



Moteur de Stirling

Maxence Evangelou - N° SCEI 10713

TIPE 2023

La Ville

Introduction

- Robert Stirling en 1816 :
Alternative au moteur à combustion interne (vapeur)
- Groupe Philips vers 1950 :
Cryogénie (mode réversible) et groupes électrogènes
- Marine Suisse en 1996 :
Moteur silencieux de sous-marin
- Aujourd'hui, regain d'intérêt :
Combinaison avec l'énergie solaire
(sociétés spécialisées, NASA, etc.)



Fig. 1 : Premières réalisations



Fig. 2 : Groupes électrogènes 180 W (Philips)



Fig. 3 : Rover Curiosity (Mars, depuis 2012)

Problématique et objectifs

**Comment réaliser, modéliser et étudier
un moteur de Stirling alpha ?**

- Réalisation d'un moteur de Stirling alpha expérimental
- Mesures :
 - Température du cylindre chaud
 - Vitesse de rotation à vide et avec charge
 - Pression entre les cylindres
- Calcul des rendements

Plan

1 - Montage expérimental

➤ *principe, difficultés, description, données*

2 - Caractéristiques moteur

➤ *température, vitesse, frottements, bilan*

3 - Amélioration du modèle

➤ *course pistons, mesure de pressions, bilan*

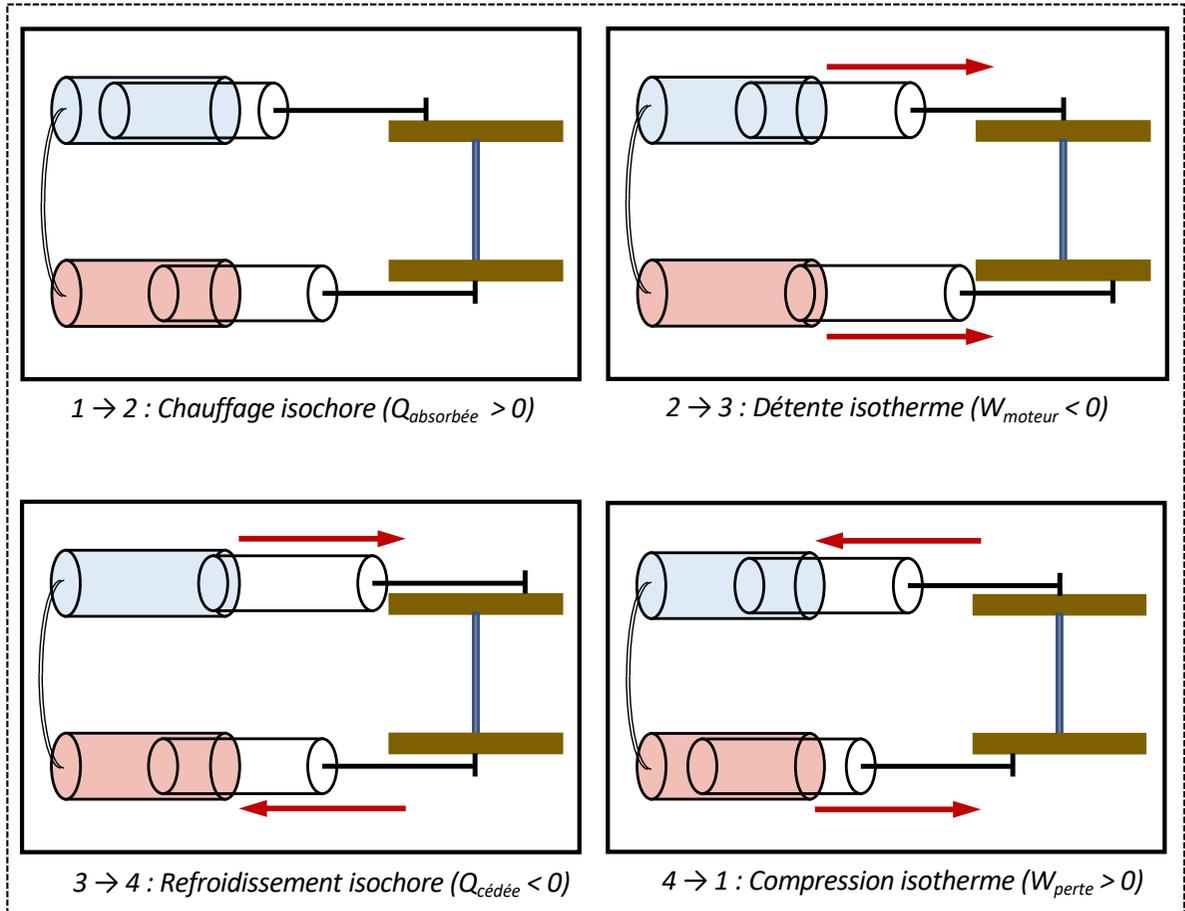
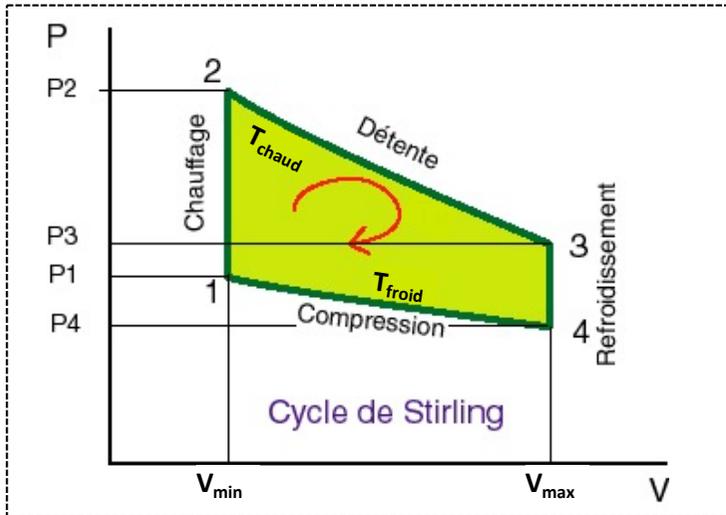
4 - Conclusions

➤ *optimisation, applications*

Annexes

➤ *calculs, programmes Python*

1.1 - Montage expérimental : principe du moteur



$$W_{théorique} = n R \ln\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right) (T_{froid} - T_{chaud})$$

$$P_{théorique} = W_{théorique} n_{cycles/s}$$

$$\eta_{théorique} = \frac{R \ln\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right) (T_{chaud} - T_{froid})}{C_v (T_{chaud} - T_{froid}) + R T_{chaud} \ln\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right)}$$

