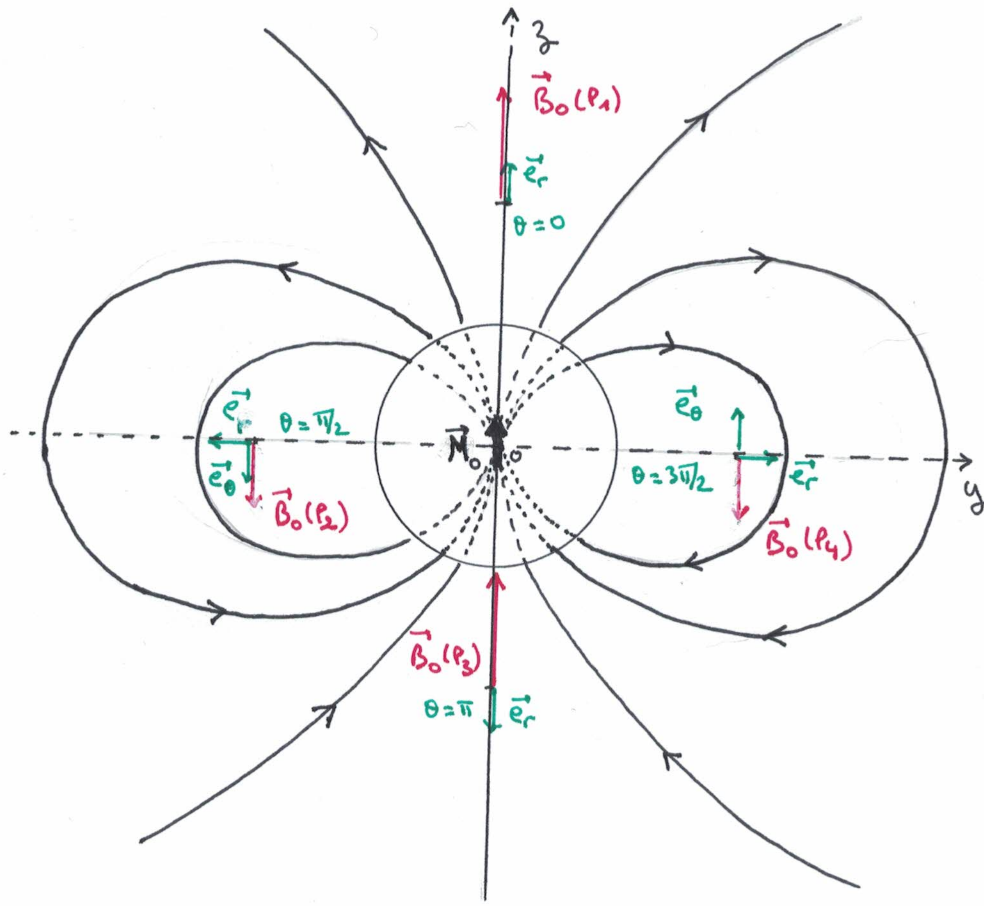
X-ENS MP 2022 - Flexion et Flambage

1. Chaine d'aimants en interaction magnétique.

1.1. Champ magnétique créé par un aimant.



(1) Voir ci-contre.

(2) En P_1 :

$$\begin{cases} r = D,\ \theta = 0 \\ \vec{e}_r = \vec{e}_z \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{B}_0(P_1) = \frac{2\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi D^3}\,\vec{e}_z}$$

En P_2 :

$$\begin{cases} r = D \quad \theta = \pi/2 \\ \vec{e}_r = -\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{B}_0(P_2) = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi D^3}\,\vec{e}_z}$$

/!\ On utilise traditionnellement les coord. sphériques pour écrire ce champ ($\theta \in [0;\pi]$) ; ici ce sont des coord. polaires ($\theta \in [0; 2\pi]$).

En P_3 :

$$\begin{cases} r = D \\ \theta = \pi \\ \vec{e}_r = -\vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_0(P_3) = \frac{2\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi D^3}\,\vec{e}_z = \vec{B}_0(P_1)}$$

En P_4 :

$$\begin{cases} r = D \\ \theta = 3\pi/2 \\ \vec{e}_r = \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_0(P_4) = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi D^3}\,\vec{e}_z = \vec{B}_0(P_2)}$$

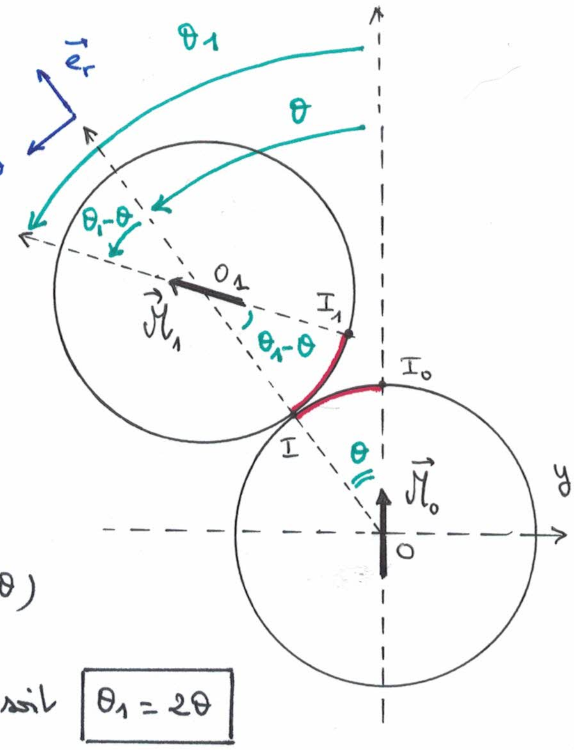
(3) $\boxed{\vec{B}_0(P_1)\cdot\vec{e}_z = 2\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathcal{M}}{D^3} = \frac{1}{12}\,\mu_0 M_v}$ puisque $\mathcal{M} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 M_v = \frac{\pi D^3 M_v}{6}$

AN : $\vec{B}_0(P_1).\vec{e}_z = \frac{1}{12} \times 4\pi\,10^{-7} \times 9\,10^{5} = 3\pi\,10^{-2}$ $\boxed{\simeq 9{,}4\,10^{-2}\ \text{T} \quad \text{ou} \approx 0{,}1\ \text{T}}$

↳ Cet ordre de grandeur correspond bien aux champs usuellement mesurés au voisinage des "bons aimants" : en effet, le champ typique au voisinage immédiat d'un aimant Néodyme fer Bore est de 1 T

(ici avec $r = D/2$ au lieu de D, on obtient $\simeq 0{,}7$ à $0{,}8$ T)

1.2. Raillon formé de deux billes.



(4) Le roulement s'effectuant sans glissement les longueurs des arcs $\overset{\frown}{I_0I}$ et $\overset{\frown}{I_1I}$ sont égales (en rouge sur le schéma ci-contre)

Par ailleurs, les angles θ, θ_1 et $\theta_1-\theta$ étant tous positifs sur le schéma, il vient :

$$\overset{\frown}{I_0I} = \frac{D}{2} \times \theta \quad \text{et} \quad \overset{\frown}{I_1I} = \frac{D}{2} \times (\theta_1 - \theta)$$

Ainsi $\overset{\frown}{I_0I} = \overset{\frown}{I_1I} \Rightarrow \theta = \theta_1 - \theta$ soit $\boxed{\theta_1 = 2\theta}$

(5) Les actions subies par l'aimant (1) sont :

* Son poids ;
* l'action magnétique exercée par l'aimant (0) ;
* l'action de contact exercée au point I par l'aimant (0).

(6) Les actions subies par le système des 2 aimants sont :

actions extérieures
* Le poids de l'aimant (0) qui ne travaille pas car O est fixe ;
* le poids de l'aimant (1) qui est conservatif ;
* les actions de contact du support sur l'aimant (0) qui ne travaillent pas puisque celui-ci est immobile ;

actions intérieures
* les actions de contact entre les 2 aimants (actions internes) qui ne travaillent pas car elles s'appliquent en un point de vitesse nulle, ou autrement dit, car il n'y a pas de glissement de (1) sur (0) ;

* les actions d'interaction magnétique entre les deux aimants qui sont conservatives.

