomposition en éléments simples — uniquement dans le cas cas où le dénominateur est scindé et à racines simples.  <b>NB : le cas des pôles multiples est hors-programme (à moins de fournir la forme de la décomposition recherchée). La décomposition dans <math>\mathbb{R}</math> qui fait intervenir des irréductibles de degré 2 est, si nécessaire, à guider en partant de celle sur <math>\mathbb{C}</math>.</b></p>	1.34(2,4), 1.46(5,9)			
lun. 9 sept.	<p><b>Chapitre 2 : Calcul des limites (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</b></p> <p>Méthodes algébriques de calcul d'une limite pour les suites et fonctions à valeurs dans <math>\mathbb{R}</math> :  - théorèmes de calcul sur les limites ; caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction  - limites des fonctions usuelles ; continuité ; limite de la suite <math>(a^n)</math> pour <math>a</math> réel ;  - équivalence, prépondérance, domination ; règles de calcul usuelles ;  - résultats usuels : comparaison des puissances en 0 / en l'infini ; croissances comparées de puissances/ exp/ ln ; <b>formule de Stirling (programme de PC ; non démontrée pour l'instant) ;</b>  - développements limités : définition, comment en déduire un équivalent ;  - obtention d'un dl : par la formule de Taylor-Young, par primitivation, par dérivation, par somme, par produit, par composée ;  - Dls usuels à connaître parfaitement (en 0) : <math>\exp(x)</math>, <math>\sin x</math>, <math>\cos x</math>, <math>(1+x)^r</math>, <math>1/(1+x)</math>, <math>\ln(1+x)</math>, <math>\arctan</math>, <math>\tan</math> (ordre 3), <math>\cosh</math>, <math>\sinh</math></p>	1.66(2), 1.74(8,10), 1.82(4)			
mar. 10 sept.	<p>Méthodes analytiques de calcul d'une limite pour les suites et fonctions à valeurs dans <math>\mathbb{R}</math> :  - passage à la limite dans une inégalité large. Obtention d'une inégalité, localement, d'après une inégalité stricte avec la limite.  - théorèmes de limite par encadrement, minoration ou majoration  Théorème d'obtention d'un équivalent par encadrement  - théorème de la limite monotone pour les suites et les fonctions</p> <p>Méthodes d'étude de la limite spécifiques aux suites :  - théorème sur les suites adjacentes  - exemple d'étude des suites définies implicitement par <math>f_n(u_n) = 0</math>  - exemple d'étude des suites récurrentes <math>u_{n+1} = f(u_n)</math> : définition, étude graphique, limites finies possibles...</p> <p>Extension de la notion de convergence aux suites et aux fonctions à valeurs dans <math>\mathbb{C}</math>.  Exemple fondamental de la suite <math>(a^n)</math> : convergence pour <math>a</math> complexe ; limite pour <math>a</math> réel.</p>	2.15, 2.18(9,12,20), 2.20(10,11,20)	1.95, 1.108, 2.8(9,14,15), 2.11	[2.17 ou 2.80] + [2.72 ou 2.65 ou 2.16] + [4 questions parmi : 2.18(17,27) + 2.20(13,19,21,27,28)]	
mer. 11 sept.	<i>séance d'exercices</i>	2.25, 2.38(4,6,15), 2.45(1)			
ven. 13 sept.	<p><b>Chapitre 3 : Calcul différentiel à une variable (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</b></p> <p>Dérivée d'une fonction d'une variable réelle, dérivée à gauche ou à droite, dérivée sur une partie  Dérivées des fonctions usuelles <b>À CONNAÎTRE PARFAITEMENT</b>  !!! NE PAS CONFONDRE f et f(x) !!!</p> <p>Théorème de dérivabilité et dérivée d'une réciproque.  Extension de la dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes.</p> <p>Calculs de dérivées n-ièmes. Formule de Leibniz.</p> <p>Régularité d'une fonction : fonction n fois dérivable et dérivée n-ième, fonction de classe <math>C^n</math>, fonction de classe <math>C</math>-infini, régularité des fonctions usuelles (elles sont <math>C</math>-infini là où elle sont définies, sauf exceptions <b>À CONNAÎTRE PARFAITEMENT</b>)  Théorèmes de calcul sur les fonctions à valeurs réelles ou complexes n fois dérivables, de classe <math>C^n</math>, de classe <math>C</math>-infini : somme, produit, composée. Théorème sur la limite de la dérivée. Application à l'étude de la régularité d'un raccordement ou d'un prolongement de fonctions,  <b>NB : le théorème de prolongement de classe <math>C^n</math> n'est pas au programme (seulement pour <math>n=1</math>, c'est le théorème sur la limite de la dérivée)</b></p> <p><b>PC : extension des notions de convergence/continuité/dérivabilité et dérivée aux fonctions à valeurs dans <math>\mathbb{K}^n</math> ;</b>  Formules de calcul de dérivée pour : <math>u+v</math>, <math>u(\phi(t))</math> avec <math>\phi</math> à valeurs réelles, <math>L(u)</math> avec <math>L</math> linéaire, <math>B(u,v)</math> avec <math>B</math> bilinéaire, <math>M(u_1, \dots, u_p)</math> avec <math>M</math> p-linéaire (admis).</p>	3.20(1)			

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
lun. 16 sept.	<p>Calcul de primitives : primitives usuelles A CONNAÎTRE PARFAITEMENT. Primitive d'une somme, d'une combinaison linéaire ; primitivation par parties, par changement de variable Primitive de certaines fractions rationnelles, notamment <math>1/(x-a)^n</math> et <math>(ax+b)/(x^2+px+q)</math> et fractions rationnelles à dénominateur scindé à racines simples NB : le cas général de la décomposition en élément simple (existence, unicité et méthodes dans le cas général) n'est pas au programme de PC, mais il faut savoir se débrouiller dans les situations simples, et savoir trouver les coefficients d'une forme proposée NB : les révisions sur les intégrales seront effectuées à l'occasion d'un chapitre ultérieur NB : les règles de Bioche ne sont plus au programme de CPGE (depuis fort longtemps...)</p> <p>Vocabulaire des équations différentielles de PCSI (savoir reconnaître et nommer chaque type d'équation au programme). Exemples de changement de fonction inconnue. Principe général de résolution des équations linéaires. Résolution des équations différentielles linéaires : <math>y'-a(x)y=b(x)</math> ; <math>y''+ay'+by=0</math> ; <math>y''+ay'+by=exp(mx)</math> ; <math>y''+ay'+by=B \cos(\omega x)</math> ou <math>B \sin(\omega x)</math>. À SAVOIR FAIRE PARFAITEMENT. NB : pour les équations d'ordre deux, les seconds membres de la forme <math>P(x)exp(mx)</math>, <math>P(x) \cos(\omega x)</math> ou <math>P(x)\sin(\omega x)</math> avec P polynôme non constant ne sont pas au programme.</p> <p>Exemples de résolution d'équation par changement de fonction inconnue.</p> <p>Unicité de la solution d'un problème de Cauchy associé aux types d'équations <math>y'-a(x)y=b(x)</math> ; <math>y''+ay'+by=f(x)</math> où a et b sont des constantes [résultat admis]. NB : le cas d'ordre deux où a et b sont des fonctions n'est plus au programme. NB : les équations vectorielles <math>Y'+A(x)Y=B(x)</math> [Y et B à valeurs dans <math>\mathbb{R}^n</math>, A(x) matrice carrée] ne sont plus au programme Ni le théorème de Cauchy-Lipschitz associé (existence et unicité de la solution d'un pb de Cauchy associé).</p> <p>NB : les résultats sur l'étude des équations différentielles <math>y''+a(x)y'+b(x)y=0</math> ne sont plus au programme (théorème de structure de l'ensemble des solutions, wronskien, méthode de variations DES constantes) — mais la méthode de variation de LA constante peut être envisagée si le changement de fonction inconnue est donné ! NB : les équations autonomes ne sont pas au programme.</p>		2.73(1,2), 3.8,3.11(2),3.20 (2,3), 3.22(6), 3.24		
mar. 17 sept.	séance d'exercices	3.27(2,4,7), 3.29		3.34 ou ([3.4 ou 3.5] + [3.44 ou 3.47])	