Fig. 4, 5 et 6 : Cycle et équations thermodynamiques du moteur de Stirling alpha

1.2 - Montage expérimental : difficultés rencontrées

- Choix de pistons adaptés
 - ↳ *Seringues verre borosilicate*
- Dimensionnement du volant d'inertie
 - ↳ $E_{compression} = E_{cinétique}$
- Alignement géométrique
 - ↳ *Précision montage*
- Comment connaître la vitesse de la roue ?
 - ↳ *Tachymètre optique*
- Comment évaluer les températures ?
 - ↳ *Sonde thermique*
- Comment évaluer la pression ?
 - ↳ *Manomètre intercalé*

1.3 - Montage expérimental : description

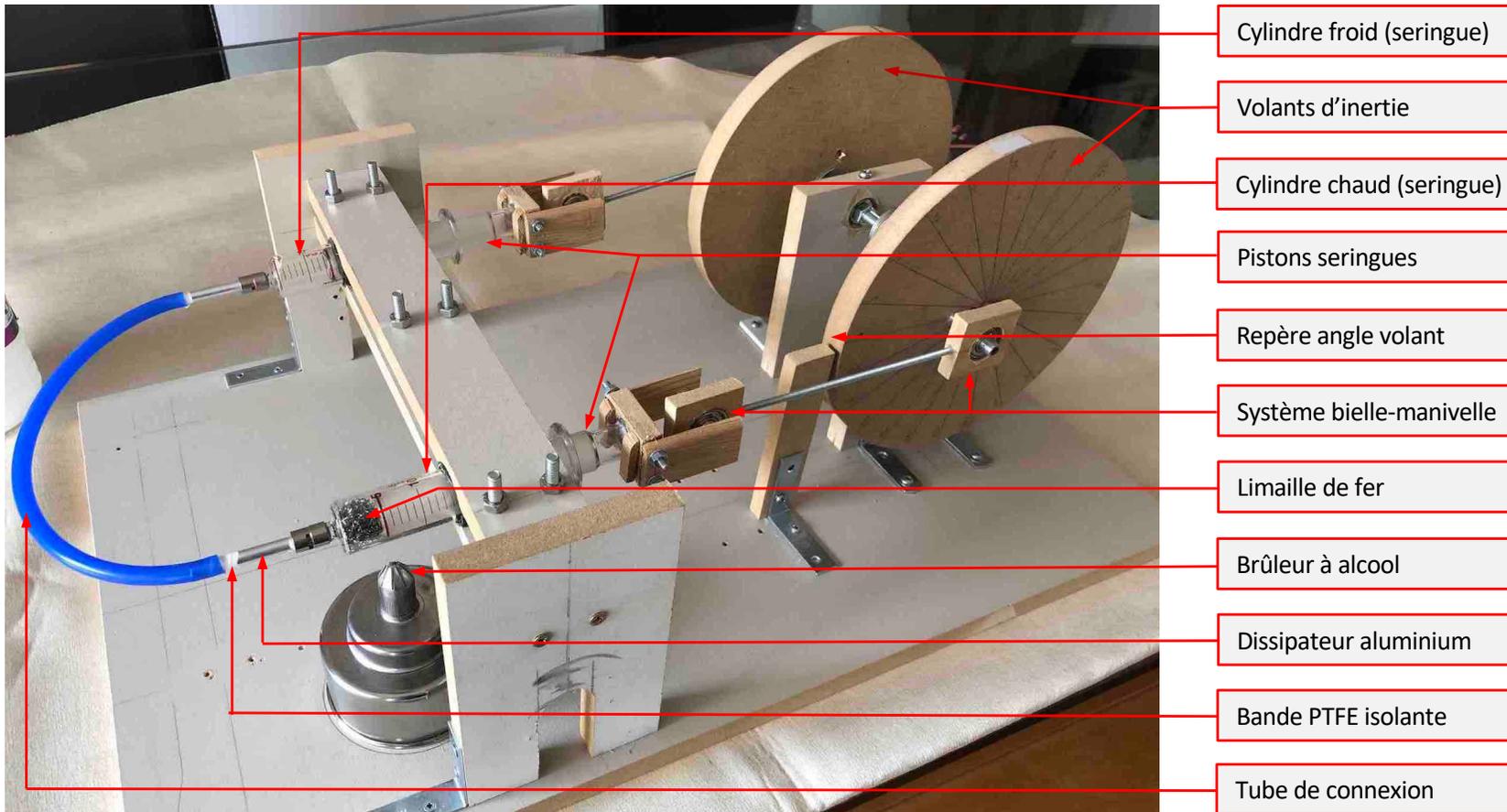


Fig. 7 : Montage expérimental du moteur Stirling alpha

1.4 - Montage expérimental : données

- **Seringues avec 2 écartements axe-bielles différents (1,5 et 2,0 cm)**

- « Volumes morts » différents (limite pistons, tube de connexion, limaille de fer)

- Rapports de compression : $\frac{V_{\max 1}}{V_{\min 1}} = 2,1$ et $\frac{V_{\max 2}}{V_{\min 2}} = 2,4$ (voir annexe)

- **Dimensionnement volants d'inertie**

- Energie cinétique = Travail compression isotherme (étape 4 → 1)

- $E_{\text{compression}} = n R T_{\text{froid}} \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right)$ et $E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} J \omega^2$

⇒ Pour 2,0 cm d'écartement, $\omega \simeq 5$ tours/s : $r_{\text{volant}} \simeq 12$ cm (voir annexe)

2.1 - Mesure de la température du cylindre chaud

- Mesures réalisées en cours de fonctionnement
(*arrêt moteur mais conservation du chauffage par le brûleur*)

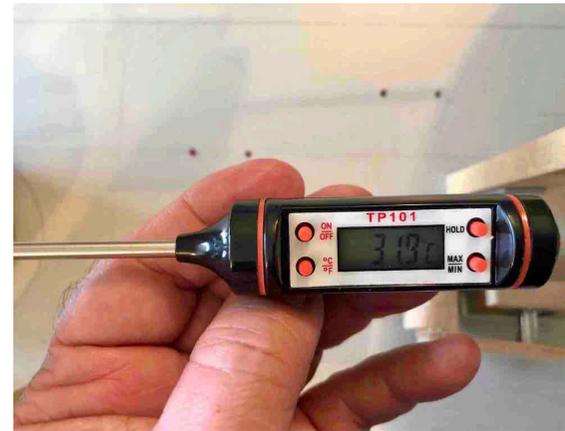


Fig. 8 et 9 : Mesure de la température du cylindre chaud

- Mesures obtenues : entre 580 et 592 K

$$T_{\text{chaud}} = 592 \pm 1 \text{ K (température maximale obtenue, avec incertitude du thermomètre)}$$