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne donc :

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{E_c}_{\substack{= E_{c,1} \\ \text{car } E_{c,0}=0}} + E_p^{\text{pesanteur de }(1)} + \underbrace{E_p^{\text{magnétique}}}_{\substack{\text{noté } E_B \text{ dans} \\ \text{la suite}}}\Big) = \mathcal{P}_{\substack{\text{action de contact} \\ \text{extérieures et intérieures}}} = 0$$

cl : L'énergie mécanique du système se conserve, celle-ci s'écrivant :

$$E_{c,1} + E_p^{pes,1} + E_B$$

(7) D'après le schéma (3b) reproduit qu.4, on a :

$$\vec{\mathcal{M}}_1 = \mathcal{M}\cos(\theta_1-\theta)\,\vec{e}_r + \mathcal{M}\sin(\theta_1-\theta)\,\vec{e}_\theta$$

sachant que d'après la qu.4 on a également $\theta_1-\theta=\theta$, il vient :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_1 = \mathcal{M}\left\{\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right\}}$$

(8) L'énergie potentielle d'interaction magnétique s'écrit usuellement :

$$E_B = -\vec{\mathcal{M}}_1\cdot\vec{B}_0(O_1)$$

(ou encore $-\vec{\mathcal{M}}_0\cdot\vec{B}_1(O)$ mais cette expression est moins efficace ici)

Soit $$E_B = -\mathcal{M}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}_{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta}\cdot\frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi D^3}\begin{pmatrix}2\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}_{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta}$$

i.e. $$E_B = -\frac{\mu_0\mathcal{M}^2}{4\pi D^3}\underbrace{(\underbrace{2\cos^2\theta}_{2-2\sin^2\theta} + \sin^2\theta)}_{2-\sin^2\theta} = \underbrace{-\frac{\mu_0\mathcal{M}^2}{2\pi D^3}}_{E_B(\theta=0)} + \frac{\mu_0\mathcal{M}^2}{4\pi D^3}\sin^2\theta$$

On ne tombe pas exactement sur la formule demandée. En effet, la formule usuelle écrite ci-dessus correspond à une énergie potentielle nulle lorsque $\|\vec{B}_0(O_1)\|\to 0$ i.e. quand les 2 aimants sont infiniment éloignés ; or ici il est dit que l'origine des énergies potentielles est choisie nulle dans la configuration de la figure (3a) i.e. lorsque $OO_1 = D$ et $\theta = 0$: cette convention revient à ajouter une constante additive dans l'expression précédente afin d'obtenir $E_B(\theta = 0) = 0$, ce qui conduit à :

$$\boxed{E_B = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi D^3} \sin^2\theta = \frac{1}{2} K \sin^2\theta \quad \text{où} \quad K = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{2\pi D^3}}$$

Sachant que $\mathcal{M} = \frac{\pi D^3 M_v}{6}$ (cf qu. 1), il vient :

$$K = \frac{\mu_0}{2\pi D^3} \frac{(\pi D^3)^2 M_v^2}{36} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{K = \frac{1}{72} \cdot \mu_0 \pi D^3 M_v^2}$$

(9) La formulation de cette question qui parle "d'énergies cinétiques associées à chacune des composants du mouvement" n'est pas très claire ... Il faut l'interpréter en écrivant :

$$E_{c,1} = \underbrace{\frac{1}{2} m\, v(O_1)^2}_{\text{énergie "associé au mouvement de } O_1\text{"}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2}_{\text{energie "associé à la rotation"}}$$

Rq : Cette expression trouve en réalité sa justification dans un théorème hors programme appelé <u>théorème de KOENIG</u> qui dit que pour tout solide :

$$\underset{\text{dans } R_{labo}}{E_c} = \frac{1}{2} m\, \underbrace{v(G)}_{\text{barycentre du solide}}{}^2 + \underset{\text{dans le référentiel barycentrique du solide}}{E_c}$$

Comme le mouvement du solide dans le R.B. est toujours une rotation autour de G, on a dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe (Gx) :

$$E_{c,RB} = \frac{1}{2} J_{Gx} \Omega^2$$

$\hookrightarrow$ vitesse angulaire autour de Gx.

c'est le cas ici avec $\begin{cases} J_{Gx} = J_{O_1x} \text{ noté } J \\ \Omega = \dot{\theta}_1 \end{cases}$

Ici $\vec{v}(O_1) = D\dot{\theta}\, \vec{e}_\theta$ d'où $\boxed{E_{c,1} = \frac{1}{2} m D^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2}$

(10) Comme en outre $\theta_1 = 2\theta$, on a également :

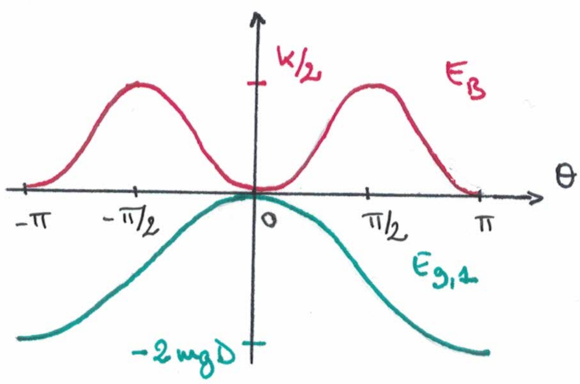
$$E_c = \frac{1}{2} m D^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \times 4 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(mD^2 + 4\underbrace{J}_{\frac{mD^2}{10}}\right)\dot{\theta}^2$$

Soit : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J' \dot{\theta}^2 \quad \text{avec} \quad J' = \frac{7}{5} m D^2}$

(11) $E_{g,1} = m g \underbrace{z(O_1)}_{D\cos\theta} + \text{constante}$ qui doit être $= 0$ si $\theta = 0$

d'où $\boxed{E_{g,1} = mgD(\cos\theta - 1)}$

(12)



* Du point de vue du poids, $\theta = 0$ est une position d'éq instable, la posit d'éq stable étant en π.

* Du point de vue magnétique, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont deux posit° d'équilibre stable.

* On peut donc conjecturer que, si l'aimantation est suffisamment forte, il existera un équilibre stable en $\theta = 0$ malgré le poids, tandis que si elle est trop faible, l'équilibre en $\theta = 0$ sera instable et la bille (1) roulera sur la bille (0) jusqu'à heurter le support.

* On peut analyser ceci plus quantitativement ; au voisinage de $\theta = 0$ on a :

$$E_B \simeq \frac{1}{2} K \theta^2 \quad \& \quad E_{g,1} \simeq -mgD\,\theta^2/2$$

Soit $E_{\substack{\text{potentielle}\\ \text{totale}}} = \frac{1}{2}(K - mgD)\,\theta^2$ min en 0 si $K - mgD > 0$

Pour obtenir un équilibre stable en $\theta = 0$ il faut donc que $\underline{K > mgD}$

(13) Puisque d'après la question 6 l'énergie mécanique du système se conserve, on a :

$$E_{c,1} + E_B + E_{g,1} = \frac{1}{2} J' \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K \sin^2\theta + mgD(\cos\theta - 1) = \text{Constante}$$

D'où en dérivant : $J' \dot{\theta}\ddot{\theta} + K \sin\theta \cos\theta \, \dot{\theta} - mgD \sin\theta \, \dot{\theta} = 0$

i.e. : $$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{mgD}{J'} \sin\theta \left(1 - \frac{K}{mgD} \cos\theta\right)}$$

(14) • Effectuons un DL_1 en θ autour de $\theta = 0$:

$$\ddot{\theta} \simeq \frac{mgD}{J'} \Big(1 - \underbrace{\frac{K}{mgD}}_{S}\Big) \times \theta$$

• $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si et seulement si les petits mouvements autour de cette posit° sont des oscillations

Il faut pour cela une équa. diff. du type $\ddot{\theta} = -\omega_1^2 \theta$ (cf notat° introduite qu 16) et non $\ddot{\theta} = +\omega_1^2 \theta$, donc il faut

$$\boxed{S > 1}$$ (cf condit° déjà obtenue qu. 12)

• Interprétat° de S :

$$S = \frac{K}{mgD} = \frac{\frac{1}{2} K \theta^2}{\frac{1}{2} mgD \theta^2} \underset{\text{qu.12}}{=} \frac{E_B(\theta)}{E_{g,1}(\theta)} \Bigg|_{\text{au voisinage de } \theta = 0}$$

S est donc le rapport des énergies magnétique et gravitationnelles typiquement mises en jeu lors d'un mouvement autour de $\theta = 0$

Ainsi $\begin{cases} S \gg 1 \leftrightarrow \text{Effets magnétiques dominants d'où un éq stable en } \theta = 0 \\ S \ll 1 \leftrightarrow \text{Effets gravitationnels dominants d'où un éq instable en } \theta = 0 \end{cases}$

(15) Pour $S \simeq 100$, on s'attend donc à un équilibre stable en $\theta = 0$

(16) • En réutilisant l'équation linéarisée de la qu. 14 :

$$\ddot{\theta} = - \underbrace{\frac{mgD}{J'}(S-1)}_{= \omega_1^2} \theta$$ oscillateur harmonique de pulsation ω_1

or $J' = \frac{7}{5} mD^2$ d'où $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{5}{7}(S-1)\frac{g}{D}} \underset{S \gg 1}{\simeq} \sqrt{\frac{5}{7} S \frac{g}{D}}}$

(erreur de 0,5% ≪ erreur associée à l'approx $g = 10\,m s^{-2}$!)