mer. 18 sept.	<p><b>Chapitre 4 : Intégration (révisions de PCSI rapidement en classe et extensions de PC)</b></p> <p>Rappel de PCSI : théorème fondamental de l'analyse (lien primitive/intégrale) ; calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide d'une primitive. REVOIR LE CALCUL DE PRIMITIVES. !!! NE PAS CONFONDRE PRIMITIVE ET INTÉGRALE !!!</p> <p>Fonctions continues par morceaux sur un segment NB : la classe <math>C^n</math> par morceaux n'est pas au programme pour <math>n&gt;0</math> Extension de l'intégration aux fonctions continues par morceaux sur un segment.</p> <p>Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque (i.e. continue par morceau sur tout segment contenu dans l'intervalle — c'est exactement ce qui suffit pour définir les intégrales impropres).</p> <p>Définition de l'intégrale impropre sur un intervalle semi-ouvert ; sur un intervalle ouvert. Remarque : le programme de PC/PC* n'envisage pas l'intégration de fonctions qui ne seraient pas, au minimum, continues par morceaux sur l'intervalle ouvert délimité par les bornes de l'intégrale. Exemples fondamentaux À CONNAÎTRE : <math>1/x^r</math> sur <math>]0,1[</math>, <math>1/x^r</math> sur <math>]1,+\infty[</math>, <math>exp(-rx)</math> sur <math>]0,+\infty[</math>, <math>\ln x</math> sur <math>]0,1[</math>, fonctions constantes.</p>				
ven. 20 sept.	<p>Linéarité de l'intégration ; relation de Chasles ; cas des intégrales impropres.</p> <p>Intégration par parties pour des fonctions de classe <math>C^1</math> ; pour des intégrales impropres la convergence de <math>[\underline{u}]_a^b</math> assure que les deux intégrales sont de même nature. Sinon revenir à des intégrales partielles puis étudier la convergence de chaque terme.</p> <p>Formule de Taylor avec reste intégrale sur un segment. REVOIR : inégalité de Taylor-Lagrange et formule de Taylor-Young</p>	4.12(1,2,8)			
lun. 23 sept.	<p>Changement de variable dans une intégrale sur un segment ; extension au cas d'une intégrale impropre de fonctions continues (avec un changement de variable <math>C^1</math> strictement monotone bijectif entre les deux intervalles d'intégration). Dans le cas sur un segment, c'est une formule de calcul ; dans le cas impropre c'est un théorème dont l'emploi doit être justifié proprement. Exemples fondamentaux À CONNAÎTRE : les changements de variables affines sont licites dans les intégrales impropres.</p> <p>Propriétés analytiques de l'intégration : * positivité ; * croissance ; * inégalité triangulaire (pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes) ; * une fonction continue, positive, d'intégrale nulle est la fonction nulle. * inégalité de Cauchy-Schwarz (pour les fonctions continues à valeurs réelles — NB : le cas d'égalité ne sera abordé que dans le cadre du cours d'analyse dans les EVN). Faire attention que les bornes soient bien dans le sens croissant. Cas des intégrales impropres (il faut d'abord que tout converge).</p>	4.16(1)	3.36(10,16,20,2 9), 3.37(7), 3.43,3.58(3)		
mar. 24 sept.	<p>Méthode d'encadrement d'une somme par des intégrales (ou d'une intégrale par des sommes).</p> <p>Convergence d'une intégrale impropre sans calcul de primitive : * intégrales faussement impropres ; * théorème de comparaison globale (par majoration sur tout l'intervalle) pour les intégrales impropres de fonctions POSITIVES.</p>	4.42(1,4)		[[4.11 ou 4.7] + [4.17 ou 4.29] + [3 question parmi : 4.12(9,10,11,12) + 4.13(2,3,6)]] ou 4.34	
mer. 25 sept.	<p>Cours 1h * théorème de comparaison locale (par majoration locale, équivalent, petit « o », grand « O ») pour les intégrales impropres de fonctions POSITIVES. → pour une intégrale impropre : vocabulaire de la convergence ou la divergence en une de ses bornes NB : la règle « <math>x^\alpha f(x)</math> » de Riemann n'est pas au programme ; il faut la redémontrer à chaque fois, dans le cas particulier étudié — avec un théorème de comparaison.</p> <p>Exercices : 1h</p>	4.21(13,21)			
ven. 27 sept.	<p>Cours 1h Exemple classique de la fonction Gamma (aucune connaissance n'est exigible ; toute affirmation doit être redémontrée).</p> <p>Intégrales absolument convergentes ; toute intégrale absolument convergente est convergente ; la réciproque est fautive (contre-exemple classique de l'intégrale de Dirichlet : vu en classe mais aucune connaissance dessus n'est exigible)</p> <p>Rendu DS1 1h</p>				
lun. 30 sept.	Cours déplacé au mardi 1/10 (DS informatique)				

DS 1 : Ex 1 : calcul du tg d'une suite définie par récurrence forte via une suite de polynômes (50) ; Ex 2 : caractérisation des fonctions affines/concaves par le milieu (100) ; Ex 3 : dériv asymptotique d'une suite récurrente avec trigonométrie (40) ; Ex 4 : Expression de  $\sinh x$  comme un produit infini ; avec des polynômes (90) ; Ex 5 : limite autour d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 (30)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mar. 1 oct.	<p>Fonctions intégrables (<math>\mathcal{L}^1</math> ; notation qui est au programme), stabilité par somme, produit par un scalaire . Expression des théorèmes de comparaison avec l'intégrabilité. → pour une fonction : vocabulaire de l'intégrabilité en un point. NB : les fonctions de carré intégrable ne sont plus au programme</p> <p>Exemples de fonctions définies par une intégrale de la forme : <math>x \rightarrow \int_a^x u(x) \cdot v(x) f(t) dt</math> (x dans les bornes) Exemples de fonctions définies par une intégrale (éventuellement impropre) de la forme : <math>x \rightarrow \int_a^b f(x,t) dt</math> (x dans la fonction qu'on intègre).</p> <p>Cours de 13h à 15h</p> <p><b>Chapitre 5 : Séries (révisions de PCSI rapidement en classe et extensions de PC)</b></p> <p>Rappels de PCSI : vocabulaire de base sur les séries : terme général, sommes partielles, série, convergence ou divergence (nature), somme d'une série convergente. Utilisation de formules de télescopage. Divergence grossière d'une série.</p> <p>Rappels de PCSI : exemple fondamental À CONNAÎTRE PARFAITEMENT : - série géométrique (condition nécessaire et suffisante de convergence et formule de sommation — à partir de l'entier p)</p> <p>Rappels de PCSI : relation de Chasles. Opérations sur les séries et éventuellement leurs sommes (en cas de convergence) : somme, produit par un scalaire, décalage d'indice, cas des séries lacunaires. Convergence d'une série à termes complexes.</p> <p>Rappels de PCSI : théorèmes de comparaison pour les séries À TERMES POSITIFS : - par majoration ou minoration du terme général ; ou par négligeabilité <math>[o(\cdot)]</math> ou domination <math>[O(\cdot)]</math> - par équivalence du terme général (à rechercher en priorité). Pour une série à terme positifs, le programme autorise les notations : <math>[somme] &lt; +\infty</math> ou <math>[somme] = +\infty</math>.</p> <p>NB : le théorème de comparaison d'une série à une intégrale n'est plus au programme, mais le résultat peut être obtenu par la technique d'encadrement/minoration des sommes partielles d'une série par une intégrale (que le programme demande aux élèves de maîtriser).</p> <p>Rappels de PCSI : exemple fondamental À CONNAÎTRE PARFAITEMENT : - séries de Riemann (convergence si et seulement si <math>\alpha &gt; 1</math>).</p>		4.13(5), 4.16(4,7), 4.24, 4.34(6,16), 4.42(4,14)	[4.54 + 4.37 + 4.80] ou 4.60	