2.2 - Mesure de la vitesse de rotation à vide

- Mesures réalisées avec 2 volumes d'air différents V_1 et V_2

- Résultats

Mesures (V_1)	ω_1 (tours/mn)	Mesures (V_2)	ω_2 (tours/mn)
1	254	1	299
2	259	2	316
3	246	3	305
4	250	4	314
5	252	5	310



Fig. 10 : Mesure de la vitesse de rotation des volants

- $\omega_{\max 1}(V_1) = 252 \pm 7$ tours/mn et $\omega_{\max 2}(V_2) = 309 \pm 9$ tours/mn**
($u(\omega)$ = plus grand écart par rapport à la moyenne)

2.3 - Mesure de la vitesse de rotation avec charge (1/2)

- Traction de charges avec poulie
 - Moteur en fonctionnement
 - Masses de 40 à 300 g pour V_1 et V_2
 - Hauteur suffisante pour stabiliser la vitesse de rotation

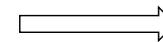
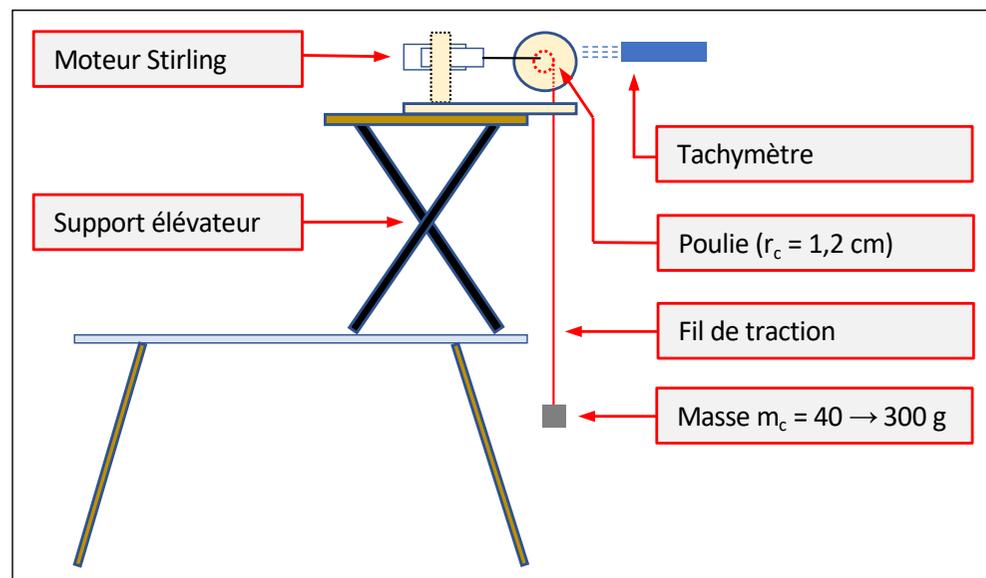


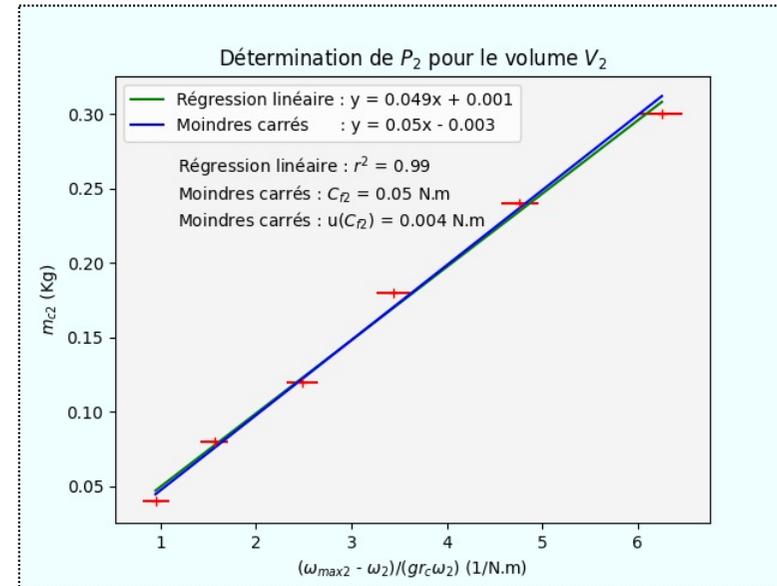
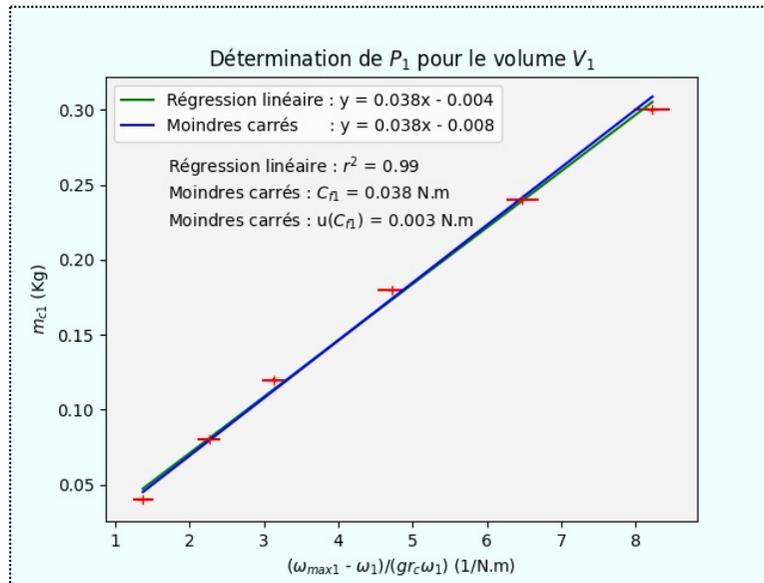
Fig. 11 et 12 : Montage pour mesurer la puissance du moteur (poulie avec charge variable)

2.3 - Mesure de la vitesse de rotation avec charge (2/2)