• $f_1 = \omega_1 / 2\pi \simeq \left(\frac{5}{7}\, 100\, \frac{10}{13.10^{-3}}\right)^{1/2} \frac{1}{2\pi}$

$$f_1 = \sqrt{\frac{5}{91} 10^6}\, \frac{1}{2\pi} = \underbrace{\sqrt{\frac{50}{910}}}_{\simeq \sqrt{\frac{49}{900}} = \frac{7}{30}} 10^3 \frac{1}{2\pi} \simeq \frac{7}{3} \times \frac{100}{2\pi} \simeq \frac{7 \times 100}{18{,}8}$$

$\pi \to 3{,}14$; $18{,}8 \to \simeq 19$

$\underline{f_1 \simeq 37\ Hz}$ ou plus grossièrement $3\pi \simeq 10$

$$\Rightarrow f_1 \simeq \frac{7}{2} \times \frac{100}{10} = \underline{35\ Hz}$$

1.3. Edifice formé de N billes

(17) L'hypothèse H_α impose un mouvement "en bloc" des billes que l'on peut voir comme une <u>ARQS</u>. En particulier, l'existence d'une <u>onde d'oscillation au sein de l'édifice</u> de billes <u>ne peut pas être pris en compte</u> sans cette hypothèse.

(18) Le champ magnétique créé par une bille aimantée diminue en $1/r^3$ avec la distance r à cette bille ; il en est de même de l'énergie d'interact° entre 2 billes vis à vis de la distance qui les sépare.

Ainsi $$\frac{E_{B,\,0/1}}{E_{B\,0/2}} \approx \frac{1/D^3}{1/(2D)^3} = 8$$

Ce qui justifie l'hypothèse H_{ppv} (même si on voit que les contributions autres que celles des plus proches voisins ne sont pas totalement négligeables).

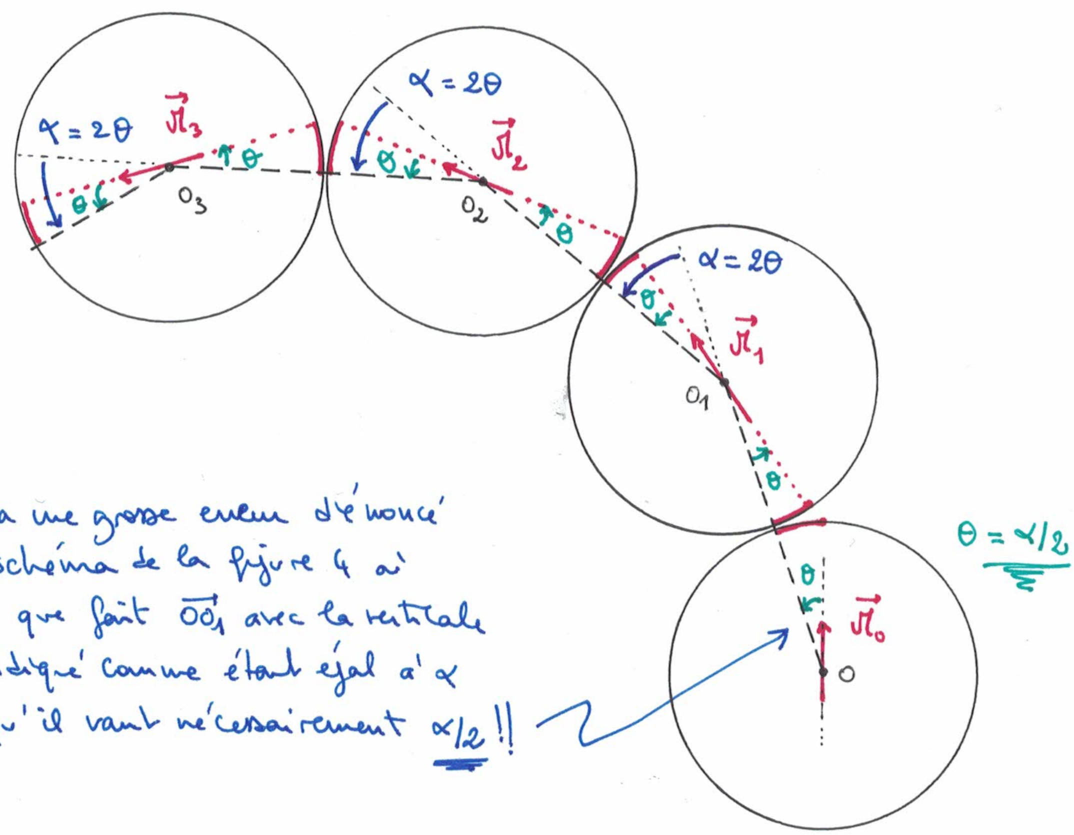
19 Compte tenu de l'hypothèse H_{ppv}, l'énergie magnétique totale de l'édifice peut s'écrire :

$$E_{BN} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{E_{B,\,i|i-1}}_{\text{énergie magnétique d'interact° de l'aimant } i \text{ avec l'aimant } i-1}$$

Or, l'hypothèse H_α revient à dire que la position relative de la bille i vis à vis de la bille $i-1$ est indep de i, donc que l'énergie magnétique $E_{B,i|i-1}$ est la même $\forall i$. On a donc :

$$E_{BN} = N \times \underbrace{E_{B,\,1|0}}_{\text{calculée question 8}} = \frac{1}{2} K \sin^2\theta$$

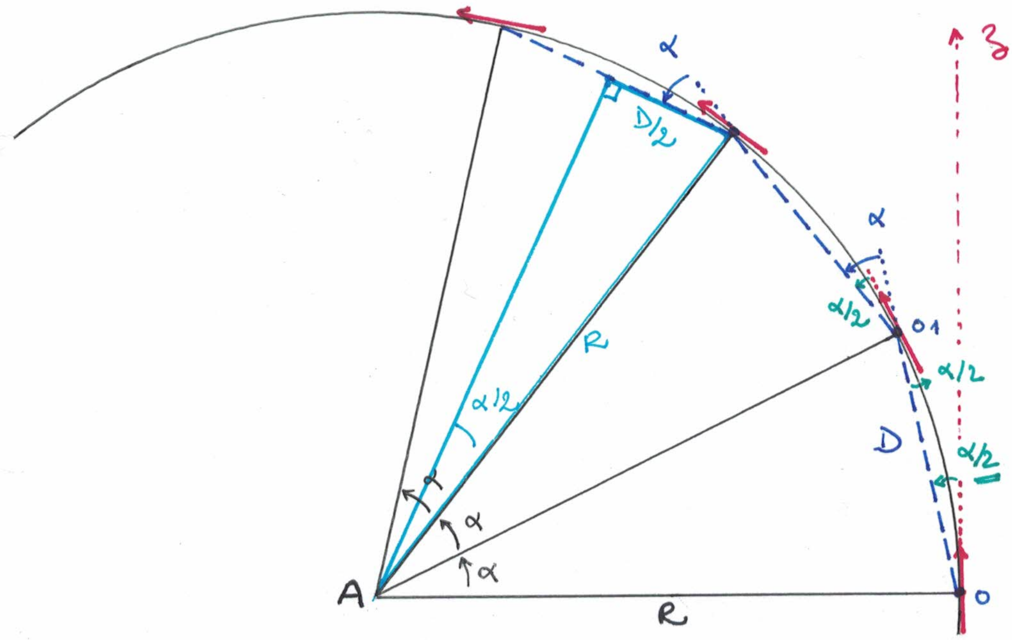
où θ est l'angle que $\overrightarrow{O_iO_{i+1}}$ fait avec $\vec{\mathcal{M}}_i$ et vaut donc $\underline{\alpha/2}$ comme le montre le schéma ci-dessous qui généralise celui fait qu. 4, mais avec 4 aimants :



⚠ Il y a une grosse erreur d'énoncé sur le schéma de la figure 4 où l'angle que fait $\overrightarrow{OO_1}$ avec la verticale est indiqué comme étant égal à α alors qu'il vaut nécessairement $\underline{\alpha/2}$!!