mer. 2 oct.	<p>Règle de d'Alembert pour les séries à termes STRICTEMENT POSITIFS</p> <p>Rappels de PCSI : séries absolument convergentes (définition ; toute série absolument convergente est convergente ; réciproque fautive). Théorèmes de comparaison pour les séries absolument convergentes (par majoration locale de la valeur absolue, équivalent, prépondérance ou domination).</p> <p>Théorème spécial des séries alternées : convergence, majoration et signe du reste.</p> <p>Remarque : tout autre règle de convergence des séries est hors programme (Cauchy, Raabe-Duhamel, etc.)</p>				
ven. 4 oct.	séance d'exercices	4.42(20), 4.47, 4.57			
lun. 7 oct.	Définition du produit de Cauchy de deux séries ; convergence et somme si les deux séries sont absolument convergentes.	5.33(2a,2b)			
mar. 8 oct.	<p>Définition de la convergence simple d'une série de fonctions définies sur un ensemble X.</p> <p>Séries entières : définition.</p> <p>Rayon de convergence R : définition [comme la borne supérieure des <math>r \geq 0</math> tels que la suite <math>(a_n r^n)</math> est bornée], théorème de caractérisation : c'est l'unique <math>R</math> tq : il y a [divergence grossière si <math> z  &gt; R</math> et convergence absolue si <math> z  &lt; R</math>]. → on peut remplacer la convergence absolue par : la série converge OU le <math>tg</math> tend vers 0 OU le <math>tg</math> est borné (et analogue pour le <math>dv</math> grossière)</p> <p>Calcul direct lorsque <math>a_n \neq 0</math> et la <math>(n+1)/a_n</math> converge (règle de d'Alembert pour les séries entières)</p> <p>Théorèmes de comparaison pour les séries entières : si <math> a_n  \sim  b_n </math>, alors <math>R_a = R_b</math> ; si <math> a_n  \ll  b_n </math> ou <math>a_n = o(b_n)</math> ou <math>a_n = O(b_n)</math>, alors <math>R_a \geq R_b</math> (attention à l'inversion du sens de l'inégalité).</p>	5.42	4.64, 5.1(6,12,20,34), 5.12(4,9)	[5.24 + 5.27] ou [5.37 + 5.38]	
mer. 9 oct.	<p>Opérations sur les séries entières : sommes, produit par un scalaire, substitutions simples sur la variable.</p> <p>Théorèmes d'intégration terme à terme et de dérivabilité d'une série entière sur <math>] -R, R[</math> (en admettant – provisoirement – la continuité de sa somme).</p> <p>NB : le théorème d'Abel n'est pas au programme [si une série entière converge en <math>R</math> (resp. <math>-R</math>) alors la somme de la série entière est continue en <math>R</math> (resp. <math>-R</math>)].</p> <p>Théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur <math>] -R, R[</math></p>				
ven. 11 oct.	<p>Produit de Cauchy de séries entières.</p> <p>Fonctions développables en série entière. Opérations sur les fonctions développables en série entière (somme, produit par un scalaire, composée par <math>x \rightarrow x^q</math> ou <math>x \rightarrow kx</math>, produit, dérivée, primitive).</p> <p>NB : seuls sont au programme les DSE en 0 (en puissances de <math>x</math> ou <math>z</math>).</p> <p>Série de Taylor d'une fonction C-infini.</p> <p>Recherche des solutions développables en série entière d'une équation différentielle.</p> <p>Développements en série entière À CONNAÎTRE : <math>\exp(z)</math>, <math>z^p/(1-z)</math>, <math>\ln(1+x)</math>, <math>\arctan x</math> ainsi qu'un domaine de validité (donné par le rayon de la SE).</p> <p><b>!! A cette date !! ne sont pas encore au programme : unicité du DSE ; DSE de <math>(1+x)^r</math>, de <math>\sin</math>, <math>\cos</math>, <math>\cosh</math>, <math>\sinh</math> ; sommation de certaines séries entières</b></p>				
lun. 14 oct.	<p>Développements en série entière À CONNAÎTRE : <math>\sin(x)</math>, <math>\cos(x)</math>, <math>\cosh(x)</math>, <math>\sinh(x)</math>, <math>(1+x)^r</math> ainsi qu'un domaine de validité (donné par le rayon de la SE).</p> <p>Exemple d'utilisation de séries entières pour montrer qu'une fonction est de classe C-infini (<math>x \rightarrow 1/x \cdot \arctan x</math> ; prolongée par 1 en 0).</p>				
mar. 15 oct.	<p><b>Chapitre 6 : Vocabulaire et calculs algébriques (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</b></p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss ; méthode de Gauss-Jordan Calcul matriciel : - opérations : somme, produit par un scalaire, produit, transposée, puissance, - matrices particulières (A CONNAÎTRE) : diagonale, triangulaire, symétrique, antisymétrique, de symétrie, de projecteur, nilpotente, orthogonale, de rotation - produits, puissances, inversibilité et inverse --&gt; CONNAÎTRE les différentes méthodes classiques</p> <p>PC : Produit de matrices par bloc, matrices diagonales par blocs, matrices triangulaire par blocs PC : Produit de matrices par blocs, matrices diagonales par blocs, matrices triangulaire par blocs PC : matrices orthogonales, matrices de rotations ; notation <math>O(n)</math> et <math>SO(n)</math> ; description explicite de <math>SO(2)</math>.</p> <p>Séance d'exercices 40 min</p>	5.33(2C), 5.40(1)	5.12(14), 5.20, 5.21(4,5), 5.21(2,5), 5.26(1)	5.90	

DS 2 : (4h) Ex1 : étude d'une primitive de  $(1+x^2)^{-1/2}$  (Extraits de E3A PC 2011 ; 5 Q) ; Ex2 : calcul d'intégrales impropres dont  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$  (E3A PC 2015 ; épreuve 1, Exercice 2 ; 13Q) ; Ex3 : vitesse de convergence d'une suite réelle (extraits de Centrale PC 2017 ; 11 Q) ; Ex4 : calcul de  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > na)$  avec X de loi Exponentielle --- reformulé sans probabilités (7 Q)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mer. 16 oct.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Déterminant d'une matrice (existence et unicité admises) : formule de développement selon une ligne ou une colonne, effet des opérations sur les lignes ou les colonnes, déterminant d'un produit et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le déterminant, déterminant 1x1, 2x2, 3x3 (Sarrus), déterminant d'une matrice triangulaire, déterminant de la transposée.</p> <p>Séance d'exercices 1h40</p> <p>PC : polynômes de matrice (substitution de X par A); utilisation d'un polynôme annulateur pour le calcul des puissances successives ou pour étudier l'inversibilité. Puissances (ou polynôme) d'une matrice diagonale (ou triangulaire) par blocs.</p>	5.40(1',2), 5.44, 5.48(5,6,7,11,14)			
ven. 18 oct.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR le vocabulaire algébrique : - Fonctions partielles d'une fonction de plusieurs variables ; - savoir exprimer, nommer et reconnaître les propriétés des opérations algébriques (associativité, commutation et commutativité, distributivité, élément neutre, inversibilité et inverse) ; - savoir pour les ensembles usuels (fonctions, matrices notamment) et leurs opérations usuelles (somme, produit...) si ces propriétés sont vraies ou fausses ; - faire attention à la propriété de simplification « <math>ab=ac \Rightarrow b=c</math> » et à la propriété « <math>ab=0</math> ssi <math>a=0</math> ou <math>b=0</math> » qui sont souvent fausses ; connaître les cas usuels où c'est vrai quand même. - image directe ou réciproque d'une partie par une fonction.</p> <p><b>!! A cette date !! n'est encore au programme de colles : formules de déterminant par blocs, déterminant de Vandermonde, stabilité d'une partie par une fonction ou une opération</b></p> <p>Prepdu DS2 (40min)</p>				
lun. 21 oct.					
mar. 22 oct.					
mer. 23 oct.					
ven. 25 oct.					
lun. 28 oct.					
mar. 29 oct.					
mer. 30 oct.					
ven. 1 nov.					