- $\mathcal{P}_{\text{moteur}} = C_{\text{frottements}} \omega_{\text{max}} = C_{\text{frottements}} \omega + m_c g r_c \omega$ (hypothèse $C_{\text{frottements}} \approx \text{constante}$)
 $\Rightarrow m_c = \frac{\omega_{\text{max}}}{g r_c \omega} C_{\text{frottements}}$

Résultats

Fig. 13 et 14 : Détermination graphique de $C_{\text{frottements}}$ et donc de $\mathcal{P}_{\text{moteur}}$



- $\mathcal{P}_{\text{moteur}} = C_{\text{frottements}} \omega_{\text{max}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{moteur1}} = 1,00 \pm 0,08^* \text{ W}$ et $\mathcal{P}_{\text{moteur2}} = 1,62 \pm 0,14^* \text{ W}$

$$* u(\mathcal{P}_{\text{moteur}}) = \mathcal{P}_{\text{moteur}} \sqrt{\left(\frac{u(C_f)}{C_f}\right)^2 + \left(\frac{u(\omega_{\text{max}})}{\omega_{\text{max}}}\right)^2}$$

2.4 - Bilan du modèle théorique de base

- $\mathcal{P}_{\text{théorique}} = W_{\text{théorique}} n_{\text{cycles/s}}$

avec $W_{\text{théorique}} = n R \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right) (T_{\text{froid}} - T_{\text{chaud}})$

$(T_{\text{froid}} = 293 \text{ K} = \text{température ambiante})$

- Comparaisons

	Volume 1	Volume 2
Travail théorique de base (J/cycle)	0,87 ± 0,01	1,12 ± 0,01
Vitesse de rotation (tours/s)	4,20 ± 0,12	5,15 ± 0,15
Puissance théorique (W)	3,65 ± 0,11	5,77 ± 0,18
Puissance mesurée (W)	1,00 ± 0,08	1,62 ± 0,14
Z-Score	19	19

- Conclusion : **Modèle de base insuffisant**

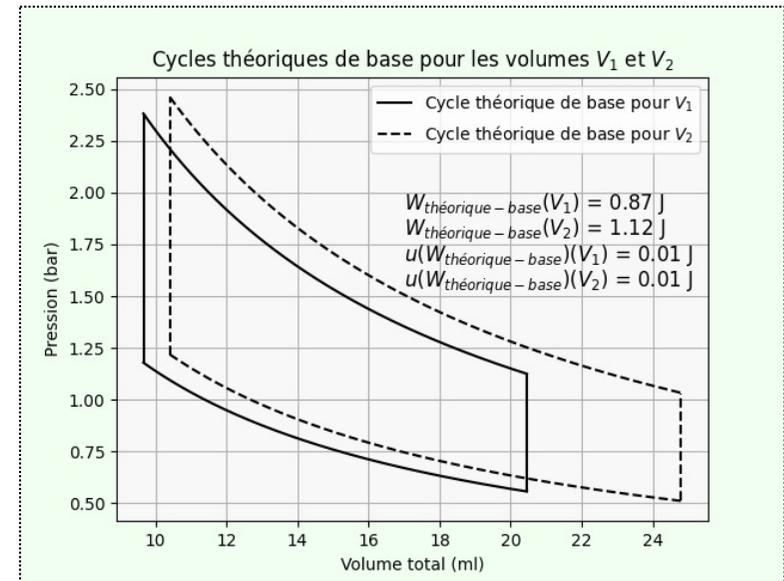


Fig. 15 : Cycles du modèle théorique de base

3.1 - Amélioration du modèle : course pistons

- Considération de la course sinusoïdale des pistons
- Calculs pour $V(\alpha)$ et $P(\alpha)$ (voir annexe)

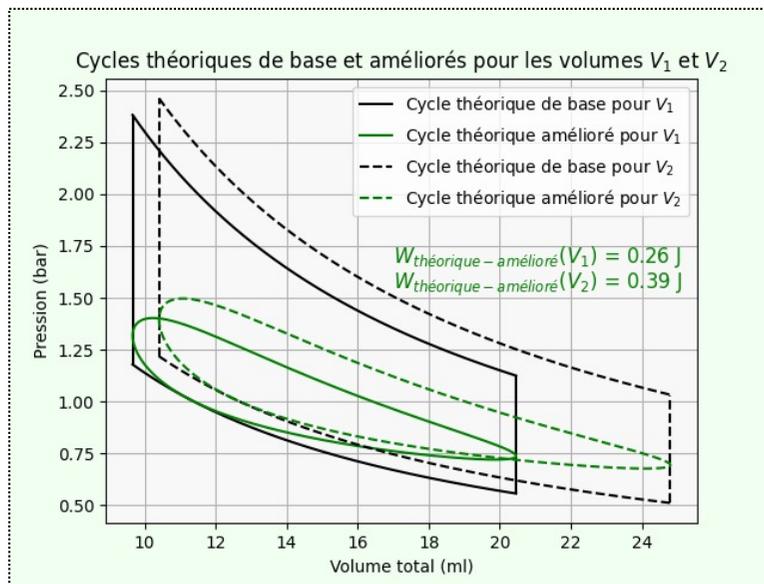


Fig. 17 : Cycles du modèle théorique amélioré

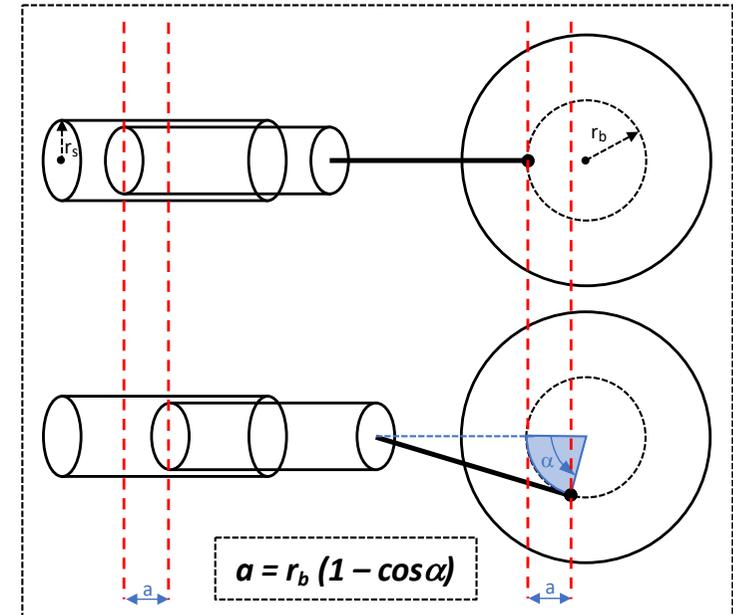


Fig. 16 : Calcul de la course des pistons

- Tracé des cycles (voir Python en annexe)