Rq : Autre façon de le voir : si $\forall i$ $(\overrightarrow{O_{i-1}O_i}, \overrightarrow{O_iO_{i+1}}) = \alpha$, alors $\forall i$ $(\vec{\mathcal{M}}_{i-1}, \vec{\mathcal{M}}_i) =$
et si on se réfère à la qu 4 : $(\vec{\mathcal{M}}_0, \vec{\mathcal{M}}_1) = \theta_1 = 2\theta$, soit $\alpha = 2\theta$.

Rq' : on nous dit que les centres des billes se situent sur un cercle de centre A et de rayon R. Si on essaie de schématiser cette configuration en dessinant les moments $\vec{\mathcal{M}}_i$, on aboutit nécessairement à la figure ci-dessous où les $\vec{\mathcal{M}}_i$ sont tangents au cercle et où il apparaît clairement que $(\vec{u}_z, \vec{OO_1}) = \underline{\alpha/2}$ et non α :



CCL : $\boxed{E_{B,N} = N \times \frac{1}{2} K \sin^2(\alpha/2)}$

or, compte tenu que $|\alpha| \ll 1$: $\boxed{E_{B,N} \simeq \frac{1}{8} N K \alpha^2}$

Rq : Le schéma ci-dessus montre que $R \sin \alpha/2 = D/2$ (triangle bleu) d'où en linéarisant : $R\alpha/2 \simeq D/2 \rightarrow \alpha \simeq D/R$

En reportant dans l'expression de $E_{B,N}$: $\underline{E_{BN} \simeq \frac{1}{8} NKD^2 \times \frac{1}{R^2}}$

qui est bien de la forme $\frac{1}{2} K_B \frac{1}{R^2}$ où $\underline{K_B = \frac{1}{4} NKD^2 \geq 0}$.

(20) Pour traiter ces questions et les suivantes, le plus simple est de s'appuyer sur le schéma ci-dessous, qui n'est autre qu'une version simplifiée de celui de la figure 4.

⚠ L'erreur de la figure 4 où $(\vec{u}_z, \vec{OO_1}) = \alpha$ au lieu de $\alpha/2$ est ici très pénalisante et conduit à des incohérences !

$$\Delta z_1 = z_1 - z_{1,ref} = D\cos\alpha/2 - D \underset{DL_2 \text{ en } \alpha}{\simeq} -\frac{D}{2}\times\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \boxed{-\frac{1}{8}D\alpha^2}$$

21

$$\Delta z_2 = z_2 - z_{2,ref} = \underbrace{D\cos\frac{\alpha}{2}}_{z_1} + \underbrace{D\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\right)}_{z_2 - z_1} - 2D$$

$$\Delta z_2 \simeq D\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}_{\frac{1}{8}\alpha^2}\Big) + D\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2}_{\frac{9}{8}\alpha^2}\Big) - 2D$$

$$\boxed{\Delta z_2 \simeq -\frac{10}{8}D\alpha^2}$$

22

$$\Delta z_n = z_n - z_{n,ref} = (z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1}) - (z_{n-2}) + \dots + (z_1 - \underbrace{z_0}_{=0}) - n\times D$$

$$= \Big\{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(z_k - z_{k-1})}_{D\cos\left(\frac{\alpha}{2}+(k-1)\alpha\right)}\Big\} - n\times D$$

$$= D\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right) \simeq D\left(1 - \frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2\right)$$

donc $\boxed{\Delta z_n \simeq -\frac{D}{2}\alpha^2 \times \sum_{k=1}^{n}(k-1/2)^2}$

Et maintenant, vive le calcul...

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1/2)^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1/4}_{\frac{n}{4}} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{12}$$

(Il y a + astucieux ? Je ne vois pas...)

CCL : $\boxed{\Delta z_n = -\frac{D\alpha^2}{6}n\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$

Redonne bien les expressions des qu 20, 21 pour $n = 1$ et 2 ...

Rq : Si on avait utilisé l'approx donnée qu. 23, on aurait obtenu :

$\sum_1^n k^2 = \int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}$ ce qui redonne au - le terme dominant si on ne connait pas $\sum_1^n k^2$ ...

23 $E_{gN} = \sum_{n=1}^{N} mg\,\Delta z_n = -mgD\frac{\alpha^2}{6}\sum_{n=1}^{N}\left(n^3 - \frac{n}{4}\right)$

or $\sum_1^N n^3 \simeq \int_0^N x^3\,dx = \frac{N^4}{4}$

& $\sum_1^N -\frac{n}{4} = -\frac{1}{4}\,\frac{N(N+1)}{2}$ qui doit logiquement être négligé compte tenu de l'approx grossière sur le calcul de $\sum_1^N n^3$, dont le résultat exact contient vraisemblablement des termes en N^p où $p<4$ qui sont négligeables devant N^4 si $N \gg 1$ (condit° de validité de l'approximat° $\Sigma = \int$)

Donc je dirais que $\boxed{E_{gN} \simeq -mgD\frac{\alpha^2}{24}N^4}$

Correct si $N \gg 1$

24 L'énergie potentielle totale de l'édifice s'écrit donc, au voisinage de $\alpha = 0$:

$$E_{p,TOT} = E_{BN} + E_{gN} = \frac{1}{8}NK\alpha^2 - mgD\frac{\alpha^2}{24}N^4$$

soit : $$E_{p,TOT} = mgD\frac{\alpha^2}{24}N^4 \times \left(3 \times \underbrace{\frac{K}{mgD}}_{S} \times \frac{1}{N^3} - 1\right)$$

Pour obtenir un minimum de $E_{p,TOT}$ en $\alpha = 0$, il faut donc que

$$\frac{3S}{N^3} - 1 > 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{S > \frac{N^3}{3} \quad \text{ou} \quad N < \sqrt[3]{3S}}$$

- Ceci ne donnera un résultat valable que si $\sqrt[3]{3S} \gg 1$; en effet, dans ce cas, le nombre critique $N_c = \lfloor \sqrt[3]{3S} \rfloor \gg 1$ comme l'impose la validité de l'approximation $\Sigma = \int$.

25 Avec $S = 100$ $\quad N_c = \lfloor \sqrt[3]{3S} \rfloor = \underline{\underline{6}}$ $\quad (6^3 = 216,\ 7^3 = 343)$

Malheureusement on ne trouve pas $N_c \gg 1$ donc ceci n'est qu'une estimation grossière ...

2. Instabilité de flambage d'une lame

(26) Il est certain que cette loi linéaire ne peut pas être valable $\forall u$; en particulier pour des valeurs de u "élevées" on peut imaginer une déformat° irréversible du matériau (la loi de Hooke étant au contraire réversible en ce sens que si $F \uparrow$ $u \uparrow$ puis si $F \downarrow$ $u \downarrow$ en revenant à 0 pour $F=0$) voire une rupture. Ainsi, on peut raisonnablement penser que la loi de Hooke n'est valable que pour des "faibles élongations u", typiqt $u \ll a$.

Rq : . D'un point de vue plus mathématique, on peut voir la loi de Hooke comme un DL_1 en u au voisinage de 0 d'une loi $F(u)$ générale non linéaire, voire d'une loi présentant de l'hystérésis.

. Le domaine de validité de la loi de Hooke s'appelle le "domaine d'élasticité" du matériau. Pour des élongations plus élevées la loi devient non linéaire, puis pour des élongations encore plus fortes la déformation devient irréversible et on parle de "déformat° plastique".

