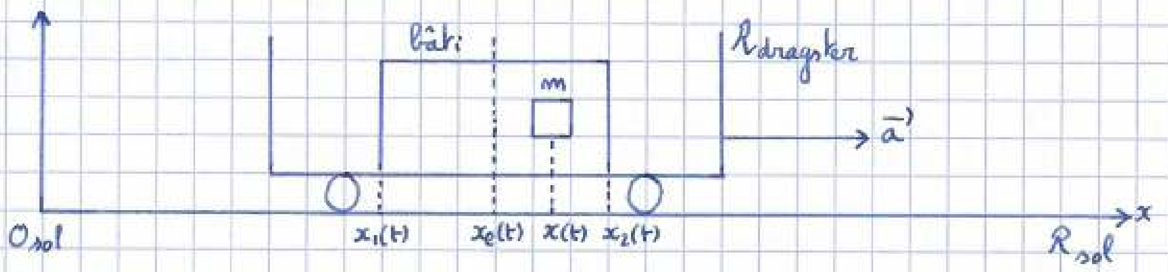
Mines. Option PC. Physique 1 - 2013

I Mesure de l'accélération par un système embarqué

I.A Analyse du mouvement mécanique



1. Les ressorts n'ont pas d'allongement à l'équilibre, donc : $\ell_0 = x_e - x_1 = x_2 - x_e$

Force exercée par le ressort de gauche : $\vec{F_1} = -k(x - x_1 - \ell_0)\,\hat{e}_x = -k(x - x_e)\,\hat{e}_x = -kL\,\hat{e}_x$

Force exercée par le ressort de droite : $\vec{F_2} = +k(x_2 - x - \ell_0)\,\hat{e}_x = k(x_e - x)\,\hat{e}_x = -kL\,\hat{e}_x$

Donc : $\boxed{\vec{F_r} = -2kL\,\hat{e}_x}$

La position relative de m par rapport au bâti est : $x - x_e = L$
Donc la vitesse relative est : $\dot{L}\,\hat{e}_x$
Les deux amortisseurs exercent donc la force : $\boxed{\vec{F_a} = -2f\dot{L}\,\hat{e}_x}$

2. PFD à m dans R_{sol}, selon Ox : $m\ddot{x} = -2kL - 2f\dot{L}$ or $\ddot{x} = \ddot{L} + \ddot{x}_e = \ddot{L} + a$

donc : $m\ddot{L} + 2f\dot{L} + 2kL = -ma$

soit : $\boxed{\ddot{L} + 2\mu\omega_0\dot{L} + \omega_0^2 L = -a}$

3. En notation complexe : $-\omega^2 \underline{L} + 2\mu\omega_0 j\omega \underline{L} + \omega_0^2 \underline{L} = -\underline{a}$

d'où : $\dfrac{\underline{L}}{\underline{a}} = \dfrac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\mu\omega_0 j\omega} = \dfrac{-1}{\omega_0^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\,2\mu\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$

donc : $\boxed{\dfrac{\underline{L}}{\underline{a}} = \dfrac{-G}{1 - G\omega^2 + j\,2\mu\xi}}$

Le déplacement de la masse sera proportionnel à l'accélération en régime basse fréquence : $\omega \ll \omega_0$. On a alors : $\underline{L} \simeq -G\underline{a}$.

I.B Mesure du déplacement

4. En régime sinusoïdal forcé, le théorème de Millman donne : $V_3 = \dfrac{jC_1\omega V_1 + jC_2\omega V_2 + \frac{V_s}{R}}{jC_1\omega + jC_2\omega + \frac{2}{R}}$

$\Rightarrow \left(jC_1\omega + jC_2\omega + \frac{2}{R}\right)V_3 = jC_1\omega V_1 + jC_2\omega V_2 + \frac{V_s}{R}$

On repasse en régime quelconque : $(C_1+C_2)\dfrac{dV_3}{dt} + \dfrac{2V_3}{R} = C_1\dfrac{dV_1}{dt} + C_2\dfrac{dV_2}{dt} + \dfrac{V_s}{R}$

$$= (C_1V_1\omega - C_2V_1\omega)\cos\omega t + \frac{V_s}{R}$$

soit : $\dfrac{dV_3}{dt} + \dfrac{2}{R(C_1+C_2)}V_3 = \dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}V_1\omega\cos\omega t + \dfrac{V_s}{R(C_1+C_2)}$

donc : $\boxed{\dfrac{dV_3}{dt} + \dfrac{V_3}{\tau} = V_2\omega\cos\omega t + \dfrac{V_s}{2\tau}}$ (1)