3.2 - Amélioration du modèle : mesure de pressions

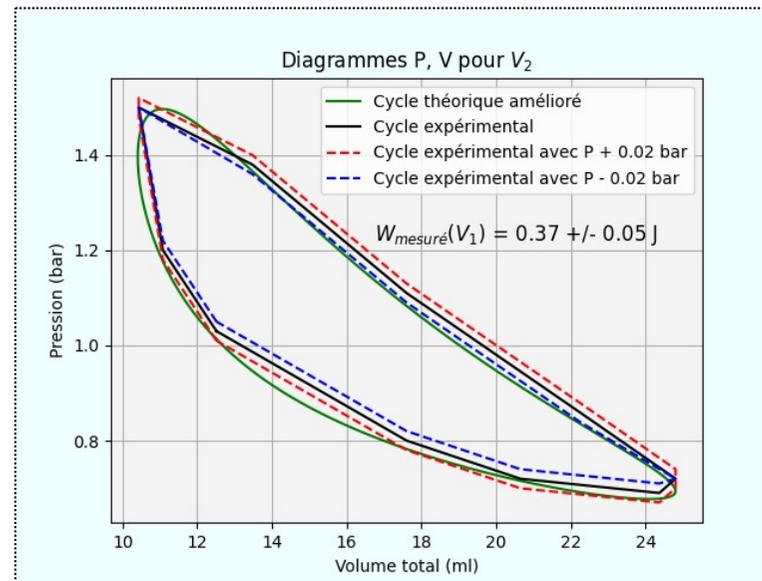
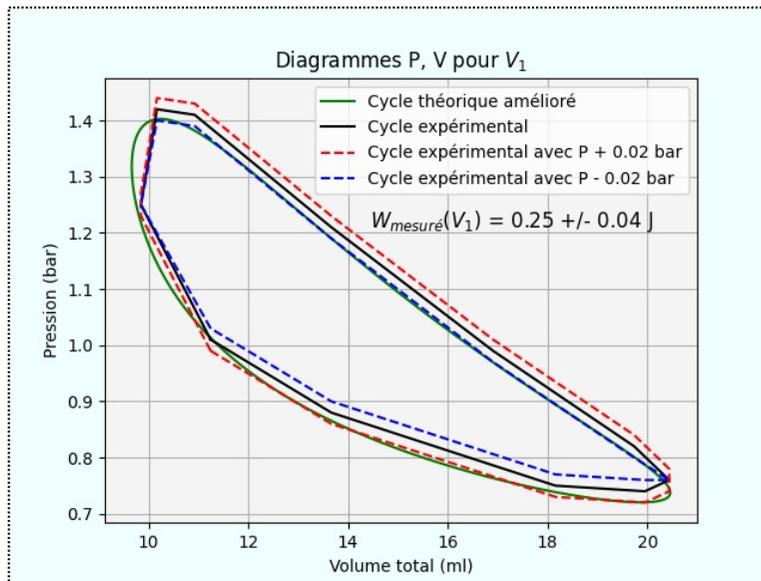
Fig. 18 : Mesure de pressions



- 2 Séries de mesures avec V_1 et V_2 en faisant varier α :
 - Repérage des angles sur le volant calibré
 - Capture vidéo
 - Mesures de P à intervalles fixes (≈ 10 s) en arrêtant le moteur
 - Réconciliation des mesures avec la vidéo

• Résultats

Fig. 19 et 20 : Calcul du travail fourni pour le cycle amélioré



3.2 - Amélioration du modèle : bilan (1/2)

- Comparaisons

	Volume 1	Volume 2
Travail théorique amélioré (J/cycle)	0,26 ± 0,01	0,39 ± 0,01
Travail mesuré (J/cycle)	0,25 ± 0,04	0,37 ± 0,05
Vitesse de rotation (tours/s)	4,20 ± 0,12	5,15 ± 0,15
Puissance théorique (W)	1,09 ± 0,05	2,01 ± 0,08
Puissance mesurée (W)	1,05 ± 0,17	1,91 ± 0,26
Z-Score	0,24	0,37



Fig. 21 : Volant calibré pour la mesure des angles

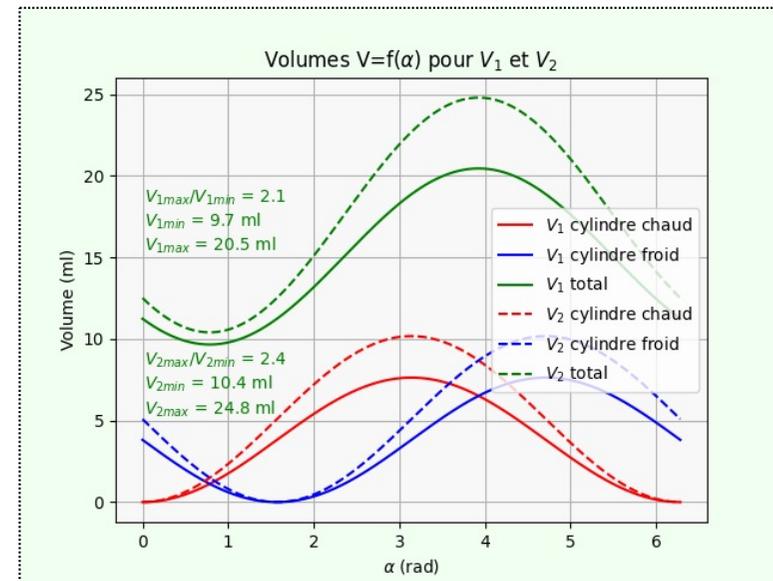


Fig. 22 : Variations de volumes du moteur

- Conclusion : **Modèle amélioré valide**

3.3 - Amélioration du modèle : bilan (2/2)

- Rendements

	Volume 1	Volume 2
V_{max}/V_{min}	2,1	2,4
Rendement thermodynamique de Carnot	0,51	0,51
Rendement thermodynamique théorique	0,19	0,21
Puissance mesurée (W)	1,05 ± 0,17	1,91 ± 0,26
Puissance brûleur (W) - Voir annexe	220	220
Efficacité énergétique	0,5% !	0,9% !