lun. 4 nov.	<p>COURS DE PC : - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, déterminant de Vandermonde. <b>NB : les formules de Cramer ne sont pas au programme.</b> - Trace d'une matrice : définition, linéarité, trace de la transposée, trace d'un produit.</p>	6.82			
mar. 5 nov.	<p>COURS DE PC : - stabilité d'une partie par une fonction ou par une opération</p> <p>EXEMPLES À CONNAÎTRE : stabilité ou non des ensembles de matrices usuels (scalaires, diagonales, triangulaires sup, symétriques, antisymétriques, inversibles, orthogonales) par somme, produit par un scalaire, produit, inverse, transposition ; Formules d'inverse d'un produit ou de la transposée.</p> <p>EXEMPLES À CONNAÎTRE : stabilité ou non des ensembles usuels de fonctions (polynomiales, développables en série entière, n fois dérivables, <math>C^n</math>, <math>C</math> infini, <math>C_{\text{mor}}</math>, intégrables) par somme, produit par un scalaire, produit (sauf pour intégrables), composée (sauf pour <math>C_{\text{mor}}</math>, intégrables et DSE), dérivation (pour certains, mais pas pour d'autres) ; → revoir et connaître les définitions de ces ensembles et savoir quels sont les théorèmes qui expriment ces stabilités</p> <p><b>NB : groupes, anneaux et corps ne sont pas au programme. Les relations d'équivalence ne sont pas au programme.</b></p>		5.49(6), 5.56(3,6,8,14,20), 5.63	(5.61 ou 5.66) + [5.73 ou (5.54 + 5.64)]	
mer. 6 nov.	Séance d'exercices	5.72(4,6,7,10,12), 6.11			
ven. 8 nov.	<p><b>Chapitre 7 : Algèbre linéaire (révisions de PCSI en classe inversée et compléments de PC)</b></p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Espaces vectoriels; sous-espaces vectoriels ; exemples de sous-espaces vectoriels de matrices, de suites, de polynômes, de fonctions (À CONNAÎTRE) ; intersection et espace engendré. Méthodes d'étude de l'inclusion ou de l'égalité de deux sous-espaces vectoriels.</p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Applications linéaires. EXEMPLES À CONNAÎTRE : application linéaire canoniquement associée à une matrice ; évaluation en un point, composition à droite par une fonction donnée, dérivation, substitution, transposition, intégration, applications partielles d'un produit. Opérations sur les applications linéaires ; ; noyau et image d'une application linéaire et le lien avec l'injectivité et la surjectivité. Formes linéaire et hyperplans (=noyau d'une forme linéaire)</p> <p>COURS DE PC : polynômes d'endomorphismes Stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme</p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Résolution d'un « problème » (=équation) linéaire ; Exemples (À CONNAÎTRE) : suites arithmético-géométriques, équations différentielles linéaires, systèmes linéaire avec second membre, interpolation de Lagrange</p> <p>Séance d'exercices 1h</p>	6.29(2)			
lun. 11 nov.					
mar. 12 nov.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Applications bilinéaire. Produits scalaires ; exemples (À CONNAÎTRE) : <math>K^n</math>, <math>M_n(K)</math>, <math>C([a,b], \mathbb{R})</math> <b>NB : l'extension à l'espace des fonctions définies sur un intervalle quelconque, continues et de carré intégrable n'est plus au programme.</b> <b>NB : seuls sont au programme les produits scalaires sur les espaces vectoriels réels ; les produits scalaires hermitiens ne sont pas au programme.</b> Orthogonalité ; de deux vecteurs, de deux parties ; famille orthogonale ; orthogonal d'une partie. Norme préhilbertienne ; propriétés usuelles de norme ; norme au carré d'une somme ; formules de polarisation. REMARQUE : l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire ont été vues en PCSI mais elles ne seront revues et exploitées qu'à l'occasion du cours de topologie,</p>	6.20	6.34, 6.37, 6.49, 6.51, 6.56(3)	(6.45 ou 6.55) + (6.89 ou 6.72) + 6.73	
mer. 13 nov.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Familles libre, génératrices, bases ; exemples fondamentaux (À CONNAÎTRE). <b>NB : les familles infinies ne sont pas au programme</b> COURS DE PC : les <math>n+1</math> polynômes de Lagrange forment une base de <math>K_n[X]</math></p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Dimension ; exemples fondamentaux (À CONNAÎTRE) Méthodes pour trouver une base (extraction, complétion, dimension...) Savoir trouver une base de <math>\ker A</math> et de <math>\text{Im } A</math> (où <math>A</math> est une matrice) --- A SAVOIR FAIRE IMPÉRATIVEMENT Familles de vecteurs dans les espaces préhilbertiens. Orthonormalisation de Gram-Schmidt (FORMULES À CONNAÎTRE).</p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Rang (d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice, d'un système linéaire) ; théorème du rang, une matrice et sa transposée ont le même rang (admis) . Caractérisations des isomorphismes en dimension finie.</p>	6.56(9), 6.66, 6.87(1)			

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
ven. 15 nov.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Coordonnées d'un ou plusieurs vecteurs dans une base, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale (espace euclidien) ; caractérisation d'une base par l'inversibilité de la matrice des coordonnées ; matrice de passage ; COURS DE PC : dans un espace euclidien de dimension <math>n</math>, une famille de <math>n</math> vecteurs est une base orthonormale si et seulement si la matrice de ses coordonnées dans une b.o.n. est une matrice orthogonale.</p> <p>Matrice d'une application linéaire dans deux bases ou d'un endomorphisme dans une base. Formules de changement de base(s) pour un vecteur, pour un endomorphisme, ou pour une application linéaire. Calcul du noyau et/ou de l'image d'une application linéaire en calculant le noyau ou l'image de sa matrice dans des bases (ne pas confondre les vecteurs et leurs coordonnées). ATTENTION : les mots « canonique » et « canoniquement » ne doivent être utilisés que pour des EV où il y a une base canonique (<math>K^n</math>, <math>M_{n,p}(K)</math> ou <math>K_n[X]</math> — et c'est tout !)</p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.</p> <p>COURS DE PC : Trace d'un endomorphisme.</p> <p>COURS DE PC : Un sev est stable par un endomorphisme si et seulement si la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure par blocs dans une base adaptée.</p> <p><b>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme : matrices semblables ; sommes de SEV ; projections, symétries et autres endomorphismes particuliers</b></p>	7.98(2,4)			
lun. 18 nov.	<p>COURS DE PC (extension à <math>n</math> quelconque des notions vues en PCSI pour <math>n=2</math>) : somme de <math>n</math> sous-espace vectoriels, famille de <math>n</math> sous-espace vectoriels en somme directe ; sous-espaces supplémentaires ; caractérisations À CONNAÎTRE (par la définition, par les familles de vecteurs, ...</p>				
mar. 19 nov.	<p>... par la dimension) ; formule de Grassmann.</p> <p>Dans un espace préhilbertien, <math>n</math> sev orthogonaux sont en somme directe</p> <p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : dans un espace préhilbertien <math>E</math>, tout sev <math>E_1</math> de dimension finie possède un unique supplémentaire orthogonal qui est l'orthogonal de <math>E_1</math>. Formule donnant la dimension de l'orthogonal lorsque <math>E</math> est euclidien.</p>		Prévision : 6.87(2,3), 7.4, 7.5(2,5,9,10), 19, 7.10(8)	(7.14 ou 7.33) + (7.77 ou 7.96(3,4,5,6)) + (7.119 ou 7.122)	