5. Solution de l'équation sans second membre : $V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
Solution particulière associée au terme constant du 2ᵉ membre : $\frac{V_s}{2}$
Solution particulière associée au terme sinusoïdal du 2ᵉ membre : $A\cos(\omega t+\varphi)$

on reporte en notation complexe dans (1) : $j\omega Ae^{j\varphi} + \frac{1}{\tau}Ae^{j\varphi} = V_2\omega$

donc : $Ae^{j\varphi} = \dfrac{\omega\tau V_2}{1+j\omega\tau}$

l'amplitude est : $A = \dfrac{\omega\tau V_2}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ la phase est : $\varphi = -\mathrm{Arctan}(\omega\tau)$

donc : $\boxed{V_3(t) = V_0 e^{-t/\tau} + \dfrac{V_s}{2} + \dfrac{\omega\tau V_2}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos(\omega t+\varphi)}$

6. $\omega\tau = 500 \gg 1 \Rightarrow A \simeq V_2$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$ donc : $\boxed{V_3(t) = \dfrac{V_s}{2} + V_2\sin\omega t}$

7. On néglige les effets de bords $\Rightarrow$ invariance par translation selon Oy et Oz
$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(x)$
De plus Mx est un axe de symétrie des charges
$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$

Le théorème de Gauss appliqué à la surface qui entoure l'armature inférieure donne :

$E(x)S = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ car $\vec{E} = \vec{0}$ sur la face inférieure

donc : $E(x) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ puis $V_1 - V_2 = \displaystyle\int_0^e \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^e \frac{Q}{\varepsilon_0 S}dx = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{C}$

On en déduit : $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$

8. $\boxed{C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d+L}}$ $\boxed{C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-L}}$

9. On a : $V_2 = \dfrac{\frac{\varepsilon_0 S}{d+L} - \frac{\varepsilon_0 S}{d-L}}{\frac{\varepsilon_0 S}{d+L} + \frac{\varepsilon_0 S}{d-L}}V_1 = -\dfrac{L}{d}V_1$ donc : $\boxed{V_3(t) = \dfrac{V_s}{2} - \dfrac{L}{d}V_1\sin\omega t}$

10. $s_1(t) = k v_1(t) v_3(t) = k\left(\frac{1}{2}V_s + V_1 \sin\omega t\right)\left(\frac{1}{2}V_s - \frac{L}{d}V_1 \sin\omega t\right)$

$$= k\left(\frac{V_s^2}{4} - \frac{LV_1V_s}{2d}\sin\omega t + \frac{V_1V_s}{2}\sin\omega t - \frac{L}{d}V_1^2\underbrace{\sin^2\omega t}_{=\frac{1-\cos 2\omega t}{2}}\right)$$

$$= k\left(\frac{V_s^2}{4} - \frac{LV_1^2}{2d} + \frac{V_1V_s}{2}\sin\omega t\left(1-\frac{L}{d}\right) + \frac{LV_1^2}{2d}\cos 2\omega t\right)$$

Le circuit RC joue le rôle de filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{RC} = 10^3\ \text{rad.s}^{-1}$
Or $\omega = 10^5\ \text{rad.s}^{-1} \gg \omega_c$. Donc les termes en $\sin\omega t$ et $\cos 2\omega t$ sont coupés.

Il reste : $\boxed{s(t) = k\left(\frac{V_s^2}{4} - \frac{LV_1^2}{2d}\right)}$

D'après la question 3 : $L \simeq -Ga = -\frac{m}{2k}a$ donc : $\boxed{s(t) = k\left(\frac{V_s^2}{4} + \frac{mV_1^2}{4kd}a\right)}$

II Propulsion de l'engin par un réacteur d'avion

II.A Premier principe pour un système ouvert

11. Écoulement stationnaire $\Rightarrow$ conservation du débit massique le long d'un tube de courant

12. Premier principe à (Σ) : $d(U + E_c + E_p) = \delta W + \delta Q$ $\quad \delta Q = 0$ car parois adiabatiques

$dU = U_{pc}(t+dt) + U_s - U_{pc}(t) - U_e = U_s - U_e$ car $U_{pc}(t+dt) = U_{pc}(t)$ en écoulement stationnaire

de même : $dE_c = E_{cs} - E_{ce}$ et $dE_p = E_{ps} - E_{pe}$

$\delta W = \delta W_i + \delta W_{\substack{\text{pression}\\ \text{en amont}}} + \delta W_{\substack{\text{pression}\\ \text{en aval}}} = \delta W_i + P_e S_e dl_e - P_s S_s dl_s$

donc : $\boxed{U_s + E_{cs} + E_{ps} - U_e - E_{ce} - E_{pe} = \delta W_i + P_e S_e dl_e - P_s S_s dl_s}$