(27) En changeant légèrement de notation, on peut écrire la loi de Hooke

$$F = \frac{YS}{a}\, u \equiv k\,(\ell - \ell_0) \qquad \begin{pmatrix} a \equiv \ell_0 \\ a' \equiv \ell = \ell_0 + u \end{pmatrix}$$

$\vec{F} = F\,\vec{e}_\Delta$ étant la force à appliquer sur la tige, la force que la tige exerce sur l'opérateur (force de rappel) est

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_\Delta$$

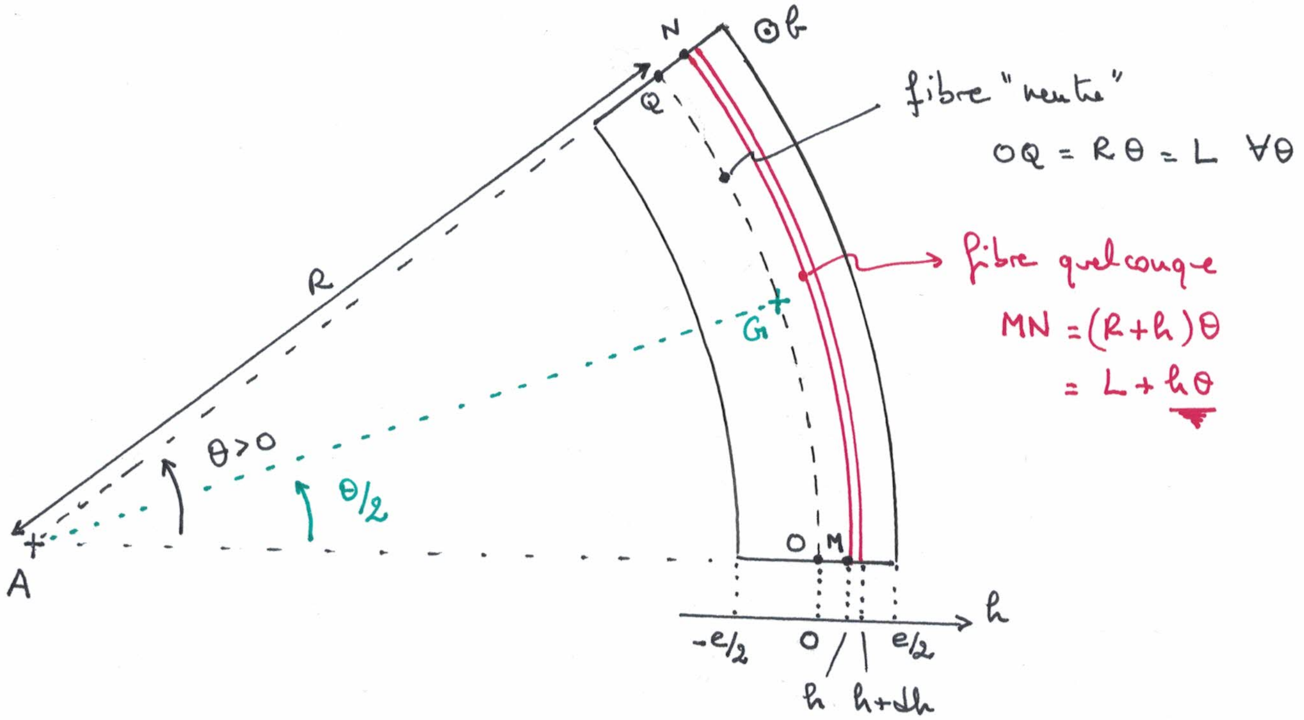
c'est donc l'exact analogue d'une force de rappel d'un ressort. À ce titre, l'énergie potentielle élastique s'écrit :

$$E_{y,b} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \quad \text{soit ici} \quad \boxed{E_{y,b} = \frac{YS}{2a}u^2}$$

Rq : on peut le retrouver par un calcul direct d'après la définit° qui en est donné dans l'énoncé :

$$E_{y,s} = W_{\substack{\text{opérateur qui} \\ \text{allonge le barreau} \\ \text{de } a \text{ à } a' = a+u}} = \int_{\substack{\text{Tract°} \\ a \to a'}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}_B \;\; (A \text{ est fixe}) = \int_{u'=0}^{u} \frac{YS}{a}\, u'\,du' = \frac{YS}{2a}u^2$$

(28) Le lien entre la situat° de flexion schématisée figure 4 et la situation de traction représentée figure 5 n'est pas trivial. Il réside dans le fait que, puisque la fibre "neutre" OQ est de longueur constante, pour $\theta > 0$ une fibre MN située en $h > 0$ [respectivement en $h < 0$] est allongée [est comprimée] :



On peut alors calculer E_y en découpant la lame en tranches infinitésimales $[h\,;h+dh]$ dont on peut exprimer l'énergie potentielle élastique dE_y selon la loi de Hooke, puis en sommant sur toutes ces tranches :

* Pour la tranche $[h\,;h+dh]$ $\begin{cases} u = MN - L = h\theta \\ \text{"}a\text{"} = L \quad (\text{longueur à force nulle}) \\ \text{"}S\text{"} = b\,dh \quad (\text{que l'on notera donc } dS \text{ plutôt que } S\ldots) \end{cases}$

d'où $\quad dE_y = \dfrac{1}{2}\dfrac{y\,b\,dh}{L}(h\theta)^2 \qquad$ (cf qu. 27)

* Pour la lame entière :

$$E_y = \int_{h=-e/2}^{e/2} \frac{y b \theta^2}{2L} h^2 dh = \frac{y b \theta^2}{2L}\underbrace{\left[\frac{h^3}{3}\right]_{-e/2}^{e/2}}_{e^3/12}$$

i.e. $\boxed{E_y = y\,\dfrac{b e^3}{24 L}\,\theta^2}$

Rq : La fibre neutre montre que $\underline{\theta = L/R}$ donc :

$$E_y = Y \frac{be^3}{24L} \frac{L^2}{R^2} \quad \text{qui s'écrit bien} \quad \frac{1}{2} K_y \frac{1}{R^2} \quad \text{avec} \quad K_y = \frac{be^3 L Y}{12}$$

29 La condit° donnée qu. 26 s'écrit ici : $\underline{|u| \ll L}$

or $u = h\theta = hL/R$ d'où $|h| \ll |R| \quad \forall h \in [-e/2 ; e/2]$

ce qui donne finalement (sans se soucier du facteur 1/2) : $\boxed{e \ll |R|}$

30 En appelant G le barycentre de la lame, on a :

* $z_{G_0} = L/2$ dans la posit° de référence
* $z_G = R \sin \theta/2$ en flexion (valable $\forall \theta$ car R et θ sont algébriques et de même signe, le schéma étant fait avec R et $\theta > 0$)

$$\underset{\substack{DL_3 \\ \text{en } \theta \ (|\theta| \ll 1)}}{\simeq} R \times \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 \right)$$

Ainsi $\underline{E_g = mg(z_G - z_{G_0})} \simeq mg \left\{ \frac{R\theta}{2} - \frac{R\theta^3}{48} - \frac{L}{2} \right\}$

et compte tenu que $\underline{R = L/\theta}$, $\frac{R\theta}{2} = \frac{L}{2}$ d'où $E_g = -mgL \frac{\theta^2}{48}$

Enfin, $m = \rho \times ebL$ d'où finalement : $\boxed{E_g = -\rho g \frac{ebL^2}{48} \theta^2}$

31 Pour $|\theta|$ faible, l'énergie potentielle totale s'écrit donc :

$$E_{p,TOT} = E_Y + E_g = \left(Y \frac{be^3}{24L} - \rho g \frac{ebL^2}{48} \right) \theta^2$$

La configuration est stable si $\theta = 0$ correspond à un MINIMUM de $E_{p,TOT}$, donc si

$$Y \frac{be^3}{24L} - \rho g \frac{ebL^2}{48} > 0$$

qui s'écrit : $\frac{L^3}{e^3} < \frac{2Y}{\rho g e}$ soit $\boxed{\frac{L}{e} < \frac{L_c}{e} = \left(\frac{2Y}{\rho g e} \right)^{1/3}}$

[Y et $\rho g e$ sont des énergies volumiques, L_c/e est bien sans dimension]

↳ b n'intervient pas car la flexion étudiée se fait sans modification de la coordonnée x des points de la lame ; de ce fait, b est simplement un "facteur de taille" sans influence sur cette flexion.

(Les deux énergies mises en jeu sont toutes deux proportionnelles à b et b ne favorise donc pas l'une ou l'autre)

32

• Tout d'abord, l'analyse dimensionnelle ne peut donner une expression qu'à un facteur numérique près. On ne peut donc pas obtenir F mais, au mieux, obtenir

$$\frac{L_c}{e} = \underset{\text{adim.}}{\text{Constante}} \times \left(\frac{y}{\rho g e}\right)^{1/3}$$

• On peut maintenant reformuler la question comme suit :

Si on pose $\frac{L_c}{e} = F = k \times y^\alpha \rho^\beta g^\gamma e^\delta$, avec k sans dim, une analyse dimensionnelle donne-t-elle une unique solution pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$?