mer. 20 nov.	<p>COURS DE PCSI A REVOIR SUR : Projections, symétries, et leurs sous-espaces caractéristiques . Projections orthogonales ; définition (les sous-espaces caractéristiques son orthogonaux) et expression à l'aide d'une b.o.n. de l'espace sur lequel on projette. NE PAS CONFONDRE : une projection / la projection sur ... parallèlement à ... (idem pour les symétries).</p> <p>COURS DE PC : Symétries orthogonales : définition (les sous-espaces caractéristiques son orthogonaux)</p> <p>Endomorphismes autoadjoints et Isométries d'un espace euclidien : définition ; caractérisation matricielle en base orthonormée. N.B. : le programme préconise d'éviter l'ancien vocabulaire d'automorphisme orthogonal (=isométrie) et d'endomorphisme symétrique (=autoadjoint) — avec raison, du fait des autres sens déjà rencontrés des mots « orthogonal » et « autoadjointe ». L'ensemble des isométries est stable par composition et par réciproque (tout isométrie est bijective). N.B. : le vocabulaire de « groupe orthogonal » et la notation <math>O(E)</math> sont au programme, mais la notion de « groupe » est hors-programme. N.B. : l'ensemble des endomorphismes autoadjoints est noté <math>S(E)</math> dans le programme, mais le programme ne précise plus qu'il faut savoir que c'est un sev de <math>L(E)</math></p>				
ven. 22 nov.	<p>Étude des isométries en dimension 2 : * déterminant d'une isométrie ; distinction entre isométrie positive (rotation) et isométrie négative ; * en dimension 2 les matrices de rotation sont déterminées par un angle et elles commutent entre elles ; les matrices d'isométries négatives s'en déduisent par multiplication par <math>S = \text{diag}(1, -1)</math> [et ce sont des matrices de symétries orthogonales] ; * en dimension 2 la matrice d'une rotation en base orthonormée ne change pas si l'on prend une autre base orthonormée de même orientation (i.e le déterminant de l'une dans l'autre vaut 1). * notion d'orientation d'un plan euclidien (choix d'un b.o.n. B particulière) et de base directe (son déterminant dans la base B vaut 1) : un endomorphisme est une rotation si et seulement l'image d'une b.o.n. directe est une b.o.n. directe ; angle d'une rotation. N.B. : les attendus du programme sur ce qui précède sont pas du tout clairs... ! N.B. : pour les matrices la notion de rotation est définie en toute dimension ; mais pour les endomorphismes la définition est réduite à la dimension 2 (!?) N.B. : les spécificités des rotations en dimension 3 (axe, angle) sont hors-programme</p> <p><b>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme :</b></p>	7.141(4), 7.146			
lun. 25 nov.	séance d'exercices	7.13(3), 7.24(3,8,14), 7.26(4), 7.31			
mar. 26 nov.	<p>----- <b>Chapitre 8 : Réduction</b> -----</p> <p>COURS DE PCSI à revoir : Matrices semblables ; deux matrices semblables ont même déterminant et même rang et même trace ; utilisation de la formule de changement de base pour montrer que deux matrices sont semblables.</p>	8.1	7.34(6,7,10), 7.39(5), 7.44, 7.67,	(7.89 + 7.112) ou 7.171	
mer. 27 nov.	<p>Éléments propres d'une matrice. REVOIR IMPÉRATIVEMENT CHAPITRE 1 : cours sur les polynômes</p> <p>Polynôme caractéristique d'une matrice (unitaire par convention) ; multiplicité d'une valeur propre. Lien entre les valeurs propres et la trace ou le déterminant (lorsque le polynôme caractéristique est scindé).</p>	8.12(10), 8.18			
ven. 29 nov.	<p>Méthodes de recherche des valeurs propres d'une matrice : * à l'aide du polynôme caractéristique * cas des matrices triangulaires * La transposée ou une matrice semblable ont le même polynôme caractéristique que la matrice de départ * les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles * Les valeurs propres appartiennent à l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. Exemple des matrices de projecteur ou de symétrie</p> <p>Rendu DS3 (40min)</p> <p><b>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme :</b> * éléments propres d'un endomorphisme * Les sous-espaces propres sont en somme directe. la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité. * diagonalisabilité et diagonalisation d'une matrice ou d'un endomorphisme, trigonalisation , théorème spectral ; * trigonalisation * applications classiques de la réduction (calcul de <math>A^n</math>, récurrences linéaires, systèmes différentiels, etc.)</p>				
lun. 2 déc.	<p>Éléments propres d'un endomorphisme (en toute dimension) ; polynôme caractéristique et multiplicités (en dimension finie). Les sous espaces propres sont en somme directe. En dimension finie, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité.</p>	8.25, 8.36(2)			
mar. 3 déc.	<p>Diagonalisation effective d'une matrice à l'aide d'une base de vecteurs propres. Une matrice est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres vaut <math>M_{n,n}</math>. Dans ce cas, une base de vecteurs propres s'obtient par réunion de bases des sous-espaces propres. Inversement toute base de vecteurs propres est obtenu de cette manière.</p>	8.49	7.78, 7.101, 7.141(8), 8.6	(8.42 ou 8.56) + (8.76 ou 8.92)	

DS3 (3h) : Ex1 : Somme de la SE des  $x^n/(4n^2-1)$  (E3A PSI 2008 ; 5Q) ;  
Ex2 :  $\det(I-C\text{Cbar})$  est réel (CCINP PSI 2021, début du pb 2 modifié ; 6Q) ;  
Ex3 : équation de Bessel ; inverse d'une SE (CCINP PSI 2018 Pb 1, partie II ; 9Q) ;  
Ex4 : suites  $(u_n)$  telles que la série des  $a_{nu_n}$  converge (Centrale PSI 2009 maths 1, Extraits de la partie II ; 12 Q)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mer. 4 déc.	<p>Caractérisation d'une matrice <math>n \times n</math> diagonalisable par l'une des propriétés suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- elle est semblable à une matrice diagonale (c'est la définition)</li> <li>- il existe une base de <math>M_{\mathbb{C}}(n,1)</math> formée de vecteurs propres (cas particulier de la caractérisation générale de deux matrices semblables)</li> <li>- les sous-espaces propres sont supplémentaires dans <math>M_{\mathbb{C}}(n,1)</math> ;</li> <li>- la somme des dimensions des sous-espaces propres est (supérieure ou) égale à <math>n</math> ;</li> <li>- le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.</li> <li>- il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (thm admis pour l'instant ; la preuve sera faite pour les endomorphismes).</li> <li>- Le polynôme scindé à racines simples dont les racines sont les valeurs propres est annulateur de <math>A</math></li> </ul> <p>Conditions suffisantes de diagonalisabilité :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- il y a <math>n</math> valeurs propres distinctes (pour une matrice d'ordre <math>n</math>) — et alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.</li> <li>- on a déjà trouvé (astucieusement) <math>p</math> valeurs propres distinctes telles que la somme des dimensions des <math>p</math> sous-espaces propres correspondants atteint <math>n</math> — et alors il n'y a pas d'autres valeurs propres et les minorations trouvées pour les dimensions des sous-espaces propres sont des égalités.</li> </ul> <p>Exemples classiques (non exigibles au programme, mais qu'il est vivement recommandé de connaître ; vus en classe) : matrice nulle, matrices nilpotentes, matrices triangulaires avec des coefficients diagonaux distincts, matrice qui possède une</p>				
ven. 6 déc.	<p>Définition d'un endomorphisme diagonalisable ; extension aux endomorphismes des théorèmes sur les matrices. Tout endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est lui aussi diagonalisable.</p> <p><b>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* théorème spectral</li> <li>* théorème de Cayley-Hamilton</li> <li>* trigonalisation</li> <li>* applications classiques de la réduction (calcul de <math>A^n</math>, récurrences linéaires, etc.)</li> </ul>	8.85, 8.88			
lun. 9 déc.	Théorème spectral (énoncé pour les endomorphismes, et énoncé pour les matrices)	8.117(1)			
mar. 10 déc.	<p>Théorème de Cayley-Hamilton (admis). N.B. : le polynôme minimal est hors programme.</p> <p>Trigonalisabilité et trigonalisation : définition pour une matrice ou un endomorphisme ; une matrice ou un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.</p>	8.134	8.22, 8.36(6), 8.40, 8.52, 8.65,	8.123 + (8.132 ou 8.145)	