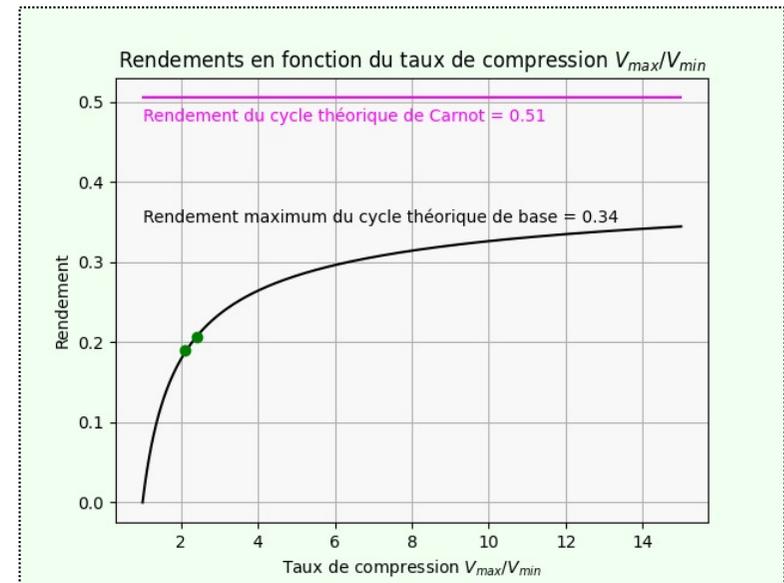
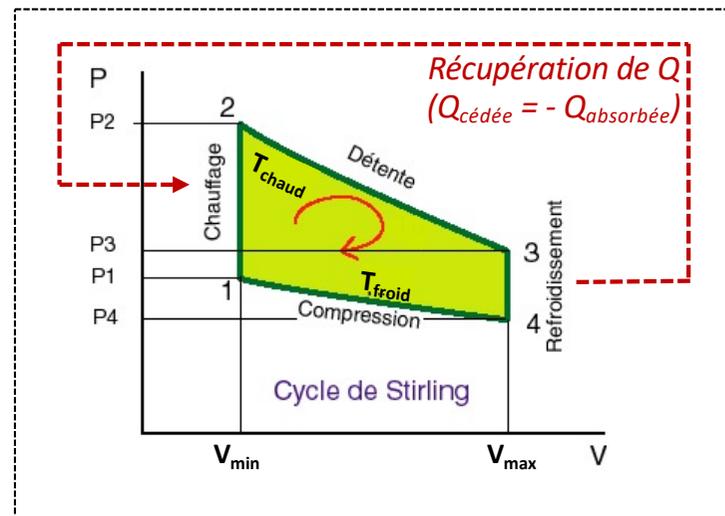


Fig. 23 : Rendement thermodynamique du moteur Stirling alpha

- Avec régénérateur parfait
 ⇒ Rendement de Carnot

$$(\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}})$$

Fig. 24 : Cycle Stirling avec régénérateur



4 - Conclusions : Optimisation

- Augmentation du rapport V_{\max}/V_{\min}
- Quadrature de phase entre volants
- Diminution du volume mort
- Minimisation des frottements
- Optimisation du chauffage
- Optimisation du refroidissement

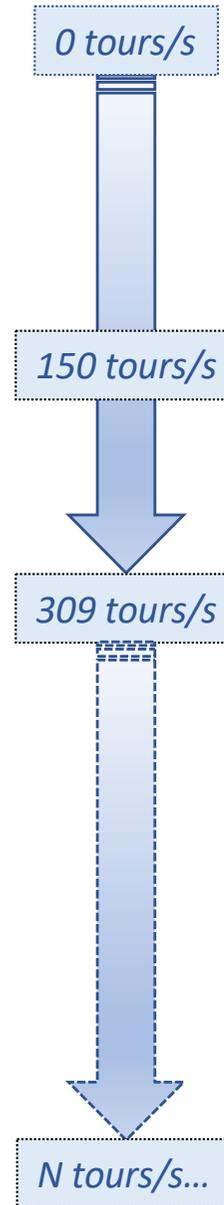


Fig. 25 : Positionnement des seringues



Fig. 26 : Brûleur et limaille de fer

4 - Conclusions : Applications

Pas mal d'avantages...

- Combustion externe (peu de polluants)
- Silencieux
- Rendement → 40%



... Et quelques inconvénients

- Température élevée permanente
- Inertie thermique : faible réactivité
- Problèmes d'étanchéité



➤ Utilisation de l'énergie solaire

☞ Paraboles et capteurs cylindro-paraboliques

➤ Réfrigération industrielle

☞ Refroidissement, liquéfaction basse température

➤ Electricité en milieux extrêmes

☞ Déserts, pôles, exploration spatiale...

Merci de votre attention



Moteur de Stirling

Annexe 1 : Calculs pour le modèle de base

• 1 → 2 : Chauffage isochore ⇒ $Q_{\text{absorbée}} = n c_v (T_{\text{chaud}} - T_{\text{froid}})$ (> 0)

• 2 → 3 : Détente isotherme ⇒ $\delta W_{\text{moteur}} = -P dV = -n R T_{\text{chaud}} \int_{V_{\text{min}}}^{V_{\text{max}}} \frac{dV}{V}$
 ($\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$ et $Q_{2 \rightarrow 3} = -W_{\text{moteur}} > 0$) ⇒ $W_{\text{moteur}} = -n R T_{\text{chaud}} \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right)$ (< 0)

• 3 → 4 : Refroidissement isochore ⇒ $Q_{\text{cédée}} = n c_v (T_{\text{froid}} - T_{\text{chaud}})$ (< 0)

• 4 → 1 : Compression isotherme ⇒ $\delta W_{\text{perte}} = -P dV = -n R T_{\text{froid}} \int_{V_{\text{max}}}^{V_{\text{min}}} \frac{dV}{V}$
 ($\Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0$ et $Q_{4 \rightarrow 1} = -W_{\text{perte}} < 0$) ⇒ $W_{\text{perte}} = n R T_{\text{froid}} \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right)$ (> 0)

• Travail théorique (par cycle) ⇒ $W_{\text{théorique}} = n R \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right) (T_{\text{froid}} - T_{\text{chaud}})$ (< 0)

• Rendement théorique ⇒ $\eta_{\text{théorique}} = \frac{W_{\text{perte}} - W_{\text{moteur}}}{Q_{\text{absorbée}} + Q_{2 \rightarrow 3}} = \frac{R \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right) (T_{\text{chaud}} - T_{\text{froid}})}{c_v (T_{\text{chaud}} - T_{\text{froid}}) + R T_{\text{chaud}} \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right)}$