↳ F étant sans dimension, $y^\alpha \rho^\beta g^\gamma e^\delta$ doit l'être aussi.

or $\begin{cases} [y] = ML^{-1}T^{-2} & \text{(par la loi de Hooke)} \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [g] = LT^{-2} \\ [e] = L \end{cases}$ d'où $M^{\alpha+\beta} L^{-\alpha-3\beta+\gamma+\delta} T^{-2\alpha-2\gamma} = 1$

D'où le système $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ -\alpha-3\beta+\gamma+\delta=0 \\ -2\alpha-2\gamma=0 \end{cases}$

↳ On obtient un système de 3 équat° à 4 inconnues qui n'admet donc pas de solution unique ! F ne pourra donc pas être déterminé par analyse dimensionnelle (même au facteur numérique k près).

↳ Si on va + loin dans la résolut° on obtient :

$\begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ \delta = -\alpha \end{cases}$ Ainsi, on peut affirmer que

$$\boxed{F = k \times \left(\frac{y}{\rho g e}\right)^\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ et } k \text{ sont indéterminés.}}$$

(33) • La masse volumique du papier peut-être estimée assez précisément si on a déjà lu sur un cahier ou une rame de feuille l'indication du nombre de grammes par m^2 qui est systématiqt indiqué et vaut typiquement 80 g m^{-2}

En notant S la surface d'une feuille et $e = 10^{-4}$ m son épaisseur, sa masse m vérifie :

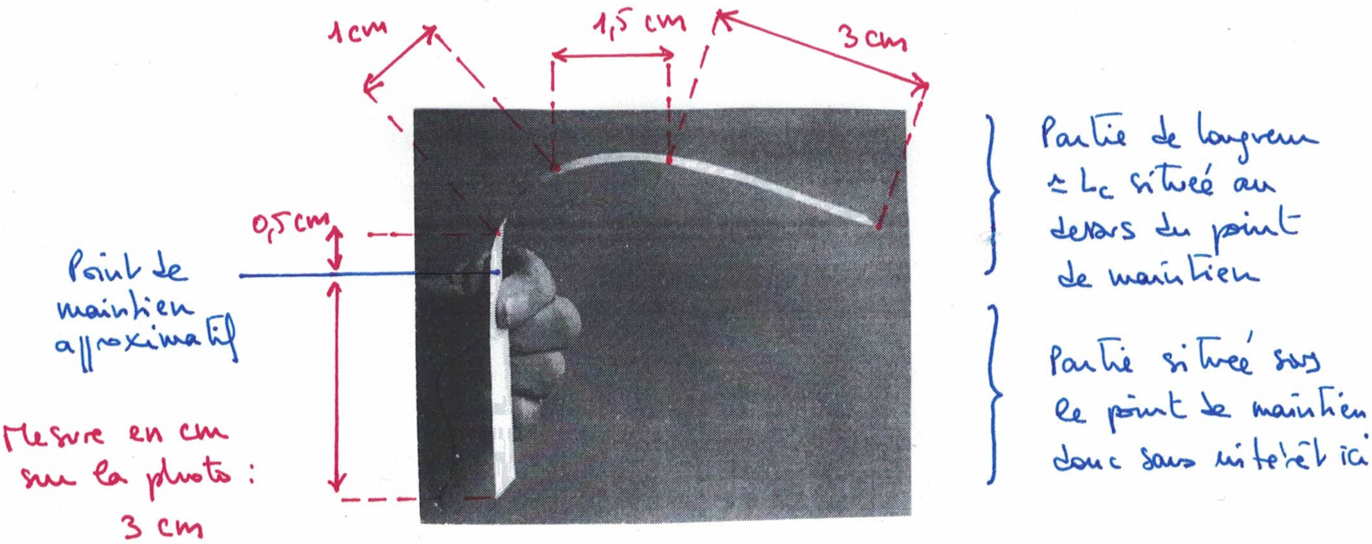
$$m = \rho \times S \times e \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{m}{S} \times \frac{1}{e} = \frac{80\ 10^{-3} \text{ kg m}^{-2}}{10^{-4} \text{ m}}$$

J'évalue donc $\underline{\underline{\rho = 8\ 10^2 \text{ kg m}^{-3}}}$

dit 7 à $8\ 10^2$!)

Rq : Si on n'a pas pensé à cela, on ne peut que donner un ordre de grandeur, en restant proche de celui de l'eau soit 10^3 kg m^{-3} ; comme le carton flotte sur l'eau, on peut imaginer que le papier sec flotte également (si le papier est mouillé ça change tout évidemment, ce qui rend l'expérience délicate) et proposer $\rho_{papier} \lesssim 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ...

• Il faut ensuite évaluer L_c à partir de la photo de la figure 8.



↳ Longueur totale approximative de la bande sur la photo :

$3 + 0,5 + 1 + 1,5 + 3 = 9$ cm

↳ Longueur correspondant à $L_c = 6$ cm

CCL : $L_c = 2/3$ de la longueur réelle de la bande, qui est la longueur (et non la largeur) de la feuille A4 soit 29,7 cm.

$$L_c \simeq \frac{2}{3} \times \underbrace{29{,}7\text{ cm}}_{\simeq 30} \rightarrow \boxed{L_c \simeq 20\text{ cm}}$$

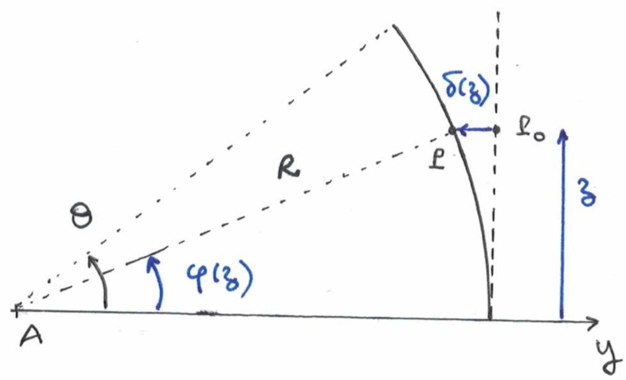
- Enfin, on accède à Y via la formule de la qu. 31 :

$$\boxed{Y = \frac{\rho g L_c^3}{2e^2}} \simeq \frac{8\,10^2 \times 10 \times (2\,10^{-1})^3}{2 \times (10^{-4})^2} = 3{,}2\;10^9 \text{ Pa}$$

ou plus raisonnablement $\boxed{Y \simeq 3\;10^9 \text{ Pa}}$

(Wikipedia dit 3 à 4 10^9 Pa !)

(34) Refaisons le schéma ; en introduisant l'angle $\varphi(z)$ qui repère P.



↳ on voit que $\theta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi(z) > 0 \\ \delta(z) < 0 \\ R > 0 \end{cases}$

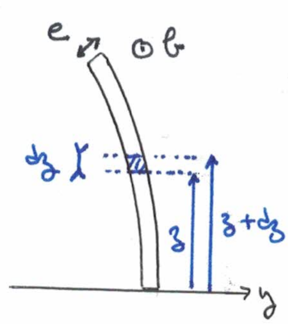
↳ $R = L/\theta$

↳ $R \underbrace{\sin\varphi(z)}_{\simeq \varphi(z)} \simeq z \rightarrow \varphi(z) \simeq z/R$

↳ $\delta(z) = -\left(R - R\cos\varphi(z)\right) \simeq -R\,\varphi(z)^2/2$ (le − a été ajouté pour avoir $\delta < 0$ si $R > 0$)

CCL : $\delta(z) = -z^2/2R$ ou encore $\boxed{\delta(z) = -\frac{z^2}{2L} \times \theta}$

(35) Une tranche de la lame comprise entre z et $z + dz$



* est de masse $dm = \rho\, b e\, dz$
* se déplace à la vitesse $\vec{v}(z) = \frac{d}{dt}(\delta(z))\,\vec{e}_y$

et possède donc une énergie cinétique "de translat°" :

$$dE_{ct} = \frac{1}{2}\rho b e dz \underbrace{\left(\frac{d}{dt}(\delta(z))\right)^2}_{= -\frac{z^2}{2L} \times \dot{\theta}} = \frac{1}{2}\rho b e dz\, \frac{z^4}{4L^2}\,\dot{\theta}^2$$

Ainsi $E_{ct} = \int_{z=0}^{L} dE_c = \frac{1}{8}\rho b e \frac{\dot{\theta}^2}{4L^2}\int_0^L z^4\,dz$ i.e. $\boxed{E_{ct} = \frac{1}{40}\rho b e L^3 \dot{\theta}^2}$