mer. 11 déc.	<p><i>Commentaire du programme : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication » (vu en classe : le cas où la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut <math>n-1</math> en dimension <math>n=2</math> ou <math>n=3</math>)</i></p> <p>Applications classiques de la réduction (aucun résultat à connaître au programme ; tout est à redémontrer à chaque fois) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul de <math>A^k</math> ;</li> </ul>	8.128(1,3,2)			
ven. 13 déc.	<p>Compléments HORS PROGRAMME EN <math>PC^*</math> (aucune définition et aucun résultat à connaître ; tout résultat utilisé doit être redémontré) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul du terme général de certaines suites récurrentes</li> <li>- étudier si deux matrices sont semblables en les réduisant</li> </ul> <p>N.B. : la résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants n'est plus au programme,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- trouver des matrices <math>X</math> telles que <math>X^2=A</math> (<math>A</math> donnée)</li> <li>- quelques résultats sur les matrices symétriques, antisymétriques, de projecteurs, de symétries, de rang 1 (écrit dans le poly, non vus en classe)</li> </ul> <p>Matrices symétriques positives et définies positives; endomorphismes autoadjoints positifs/définis positifs. Seule la définition est à connaître (par le signe des valeurs propres de <math>M</math> ou par le signe de <math>X^T M X</math>).</p>				
lun. 16 déc.	<p><b>Chap. 9 : Probabilités (révisions de PCSI et extension du cadre de PC)</b></p> <p>RAPPELS DE PCSI sur les opérations sur les ensembles : réunion, intersection, complémentaire, différence ; propriétés (distributivités et lois de Morgan).</p> <p>RAPPELS DE DÉNOMBREMENT PCSI : <math>p</math>-listes=<math>p</math>-uplets ; arrangements ; permutations ; combinaison (définition ; leur nombre ; illustration sur le cas des tirages dans une urne). Lemme des bergers (visualisé sur un arbre).</p> <p>Notions d'ensemble fini, de son cardinal, d'ensemble infini, d'ensemble dénombrable, d'ensemble au plus dénombrable. Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable l'est aussi. Le produit cartésien de deux ou d'un nombre fini d'ensembles dénombrables l'est aussi. Commentaire du programme : « l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble est hors programme »</p> <p>Sommation d'une famille au plus dénombrable de nombres positifs ou <math>+\infty</math> (définition et propriétés élémentaires ; tout est admis). La somme vaut <math>+\infty</math> si la série diverge ou si un des termes vaut <math>+\infty</math>. Notion de famille sommable, de distribution de probabilité (discrète). Somme par paquet et sommes doubles (thm de Fubini) --- admis, à l'usage exclusif des probabilités. COURS DE PC À REVOIR sur les séries (chap. 5).</p>	9.5			
mar. 17 déc.	<p>vocabulaire des probabilités (univers, événements, événement certain, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements [s.c.e.], utilisation du vocabulaire « d'évènement réalisé »).</p> <p>Définition d'une probabilité sur un univers fini et extension aux univers infinis (la sigma-additivité généralise l'additivité). Nécessité et définition de la notion de tribu ; notion d'espace probabilisé. <i>Commentaire du programme : « la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ».</i></p> <p>Vocabulaire usuel des modèles classiques : pièce ou dés truqués ou non, tirage de boules dans une urne, expérience de Bernoulli</p> <p>RAPPELS DE PCSI : définition d'une distribution de probabilité comme famille de nombres positifs de somme 1. La donnée d'une probabilité sur un univers fini se ramène à celle d'une distribution de probabilités. Probabilité uniforme sur un univers fini.</p> <p>Formules de probabilité (rappels de PCSI et extension aux s.c.e. dénombrables en PC)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- probabilité de l'évènement contraire ;</li> <li>- formules de probabilités totales (plusieurs formes) ;</li> <li>- croissance de <math>P</math> ;</li> <li>- continuité croissante et continuité décroissante ;</li> </ul>		8.79, 8.96, 8.117(2)	Sujet standard : matrice nilpotentes (31Q) ; Sujet Bis : matrices quasi-nilpotentes (21Q)	
mer. 18 déc.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- formule du crible pour deux événements (hors programme pour trois événements ou plus).</li> </ul> <p>Définition d'une probabilité conditionnelle ; formule des probabilités composées (pour 2 ou pour <math>n</math> événements).</p> <p>Utilisation d'un arbre pour modéliser une expérience aléatoire complexe ; néanmoins un arbre ne suffit pas justifier un résultat : tout doit être justifié au moyen de formules de probabilité (formules des probabilités composée et totales notamment) qui s'appliquent à des événements définis précisément.</p> <p><u>Indépendance pour deux événements, pour une famille d'événements. Stabilité par complémentaire.</u></p>	9.26, 9.52			

DS4 (4h) : Ex 1 : Résolution algébrique d'une équation linéaire d'ordre 4 (10Q) Ex2 : matrices d'Hadarnard (18) Pb 3 : déterminants de Gram et de Hankel, polynômes, intégrales impropres et espace euclidien (parties II et III de Centrale-1 PC 2021 modifiées ; 17Q)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
ven. 20 déc.	<p>Évènements négligeables, par exemple : « tous les lancers donnent Pile » (dans une suite de lancers de pièce) ; définition du vocabulaire « presque sûrement ». Notion de systèmes quasi-complet d'avènements (la formule des probabilités totales reste valable).</p> <p>MÉTHODOLOGIE (TRÈS IMPORTANT) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* les différentes manières d'aborder le calcul de <math>P(\text{union des } A_i)</math> ---- ou de <math>P(\text{intersection des } A_i)</math> ;</li> <li>* bien rédiger les problèmes de probabilités : <ul style="list-style-type: none"> <li>(1) introduire des évènements simples</li> <li>(2) exprimer l'évènement étudié à l'aide de ces évènements simples</li> <li>(3) calculer sa probabilité en utilisant les formules de probabilités du cours, et seulement elles ; citer leur nom et vérifier leurs hypothèses — incompatibles, indépendants, s.c.e. — s'il y en a</li> </ul> </li> </ul> <p>Formule de probabilité des causes/de Bayes (plusieurs formes ; rappels de PCSI et extension aux s.c.e. dénombrables en PC).</p> <p>Rendu DS4 (1h)</p>				
lun. 23 déc.					
mar. 24 déc.					
mer. 25 déc.					
ven. 27 déc.					
lun. 30 déc.					
mar. 31 déc.					
mer. 1 janv.					
ven. 3 janv.					
lun. 6 janv.	<p><b>Chap.10 : Variables aléatoires</b></p> <p>Extension de la définition de la notion de variable aléatoire (v.a) aux univers quelconques — notion vue en PCSI pour les univers finis ; univers <math>X(\Omega)</math> d'une variable aléatoire ; variable aléatoire indicatrice d'un évènement.</p> <p>NB : le programme ne mentionne plus la notion de fonction de répartition d'une variable aléatoire (évoquée rapidement en classe à titre de complément)</p> <p>Notion de variable aléatoire discrète ; définition de la loi [donné par l'univers <math>X(\Omega)</math> et les <math>P(X=k)</math>] ; loi de <math>Y=\phi(X)</math> à partir de celle de <math>X</math>.</p> <p>NB : le programme indique que les <math>(P(X=k))</math> forment une distribution de probabilité (famille sommable positive de somme 1) mais n'évoque aucune réciproque</p>		8.139, 8.153,9.10, 9.32,9.60		
mar. 7 janv.	<p>Lois discrètes usuelles À CONNAÎTRE PARFAITEMENT (nature des paramètres, définition, contexte où on les reconnaît) : loi (quasi-)certaine , loi uniforme, loi de Bernoulli (notion d'expérience de Bernoulli), loi binomiale (nombre de succès dans une suite de <math>n</math> expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès <math>p</math>), loi géométrique (rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès <math>p</math> ; connaître aussi la fonction de répartition), loi de Poisson.</p> <p>N.B. : la loi hypergéométrique n'est pas au programme.</p>			[9.22 ou 9.24(1,3,5,7)] + [9.48 ou 9.50] + [9.80 ou 9.86]	