Annexe 2 : Calculs de dimensionnement

- **Seringues : variation du volume d'air par variation de la distance axe-bielles (1,5 et 2,0 cm)**

- Seringues 20 ml : \emptyset intérieur 18 mm
- Volumes morts minimaux (écartement 1,5 cm) : seringue froide 1,0 ml et seringue chaude 5,0 ml
- Volumes morts minimaux (écartement 2,0 cm) : seringue froide 1,0 ml et seringue chaude 5,0 ml
- Tube de connexion : \emptyset intérieur 5 mm, longueur 20 cm $\Rightarrow V_{\text{tube}} \simeq 3,9$ ml
- Volume occupé par la limaille de fer : $V_{\text{limaille}} \simeq - 2,5$ ml

\Rightarrow Ecartement 1,5 cm : $V_{\text{min1}} = 9,7$ ml, $V_{\text{max1}} = 20,5$ ml et $\frac{V_{\text{max1}}}{V_{\text{min1}}} = 2,1$

\Rightarrow Ecartement 2,0 cm : $V_{\text{min2}} = 10,4$ ml, $V_{\text{max2}} = 24,8$ ml et $\frac{V_{\text{max2}}}{V_{\text{min2}}} = 2,4$

- **Dimensionnement volants d'inertie : Energie cinétique = Travail compression isotherme (4 \rightarrow 1)**

- $E_{\text{compression}} = n R T_{\text{froid}} \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right) = P_0 V_{\text{min}} \ln\left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}\right)$ (avec $T_{\text{froid}} = 293$ K et $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa)

- $E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{4} m_{\text{volant}} r^2 \omega^2 = \frac{1}{4} \rho_{\text{mdf}} e_{\text{mdf}} \pi r^4 \omega^2$

- $E_{\text{compression}} = E_{\text{cinétique}} \text{ (2 volants)} \Rightarrow r^4 = \frac{2 E_{\text{compression}}}{\rho_{\text{mdf}} e_{\text{mdf}} \pi \omega^2}$

\Rightarrow Pour écartement 2,0 cm, avec $e_{\text{mdf}} = 1,6$ cm, $\omega \simeq 5$ tours/s et $\rho_{\text{mdf}} \simeq 800$ kg.m⁻³, on obtient $r_{\text{volant}} \simeq 12$ cm

- **Puissance brûleur ($m_{\text{alcool}} = 6,5$ g, $t_{\text{combustion}} = 14,5$ mn, $PCI_{\text{alcool}} = 29$ MJ.kg⁻¹)**

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\text{brûleur}} = \frac{m_{\text{alcool}} PCI_{\text{alcool}}}{t_{\text{combustion}}} \simeq 220$ W

Annexe 3 : Calculs pour le modèle amélioré

- $V_c(\alpha) = \pi r_s^2 r_b (1 - \cos(\alpha))$ et $V_f(\alpha) = \pi r_s^2 r_b (1 - \sin(\alpha))$ *(course des pistons)*

$$\Rightarrow V_{\text{total}}(\alpha) = 2 \pi r_s^2 r_b \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) + V_{\text{mort}}$$

$$(V_{\text{mort}} = V_{\text{tube}} + V_{\text{seringues min}} - V_{\text{limaille}})$$

- $V_{\text{init}}\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right) = \pi r_s^2 r_b + V_{\text{mort}}$

$$\Rightarrow n_{\text{moles init}}\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{P_0 V_{\text{init}}\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)}{R T_{\text{froid}}}$$

(loi des gaz parfaits)

- $T_{\text{moyenne}}(\alpha) = \frac{V_{\text{chaud}}(\alpha) T_{\text{chaud}} + (V_{\text{froid}}(\alpha) + V_{\text{mort}}) T_{\text{froid}}}{V_{\text{total}}(\alpha)}$

(approximation du modèle)

- $P(\alpha) = \frac{n_{\text{moles init}}\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right) R T_{\text{moyenne}}(\alpha)}{V_{\text{total}}(\alpha)}$

(loi des gaz parfaits)

Annexe 4 : Programmes développés en Python (1/3)

Programme 1 : Régression linéaire pour calculer C_f et \mathcal{P} (Extrait)

```
## Données expérimentales pour V1 et V2 - A rentrer

g = 9.81 # gravité
ug = 0.01 # incertitude gravité
rc = 1.2*10**-2 # rentrer en cm
urc = 0.05*10**-2/np.sqrt(12) # rentrer en cm

# Volume V1
mc1 = np.array([40,80,120,180,240,300])*10**-3 # rentrer en grammes
umc1 = 10**-3 # rentrer en grammes
omegal = np.array([217,199,184,162,143,128])/60*2*pi # rentrer en tours/s
uomegal = 1/60*2*pi # rentrer en tours/s
omegamax1 = 252/60*2*pi # rentrer en tours/s
uomegamax1 = 7/60*2*pi # rentrer en tours/s

# Volume V2
mc2 = np.array([40,80,120,180,240,300])*10**-3 # rentrer en grammes
umc2 = 10**-3 # rentrer en grammes
omega2 = np.array([278,261,239,220,198,178])/60*2*pi # rentrer en tours/s
uomega2 = 1/60*2*pi # rentrer en tours/s
omegamax2 = 309/60*2*pi # rentrer en tours/s
uomegamax2 = 9/60*2*pi # rentrer en tours/s

## Valeurs et incertitudes résultantes pour V1 et V2

# Volume V1
x1 = (omegamax1-omegal)/(g*rc*omegal)
ux1 = x1*np.sqrt((uomegamax1**2+uomegal**2)/(omegamax1-omegal)**2+(ug/g)**2+(urc/rc)**2+(uomegal/omegal)**2)
y1 = mc1
uy1 = umc1

# Volume V2
x2 = (omegamax2-omega2)/(g*rc*omega2)
ux2 = x2*np.sqrt((uomegamax2**2+uomega2**2)/(omegamax2-omega2)**2+(ug/g)**2+(urc/rc)**2+(uomega2/omega2)**2)
y2 = mc2
uy2 = umc2

## Régression linéaire habituelle (Régressi) pour V1 et V2 - Ne prend pas en compte les incertitudes

# Volume V1
regression1 = linregress(x1,y1)
pente1 = regression1[0]
origine1 = regression1[1]
r21 = regression1[2]**2

# Volume V2
regression2 = linregress(x2,y2)
pente2 = regression2[0]
origine2 = regression2[1]
r22 = regression2[2]**2
```