36 $$\frac{E_{cr}}{E_{ct}} = \frac{40}{72} \cdot \frac{\rho b e^3 L \dot{\theta}^2}{\rho b e L^3 \dot{\theta}^2} = \frac{5}{9} \frac{e^2}{L^2} \underline{\ll 1 \text{ si } e \ll L}$$

37 L'énergie mécanique $\underbrace{E_c}_{\simeq E_{ct}} + \underbrace{E_{p,TOT}}_{\text{calculée qu. 31}}$ de la lame se conserve, donc :

$$\frac{1}{40} \rho e b L^3 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{Y b e^3}{24 L} - \rho g \frac{e b L^2}{48} \right) \theta^2 = \text{constante } 1$$

$\div \frac{\rho e b L^3}{40}$

$$\dot{\theta}^2 + \left(\underbrace{\frac{5}{3} \frac{Y}{\rho} \frac{e^2}{L^4}}_{\frac{g L_c^3}{2 L^4}} - \frac{5}{6} \frac{g}{L} \right) \theta^2 = \text{constante } 2$$

car d'après la qu. 33 $Y = \frac{\rho g L_c^3}{2 e^2}$

Ainsi : $$\dot{\theta}^2 + \frac{5}{6} \frac{g}{L} \left(\left(\frac{L_c}{L} \right)^3 - 1 \right) \theta^2 = \text{constante } 2$$

et en dérivant on obtient bien l'équat d'un osc. harmonique :

(d/dt puis $\div 2\dot{\theta}$)

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \\ &\text{avec } \omega^2 = \frac{5}{6} \frac{g}{L} \left(\left(\frac{L_c}{L} \right)^3 - 1 \right) \\ &\qquad = \frac{5}{6} \frac{g}{L} \left(\frac{1}{q^3} - 1 \right) \end{aligned}}$$

>0 si $L < L_c$ ce qui est bien supposé ici !

38 L'équation précédente est toujours valable si $L > L_c$ / $q > 1$, dans la limite où θ reste $\ll 1$, mais il faut l'écrire :

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\tau^2} \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau^2} = \frac{5}{6} \frac{g}{L} \left(1 - 1/q^3 \right) \underline{> 0}$$

Cette équat° ayant des solutions en $\exp(\pm t/\tau)$, on voit que le temps caractéristique de déstabilisation de la lame est

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{6}{5} \frac{L}{g} \frac{1}{1 - 1/q^3}}}$$

↳ Ce temps est d'autant plus court que q est élevé / que L est $> L_c$ et lorsque $q \to 1^+$ / $L \to L_c^+$ $\tau \to \infty$: le système $\to$ stabilité.

3. Le chant de la flûte à champagne.

(39) • La fonction $a(\theta,t)$ doit nécessairement être 2π-périodique vis à vis de θ.

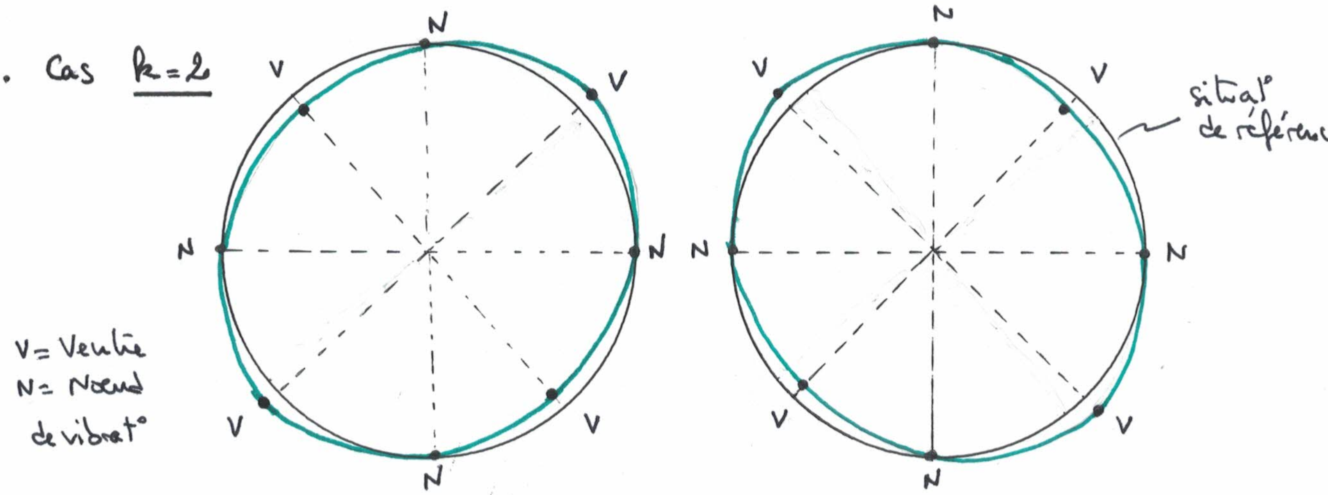
Ainsi, on doit avoir $\forall k \quad \sin(k(\theta+2\pi)) = \sin k\theta$

soit $k \in \mathbb{Z}$

Comme par ailleurs k est défini dans $\mathbb{R}_+^*$, on a finalement $\boxed{k \in \mathbb{N}^*}$

• Le découplage des variables de temps et d'espace indique qu'il s'agit d'une onde <u>STATIONNAIRE</u>.

• Cas <u>$k=2$</u>



Déformation à t / $\varepsilon(t) > 0$ Déformation à t / $\varepsilon(t) < 0$

(40) L'énergie potentielle élastique est une grandeur positive, quelle que soit la déformation, donc on doit avoir

$dE_y > 0$ que R soit $> a_0$ ou $< a_0$

↳ Seule la <u>formule (b)</u> assure cette propriété !

(41) • Ici, à t fixé : $r(\theta) = a_0(1+\varepsilon \sin k\theta)$

donc $\begin{cases} r'(\theta) = \dfrac{dr}{d\theta} = a_0 k \varepsilon \cos k\theta \\ r''(\theta) = \dfrac{d^2r}{d\theta^2} = -a_0 k^2 \varepsilon \sin k\theta \end{cases}$

• Ainsi $r^2 + r'^2 = a_0^2\left(1 + 2\varepsilon \sin k\theta + \underbrace{\varepsilon^2 \sin^2 k\theta + k^2\varepsilon^2\cos^2 k\theta}_{\text{ordre 2 en } \theta}\right)$

& $\underbrace{(r^2+r'^2)^{3/2} \simeq a_0^3(1+3\varepsilon \sin k\theta)}_{\text{DL1 en } \theta}$

- De même $r^2+2r'^2 \underset{DL_1}{\simeq} a_0^2(1+2\varepsilon \sin k\theta)$

et quand on calcule rr'' à l'ordre 1, r n'est conservé qu'à l'ordre 0 puisque r'' est d'ordre 1 :

$$rr'' \underset{DL_1}{\simeq} a_0 \times (-a_0 k^2 \varepsilon \sin k\theta)$$

ainsi $r^2+2r'^2-rr'' \simeq a_0^2(1+2\varepsilon \sin k\theta + k^2\varepsilon \sin k\theta)$

et $\underline{(r^2+2r'^2-rr'')^{-1} \simeq \frac{1}{a_0^2}(1-(2+k^2)\varepsilon \sin k\theta)}$

- Finalement $\boxed{R(\theta,\varepsilon) = \frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''} \underset{\substack{DL_1 \\ \text{en } \varepsilon}}{\simeq} a_0\left(1+(1-k^2)\varepsilon \sin k\theta\right)}$

Rq : Pour $k=2$ il vient $R = a_0(1-3\varepsilon \sin 2\theta)$

qui indique que si $\varepsilon \sin 2\theta > 0$ alors $R < a_0$; $\varepsilon \sin 2\theta < 0$; $R > a_0$ } conforme au graphe qu. 39 !

Pour $k=1$ $R(\theta,\varepsilon) \underset{DL_1}{\simeq} a_0 \; \forall\theta$ ... Il faudrait pousser le DL à l'ordre 2 en θ !!