mer. 8 janv.	Couples discrets : définition, loi du couple, lois marginales, lois conditionnelles — notion vue en PCSI pour les univers finis.	10.42			
ven. 10 janv.	<p>Exemples de chaîne de Markov (complément hors-programme ; aucun vocabulaire et aucun résultat n'est à connaître)</p> <p>Indépendance de deux variables aléatoires — notion vue en PCSI pour les univers finis.</p> <p>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme : indépendance d'une famille de variables aléatoires, espérance, inégalités probabilistes</p>				
lun. 13 janv.	<p>Indépendance d'une famille de variables aléatoires ; lemme des coalitions — notion vue en PCSI pour les univers finis.</p> <p>Exemples de calcul de la loi de <math>u(X,Y)</math>.</p> <p>Théorèmes de stabilité sur les lois binomiales (i.e. loi de la somme de telles variables indépendantes).</p> <p>N. B. : le programme ne mentionne plus explicitement les théorèmes de stabilité pour les lois binomiales ou de Poisson (évoquées en classe), mais pour la loi binomiale il se déduit de la loi de Bernoulli, et pour la Loi de Poisson il s'obtient par calcul ou s'obtiendra rapidement comme application directe des fonctions génératrices.</p>				
mar. 14 janv.	<p>Extension de la notion de famille sommable et de leur sommation aux famille au plus dénombrables de nombres réels ou complexes dont la série converge absolument selon une numérotation (et c'est alors vrai pour toute numérotation sans modification de la somme ; résultat admis). Résultats admis : linéarité de la sommation des famille sommables ; théorème de sommabilité d'une famille par domination ; sommation par paquets ; théorème de Fubini pour les sommes doubles.</p> <p>N. B. : le programme précise « Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste. » Rappel : pour les familles de nombres positifs la somme est toujours définie quitte à valoir +infini (on peut calculer toute somme et conclure seulement à la fin qu'elle est convergente).</p> <p>Espérance : définition pour une variable discrète ; pour une variable aléatoire à valeurs positives ou +infini telle que la famille de <math>kP(X=k)</math> n'est pas sommable, on peut noter <math>E(X)=+\infty</math> ; espérance des lois usuelles À CONNAÎTRE PARFAITEMENT ; théorème de transfert ;</p> <p>théorème de transfert pour un couple.</p>	10.111(3)	9.77, 10.25, 10.41, 10.43(3), 10.54(3)	[10.8 ou 10.9] + [10.45 ou 10.58] + 10.70	
mer. 15 janv.	<p>Linéarité de l'espérance ; espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.</p> <p>Si <math>X</math> est valeur dans <math>\mathbb{N} \cup \{+\infty\}</math>, alors <math>E(X)</math> est la somme de <math>P(X \geq k)</math> de <math>k=1</math> à <math>+\infty</math> (peut valoir +infini).</p> <p>Théorème d'existence d'une espérance par majoration.</p> <p>En particulier :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* si <math>X</math> est bornée ps alors <math>E(X)</math> existe</li> <li>* si <math>X^2</math> et <math>Y^2</math> admettent une espérance, alors <math>XY</math> aussi</li> <li>* si <math>X^2</math> existe, alors <math>E(X)</math> existe ;</li> <li>* <math>E(aX^2+bX+c)</math> existe si et seulement si <math>E(X^2)</math> existe (<math>a \neq 0</math>) ;</li> </ul>	10.115, 10.116(1)			
ven. 17 janv.	<p>Variance, écart-type, covariance ; notions de variable centrée et de variable réduite ; formules de Koenig-Huygens pour la variance et pour la covariance. Deux v.a. Indépendantes ont une corrélation nulle ; réciproque fausse. Variance d'une somme ; cas particulier de variables indépendantes.</p> <p>Variances des lois usuelles <math>[B(p) - B(n,p) - G(p) - P(\lambda)]</math> — À CONNAÎTRE.</p> <p>N.B. : la corrélation n'est plus au programme</p> <p>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme : fonctions génératrices, inégalités probabilistes ; loi faible des grands nombres</p>				
lun. 20 janv.	séance d'exercices	10.136, 10.139(2a)			

: diagonalisation  
séries (lancers  
5 : loi et espérance  
ingérées dans l'ordre  
mention finie EX 2 :  
sans la fin ; 15Q)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
mar. 21 janv.	Fonction génératrice G d'une variable discrète X à valeurs dans N ; elle est toujours définie au moins sur [-1,1] ; à savoir retrouver pour les lois usuelles $[B(p) - B(n,p) - G(p) - P(\lambda)]$ . La fonction génératrice caractérise la loi ; deux v.a. ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction génératrice. La v.a. X admet une espérance si et seulement si G dérivable en 1, et alors $G'(1)=E(X)$ [et c'est bien le cas si $R>1$ — R = rayon de convergence] ; la v.a. X admet une variance si et seulement si G est deux fois dérivable en 1 et alors $G''(1)=E(X(X-1))$ (ce qui permet de calculer $V(X) \rightarrow$ savoir le faire). Série génératrice de la somme de deux v.a. indépendantes ; et extension à n v.a. indépendantes		10.65, 10.85, 10.111(5)	deux exercices de probabilité parmi trois : Ex I : calcul d'espérance/variance dans un jeu aléatoire fini ; Ex II : expression comme intégrale impropre de l'espérance de la valeur absolue d'une somme de v.a. de Rademacher ; Ex III : expression comme intégrale impropre de l'espérance du minimum de variables uniformes iid	
mer. 22 janv.	Positivité et croissance de l'espérance. Une v.a. positive et d'espérance nulle est nulle presque sûrement Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebichef. Inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ . Cas d'égalité.	10.157, 10.158			
ven. 24 janv.	Loi faible des grands nombres. Remarque : toutes les notions de convergence d'une suite de variables aléatoires sont hors-programme (convergence en loi, convergence en probabilité, convergence presque sûrement, etc)	10.170, 10.177			
lun. 27 janv.	cours déplacé au mardi 28/1 de 10h à 12h				
mar. 28 janv.	<b>Chapitre 11 : Analyse et topologie dans les espaces vectoriels normés</b> Rappels de PCSI sur la borne supérieure/inférieure et le maximum/minimum d'une fonction à valeurs réelles (à savoir adapter pour le cas d'une partie de IR). Théorème de la borne supérieure. Toute partie de N a un minimum ; toute partie majorée de R a un maximum. Toute partie finie de R a un maximum. Toute fonction (à valeurs réelles) continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Plusieurs (in)égalités portant sur sup (resp. inf) on été vues en cours, mais il faut savoir les redémontrer en utilisant : $\sup \{f(x) \leq M \text{ pour tout } x\} \Leftrightarrow \sup f \leq M$ Sauf : $\sup \lambda \sup f = \lambda \sup f$ (si $\lambda \geq 0$ ) — qui est explicitement au programme de PC <b>Cours 13h-15h :</b> Normes : définition générale (dans un EV sur K) ; cas particulier de la norme préhilbertienne associée à un produit scalaire (sur un EV réel) ; Exemples fondamentaux À CONNAÎTRE : -   .   est la seule norme que l'on utilise sur K — et il ne faut pas la noter   .   - normes 1, 2, infinie sur $K^n$ , - norme 2 sur $M_n(R)$ ; NB : bien que très classique cette norme n'est pas mentionnée dans le programme (savoir tout redémontrer), - norme uniforme d'une fonction bornée (de I intervalle réel, à valeurs dans K). NB : la norme 2 d'une fonction (continue) de carré intégrable sur un intervalle quelconque I n'est plus au programme, mais elle est au programme quand I est un segment (norme associée au produit scalaire usuel des fonctions). Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec ou sans valeur absolue), cas d'égalité (vecteurs colinéaires s'il y a la valeur absolue ; vecteurs colinéaires et de même sens si elle n'y est pas).	11.13(2)	10.116(2,3), <del>10.110</del> , 10.145, 10.150, 10.164	[(10.137 + 10.162) ou 10.167] + [10.146 ou 10.153]	
mer. 29 janv.	séance d'exercices	11.2(4,5,6,7), 11.7, 11.13(5,10)			
ven. 31 janv.	Parties bornées d'un EVN, fonctions et suites bornées dans un EVN. Espace vectoriel des fonctions bornées à valeur dans IK et définition de la norme uniforme sur cet espace. Rendu DS5 : 45 min	11.36			