Annexe 4 : Programmes développés en Python (2/3)

Programme 2 : Calculs et tracés des cycles théoriques (Extrait)

```
from math import*
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import axes as ax
from matplotlib import cm
from numpy import *
import scipy.integrate as integr

## Données expérimentales

R = 8.314 # Constante des gaz parfaits
P0 = 1.013*10**5 # Pression atmosphérique
Tc = 592 # Température source chaude
Tf = 293 # Température source froide (ambiante)
r_s = 9.0*10**-3 # Rayon de la seringue (m)
Vtube = (20*10**-2)*(pi*(2.5*10**-3)**2) # Volume du tube entre les 2 cylindres (m3)
Vlimaille = 2.5*10**-6 # Volume occupé par la limaille de fer (m3)
Vseringues1 = (5.0+1.0)*10**-6 # Volume vide seringues pour V1
Vseringues2 = (5.0+1.0)*10**-6 # Volume vide seringues pour V2
Vmort1 = Vtube - Vlimaille + Vseringues1 # Volume "mort" total pour V1 (m3)
Vmort2 = Vtube - Vlimaille + Vseringues2 # Volume "mort" total pour V2 (m3)
r_b = [r*10**-2 for r in [1.5,2.0]] # Distance axe-bielle (m)
I = linspace(0,2*pi,1000) # Pas sur alpha pour la discrétisation

## Calcul des valeurs V, T, P, W pour le cycle théorique amélioré en fonction de alpha (volume V1 correspondant à R a[0])

Vc_al = [] # Volumes cylindre chaud (fonction de alpha)
Vf_al = [] # Volumes cylindre froid (fonction de alpha)
Vt_al = [] # Volumes totaux (fonction de alpha)
Tm_al = [] # Températures moyennes (fonction de alpha)
P_al = [] # Pressions cylindres (fonction de alpha)

for alpha in I :
    Vc_al.append(pi*r_s**2*r_b[0]*(1-cos(alpha))*10**6) # Calcul des valeurs Vc(alpha)
    Vf_al.append(pi*r_s**2*r_b[0]*(1-sin(alpha))*10**6) # Calcul des valeurs Vf(alpha)

for i in range(len(Vc_al)) :
    Vt_al.append(Vc_al[i]+Vf_al[i]+Vmort1*10**6) # Calcul des valeurs Vt(alpha)
    Tm_al.append((Vc_al[i]*Tc+(Vf_al[i]+Vmort1*10**6)*Tf)/Vt_al[i]) # Calcul des valeurs Tm(alpha)

Vc1 = max(Vc_al)*10**-6 # Volume maximal cylindre chaud
Vf1 = max(Vf_al)*10**-6 # Volume minimal cylindre froid
Vtmax1 = max(Vt_al)*10**-6 # Volume total maximal
Vtmin1 = min(Vt_al)*10**-6 # Volume total minimal
Vinit1 = 2*pi*r_s**2*r_b[0]*(1-2/4) # Condition initiale pour le volume d'air : alpha = pi/4
n1 = P0*(Vinit1+Vmort1)/(R*Tf) # Calcul du nombre de moles avec les conditions initiales

for i in range(len(Vt_al)) :
    P_al.append((n1*R*Tm_al[i])*10/(Vt_al[i])) # Calcul des valeurs P(alpha)

travail_theo_amelioere1 = integr.simps(P_al,Vt_al)*0.1 # Conversion nécessaire (bar et ml)
```

Annexe 4 : Programmes développés en Python (3/3)

Programme 3 : Calculs et tracés des cycles améliorés expérimentaux (Extrait)

```
## Données expérimentales
R = 8.314 # Constante des gaz parfaits
P0 = 1.013*10**5 # Pression atmosphérique
Tc = 592 # Température source chaude
Tf = 293 # Température source froide (ambiante)
r_s = 9*10**-3 # Rayon de la seringue (m)
Vtube = (20*10**-2)*(pi*(2.5*10**-3)**2) # Volume du tube entre les 2 cylindres (m3)
Vlimaille = 2.5*10**-6 # Volume occupé par la limaille de fer (m3)
Vseringues1 = (5.0+1.0)*10**-6 # Volume vide seringues pour V1
Vseringues2 = (5.0+1.0)*10**-6 # Volume vide seringues pour V2
Vmort1 = Vtube - Vlimaille + Vseringues1 # Volume "mort" total pour V1 (m3)
Vmort2 = Vtube - Vlimaille + Vseringues2 # Volume "mort" total pour V2 (m3)
r_b = [r*10**-2 for r in [1.5,2.0]] # Distance axe-bielle (m)
I = np.linspace(0,2*pi,1000) # Pas sur alpha pour la discrétisation

## Fonctions utiles
inc = 0.02 # Incrément pour les incertitudes

def convradian(alpha) : # Conversion degrés vers radians
    return alpha*pi/180

def insertion(T,k) : # Classement ordonné jusqu'au rang k (sous-programme)
    j=k
    while j>0 and T[j]<T[j-1] :
        T[j-1],T[j]=T[j],T[j-1]
        j=j-1

def tri_insertion(T) : # Classement ordonné d'un tableau
    for k in range(len(T)):
        insertion(T,k)

def aire (C) : # Calcul d'une aire pour un tableau de valeurs (somme des rectangles à la Riemann)
    n=len(C)
    aire=0
    for i in range(len(C)-1) :
        aire+=C[i+1][0]*C[i][1]-C[i][0]*C[i+1][1]
    return aire*(1/2)

def point_dans_polygone(polygone_x, polygone_y, point_x, point_y) : # Retourne True si le point est dans le polygone
    odd = False # polygone_x et polygone_y : arrays, point_x et point_y : valeurs
    i = 0 # point sur une droite : changer les < et > en <= et >=
    j = len(polygone_x)-1 # Un point est dans un polygone ssi si une ligne du point à l'infini
    # croise les côtés du polygone un nombre impair de fois
    # Une ligne du point M vers Ox (+infini) croise un segment AB ssi
    # yA et yB sont de chaque côté de yM et AB ne croise pas yM avant xM
    while i < len(polygone_x) :
        if ((polygone_y[i] > point_y) != (polygone_y[j] > point_y)) and
            (point_x < ((polygone_x[j] - polygone_x[i]) * (point_y - polygone_y[i]) / (polygone_y[j] - polygone_y[i])) + polygone_x[i])) :
            odd = not odd
        j = i
        i = i+1
    return odd
```