(42) D'après les 2 qu. précédents, on peut écrire :

$$E_y = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} k_y \left(\frac{1}{R(\theta)} - \frac{1}{a_0}\right)^2 d\theta$$

or $\frac{1}{R(\theta)} \underset{\substack{DL_1 \\ \text{en } \varepsilon}}{\simeq} \frac{1}{a_0}(1-(1-k^2)\varepsilon \sin k\theta)$

d'où $E_y = \frac{1}{2} k_y \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(1-k^2)^2\varepsilon^2}{a_0^2} \sin^2 k\theta \, d\theta$

or $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 k\theta \, d\theta = \frac{1}{2}$ donc $E_y = \frac{\pi}{2} k_y \frac{\varepsilon^2(1-k^2)^2}{a_0^2}$

ou encore : $\boxed{E_y = \frac{\pi}{24} \frac{Y b e^3}{a_0} \varepsilon^2 (1-k^2)^2}$ (pour $k \neq 1$ ...)

Rq : ε mesurant l'écart entre R et a_0, on constate qu'un calcul de E_y à l'ordre 2 en ε ne nécessite de calculer R qu'à l'ordre 1, d'où les indicat° de l'énoncé. Il en sera de même pour E_c qu. 43.

(43) Par hypothèse le mouvement de chaque point M du verre est radial. Une tranche infinitésimale $[\theta;\theta+d\theta]$ du verre a une vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\big(a(\theta,t)\big)\,\vec{u}_r = a_0\,\dot{\varepsilon}(t)\,\sin k\theta\;\vec{u}_r$$

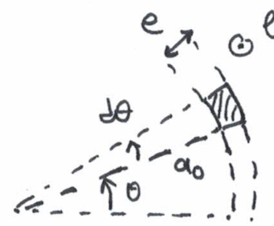


schéma au repos en coupe

et une énergie cinétique :

$$dE_c = \frac{1}{2}\,dm\,v^2 \qquad \text{où} \qquad dm = \rho\,e\,b\,a_0\,d\theta$$

D'où
$$E_c = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\rho e b a_0^3\,\dot{\varepsilon}^2(t)\sin^2 k\theta\,d\theta$$

ce qui donne :
$$\boxed{E_c = \frac{\pi}{2}\rho e b a_0^3\,\dot{\varepsilon}^2(t)}$$

(44) La conservation de l'énergie mécanique, valable en l'absence de tout phénomène dissipatif (hypothèse que nous faisons ici afin d'obtenir simplement la pulsation propre des oscillations), conduit à :

$$E_c + E_y + \underbrace{E_g}_{\text{négligé par hypothèse}} = \text{constante } 1$$

ie.
$$\frac{\pi}{2}\rho e b a_0^3\,\dot{\varepsilon}^2(t) + \frac{\pi}{24}\frac{y b e^3}{a_0}(1-k^2)^2\,\varepsilon^2(t) = \text{Constante } 1$$

$\div \frac{\pi}{2}\rho e b a_0^3$
$$\dot{\varepsilon}^2(t) + \frac{1}{12}\frac{y}{\rho}\frac{e^2}{a_0^4}(1-k^2)^2\,\varepsilon^2(t) = \text{Constante } 2$$

$\frac{d}{dt}$ et $\div 2\dot{\varepsilon}$
$$\boxed{\ddot{\varepsilon}(t) + \frac{1}{12}\frac{y}{\rho}\frac{e^2}{a_0^4}(1-k^2)^2\,\varepsilon(t) = 0}$$

C'est éq. d'un osc. harmonique de pulsation $\boxed{\omega_k = \sqrt{\frac{y}{12\rho}}\,\frac{e}{a_0^2}\,|1-k^2|}$

Rq : Comme expliqué précédemment, cela n'est valable que si $k \neq 1$. Si $k=1$ il faut passer le DL à l'ordre 2 en ε pour obtenir $\mathcal{R}$ et on obtient alors E_y en ε^4, d'où un oscillateur non harmonique ($\ddot{\varepsilon} \propto \varepsilon^3$).

45 • D'après les calculs précédents, la plus basse fréquence associée à une oscillation harmonique correspond à $\underline{k=2}$.
(On ne peut pas envisager $k=1$ puisque les calculs effectués précédemment ne le permettent pas ...)

La période du signal de la figure 10 s'écrit donc :

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Y}{12\rho}\ \frac{e}{a_0^2}\underbrace{|1-2^2|}_{3}}} = \sqrt{\frac{\rho}{3Y}}\cdot\frac{4\pi a_0^2}{e}$$

Donc Y peut s'obtenir à partir de la mesure de T_2 via :

$$\boxed{Y = \frac{\rho}{3}\left(\frac{4\pi a_0^2}{T_2 . e}\right)^2}$$

• AN : Entre $t = -0{,}004$ et $+0{,}004$ s on compte 12,5 périodes

donc $T_2 = \dfrac{8\ 10^{-3}\ s}{12{,}5} = \underline{\underline{6{,}4\ 10^{-4}\ s}}$ ($12{,}5 = 100/8$)

Ainsi $Y = \dfrac{3\ 10^3}{3}\left(\dfrac{4\pi . (26\ 10^{-3})^2}{6{,}4\ 10^{-4} \times 1{,}4\ 10^{-3}}\right)^2 = \left(\dfrac{4\pi . 26^2}{1{,}4 \times 6{,}4}\right)^2 \times 10^5$

Calcul approché : $\begin{cases} \pi \times 26 \simeq 3 \times 27 \\ 1{,}4/6{,}4 = 1/1{,}6 \text{ et } 1{,}4 \times 1{,}6 \simeq 1{,}5^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

donc $Y \simeq \left(\dfrac{3 \times 27 \times 26}{9/4}\right)^2 \times 10^5 \simeq (9{,}4\ 10^2)^2 \times 10^5 \simeq 8{,}8\ 10^{10}$

Finalement $\boxed{Y \simeq 9\ 10^{10}\ Pa}$ (Wikipédia dit 50 à 100 GPa soit 5 à 10×10^{10} Pa !)

Réponse sans beaucoup de conviction ...

• Un verre est en général évasé, avec un rayon qui croît avec la hauteur (schéma ci-contre), en particulier s'il s'agit d'une flûte à champagne.

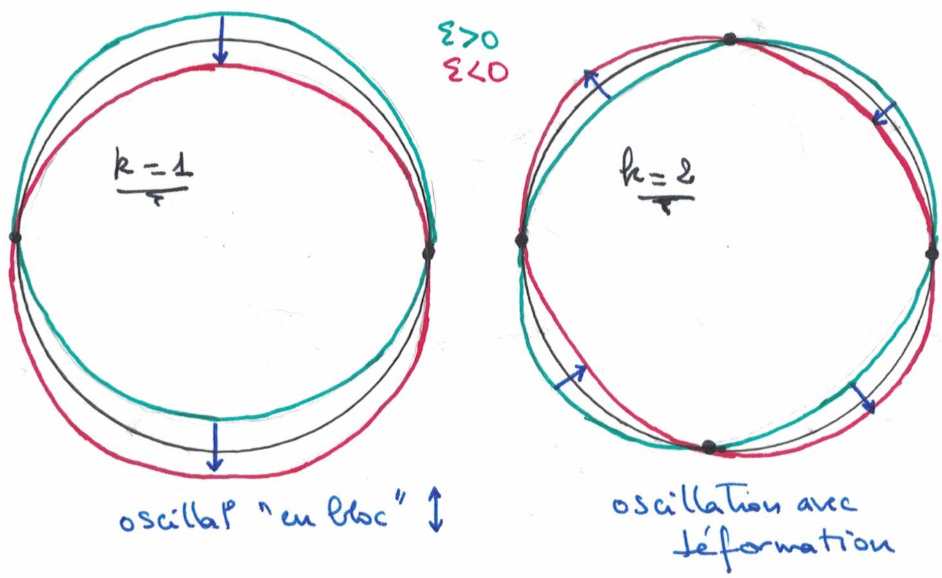
Le rayon a_0 du verre est en fait en fonction de z qui, si elle est à peu près constante sur l'essentiel de la hauteur, diminue la plupart du temps vers la base.
Comme $Y \propto a_0^4$, on peut imaginer que notre détermination est $\underline{\text{légèrement}}$ surévaluée ...

Rq finale : on peut peut-être comprendre le manque d'intérêt du sujet pour $k=1$ par le fait que si $k=1$:

$$a(t) = a_0 (1 + \varepsilon \sin\theta)$$

qui n'est pas vraiment une déformation du verre comme le sont les cas où $k>1$, mais plutôt une oscillation "en bloc" du verre.

En effet, si on reprend le schéma effectué qu. 32 et qu'on compare $k=1$ et $k=2$ pour $\varepsilon > 0$, puis $\varepsilon < 0$, on aboutit à :



FIN.