lun. 3 févr.	Suites convergentes dans un espace vectoriel normé. Théorèmes de calcul en dimension quelconque (somme ; produit par une suite convergente de scalaires). Caractérisation de la convergence coordonnée par coordonnée dans une base en dimension finie ; limite d'un produit en dimension finie. Équivalence de deux normes. Invariance du caractère borné ou de la convergence d'une suite pour deux normes équivalentes. Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (admis). NB : le programme indique que « la comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires » Remarque : la convergence uniforme des suites de fonctions ne sera étudiée en détail qu'au chapitre suivant.		11.11, 11.17, 11.25		
mar. 4 févr.	distance associée à une norme. Distance $d(u, X)$ d'un point u à une partie X : - définition - rappel de PCSI : distance d'un point u à un sev X de dimension finie d'un espace préhilbertien est atteinte en un unique point qui est le projeté orthogonal de u sur X (théorème de projection sur un SEV de dimension finie). Point u adhérent à une partie X [lorsque $d(u, X)=0$ ] ; caractérisation séquentielle d'un point adhérent. Adhérence d'une partie (l'ensemble des points adhérents).	11.42, 11.63			
mer. 5 févr.	Définition de la convergence (en un point adhérent à l'ensemble de définition) d'une fonction entre deux evn de dimensions quelconques. Théorèmes de calcul sur les limites et les fonctions continues : somme, produit par une fonction à valeurs scalaires, composée, produit (en dimension finie).	11.70(2)			
ven. 7 févr.	Fonctions continues. Théorèmes de calcul sur les fonctions continues. Caractérisation séquentielle. Une application linéaire définie sur un ev de dimension finie est continue. Exemples de fonctions continues À CONNAÎTRE : polynômes à n variables ; déterminant, applications linéaires en dimension finie. Fonctions lipschitziennes. Les fonctions lipschitziennes sont continues.	11.72(3,4)			

DS5 (4h) standard : Ex 1 : dimension du commutant d'une matrice 4x4 par diagonalisation (5Q) Ex 2 d'une matrice antisymétrique réelle dans C en passant par son carré (9Q) Ex 3 : loi du nombre de consécutifs de même résultat lors de n lancers de pièce (7Q) Ex 4 : familles bi-orthogonales (7Q) Ex : du plus grand entiers  $C=k$  tel que les k premières variables parmi  $Y_1$  à  $Y_n$  (iid géométriques) sont ra croissant (7Q)

Sujet Bis : Ex 1 : étude de la diagonalisabilité d'un opérateur intégral sur un espace de fonctions de dil Calculs avec la loi géométrique ; Pb : Trois caractérisations des matrices normales (mines PSI 2020)

date	Cours 2024-2025	exercices faits en cours	exercices faits en TD	énoncé DM donné (à rendre le mardi de la semaine suivante)	(DS mercredi)
lun. 10 févr.	Définitions de la topologie dans un EVN de dimension quelconque : boule ouverte, boule fermée, sphère, boule unité. Partie ouverte : c'est la réunion de boules ouvertes ; c'est caractérisé par le fait que tout point est intérieur ; intérieur d'une partie. Partie fermée : lorsque le complémentaire est ouvert ; caractérisation séquentielle ; contient tout ses points adhérents. Une réunion d'ouverts (une intersection de fermés) l'est aussi ; une intersection d'un nombre fini d'ouverts (une réunion d'un nombre fini de fermés) l'est aussi.		11.26, 11.39, 11.47, 11.51		<p>DS 5 standard (3h) : Ex1 : calcul de variance par la covariance, sans loi donnée ; inégalités probabilistes et application à une convergence en proba (ESCP 2018 3.22 ; 100) Ex2 : marche aléatoire dans <math>\{0, \dots, n-1\}</math> avec polynômes et matrices de Kac (ESCP 2022 n° 3 ; 12Q) ; Ex 3 : variables discrètes dont tous les moments sont égaux (ESCP 2023 n°3.3 &amp; DS5-bis 2022-2023 très modifiés ; 12Q)</p> <p>DS5-bis 3h : Mimes PC 2023 épreuve 2 : chaîne de Markov en temps continu</p>
mar. 11 févr.	Obtention d'ouvert ou de fermés lorsqu'ils ont une équation cartésienne continue. L'image réciproque d'un ouvert/d'un fermé par une application continue l'est aussi.	11.87(2 à 5)		Extrema de $M > \text{tr}(M S)$ sur certains ensembles et inégalité de HADAMARD	
mer. 12 févr.	<b>Compléments au programme sur la continuité d'une fonction sur une partie</b> (définie comme la continuité de la restriction de la fonction à cette partie) : la continuité sur chaque partie d'un découpage disjoint ne donne pas la continuité globale ; c'est le cas seulement sur les points d'une partie non adhérents aux autres parties ; et pour les points adhérents aux autres parties on revient à la définition calcul de limite). Théorème des bornes atteintes : si $f$ est une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie fermée bornée d'un EVN de dimension finie, alors $f$ est bornée et atteint ses bornes (résultat admis). <b>Remarque : le vocabulaire de partie « compacte » n'est pas au programme.</b>	11.94			
ven. 14 févr.	Parties denses d'un EVN. Partie convexe d'un EV.	11.105(4,5)			
lun. 17 févr. mar. 18 févr. mer. 19 févr. ven. 21 févr.					
lun. 24 févr.					
mar. 25 févr.					
mer. 26 févr.					
ven. 28 févr.					
lun. 3 mars	<b>Chapitre 12 : Théorèmes d'interversion</b>  * Suites de fonctions : convergence simple (CVS), convergence uniforme (CVU) ; la CVU entraîne la CVS (vers la même fonction limite) — réciproque fautive. Méthode d'étude de la CVU. Si $\ f_n(x) - f(x)\ $ est majoré par $\alpha_n$ qui tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ ET QUI NE DÉPEND PAS DE $x$ , alors $(f_n)$ CVU vers $f$ .  Théorèmes d'interversion pour avec une suite de fonctions qui CVU : - si une suite $(f_n)$ de fonctions CVU (vers $f$ ) et si les $f_n$ sont continues, alors $f$ est continue <b>Rendu DS6 (35 min)</b>	12.1(7,13)			
mar. 4 mars	- si une suite $(f_n)$ de fonctions CVU (vers $f$ ) et si les $f_n$ sont continues sur un SEGMENT $[a,b]$ , alors l'intégrale de $a$ à $b$ de $f_n$ converge vers l'intégrale de $a$ à $b$ de $f$ ; - si les $f_n$ sont $C^1$ , si $(f_n)$ CVS vers $F$ et si $(f_n')$ CVU vers $h$ , alors $F$ est $C^1$ et $F' = h$ ; - extension à la classe $C^p$  Utilisation de la convergence uniforme sur tout segment, ou plus généralement sur toute partie d'une famille bien choisie. Mais cela ne s'applique PAS pour le théorème d'intégration. La convergence uniforme sur tout segment de $X$ n'entraîne PAS la convergence uniforme sur $X$ . <b>NB : le théorème de la double limite pour les SUITES de fonctions n'est pas au programme</b>	12.5	Prévision : 11.70(3), 11.72(5,6), 11.80(1), 11.87(9,11,13), 11.91, 11.96, 11.105(6), 11.109	[12.11 + 12.14(11)] ou [12.12 + 12.29]	
mer. 5 mars	* Séries de fonctions : <b>REVOIR IMPÉRATIVEMENT LE CHAPITRE 5 (séries)</b> Convergence normale sur $X$ d'une série de fonction ; convergence uniforme sur $X$ d'une série de fonction ; liens avec la convergence absolue et la convergence simple. Exemple fondamental : séries entières (convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence).	12.14(2)			
ven. 7 mars	Théorème continuité sous le signe "somme".  Théorème de la double limite pour les SÉRIES de fonctions <b>NB : Il n'y a aucun théorème d'interversion au programme pour une série double [i.e. du type <math>\sum_n (\sum_p u_{(n,p)}) = \sum_p (\sum_n u_{(n,p)})</math>] sauf en probabilités (sommatation par paquets des familles sommables)</b>  Théorème de dérivation terme à terme ; extension aux fonctions de classe $C^p$ (si les séries des $f_n, f_n', \dots, f_n^{(p-1)}$ CVS et si la série des $f_n^{(p)}$ CVU). Application aux séries entières (rappel). Application : théorème de dérivation terme à terme d'un série entière (la seule hypothèse est de sa placer sur $]R, R[$ ) Application à la démonstration de : si la v.a. $X$ à valeur dans $\mathbb{N}$ admet une espérance, alors $G$ dérivable en 1, et $G'(1) = E(X)$ [y compris dans le cas où $R=1$ ].  <b>!!! à cette date, ne sont pas encore au programme des colles : théorèmes d'intégration terme à terme !!!</b>	12.18			
lun. 10 mars					