13. On note u_s et u_e les énergies internes massiques en sortie et en entrée
On a : $S_e dl_e$ = volume de $dm_e = dm\, v_e$
$S_s dl_s$ = volume de $dm_s = dm\, v_s$

La relation de la question 12 devient :

$$u_s dm + \frac{1}{2}dm\, c_s^2 + dm\, g z_s - u_e dm - \frac{1}{2}dm\, c_e^2 - dm\, g z_e = \delta W_i + P_e dm\, v_e - P_s dm\, v_s$$

$$u_s + P_s v_s + \frac{1}{2}c_s^2 + g z_s - u_e - P_e v_e - \frac{1}{2}c_e^2 - g z_e = \frac{\delta W_i}{dm}$$

donc : $\boxed{h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + g z_s - h_e - \frac{1}{2}c_e^2 - g z_e = w_i}$

II.B Force de poussée du réacteur - Étude de la tuyère

14. Gaz parfait en évolution adiabatique réversible : $P_s^{1-\gamma}T_s^{\gamma} = P_e^{1-\gamma}T_e^{\gamma}$ (Loi de Laplace)

$\Rightarrow \boxed{T_s = T_e\left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$ $\quad$ A.N. : $T_s = 821\ \text{K} \Rightarrow \underline{\theta_s = 547\,°\text{C}}$

15. En négligeant c_e, l'équation de la question 13 devient : $h_s - h_e + \frac{1}{2}c_s^2 = 0$

On : $h_s - h_e = c_p(\theta_s - \theta_e)$ donc : $\boxed{c_s = \sqrt{2c_p(\theta_e - \theta_s)}}$ A.N : $\underline{c_s = 841\ m\,s^{-1}}$

16. Théorème de la résultante cinétique au système fermé Σ (air entre A et B à t)

$$\frac{d\vec{P_\Sigma}}{dt} = \vec{F}_{réacteur \to \Sigma}$$ (la pression atmosphérique uniforme ne donne pas de force résultante)

$$\frac{dm_s\,\vec{c_s} - dm_e\,\vec{c_e}}{dt} = -\vec{F}_{\Sigma \to réacteur} = -\vec{\Pi}$$ donc : $\boxed{\vec{\Pi} = D_m(\vec{c}_e - \vec{c}_s)}$

A.N : $\underline{\|\vec{\Pi}\| = 67{,}3 \cdot 10^3\ N}$

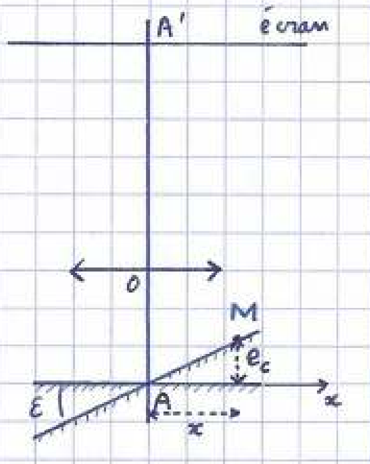
17. $a = \frac{\|\vec{\Pi}\|}{m}$ A.N : $a = 63{,}5\ m\,s^{-2}$ soit : $\underline{a = 6{,}47\ g}$

18. $\ddot{x} = a \rightarrow \dot{x} = at$ (départ arrêté) $\rightarrow x = a\frac{t^2}{2}$ donc $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$

A.N : avec $x = 305\ m$, on a : $\underline{t \simeq 3{,}1\ s}$. On gagne 0,7 s avec ce réacteur d'avion.

(III) Contrôle d'épaisseur de certaines pièces

III.A Contrôle d'épaisseur d'un dépôt métallique



19. Système analogue à un interféromètre de Michelson en coin d'air.

Soit $e_c = \varepsilon x$ l'épaisseur locale du coin sans le dépôt

On a : $\delta(M) = 2e_c = 2\varepsilon x$

L'interfrange i sur le coin vérifie : $\delta(x+i) = \delta(x) + \lambda_0$

$\Rightarrow 2\varepsilon(x+i) = 2\varepsilon x + \lambda_0 \Rightarrow i = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}$

L'interfrange sur l'écran est donc : $\boxed{d_i = |\gamma| \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}}$

A.N : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA} = -4{,}35\ cm \Rightarrow |\gamma| = \left|\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right| = 11{,}5 \Rightarrow \underline{d_i = 1{,}75\ mm}$

20. Différence de marche en un point M de la zone hors dépôt : $\delta(M) = 2\varepsilon x$

Différence de marche en un point M' de la zone avec dépôt : $\delta(M') = 2\varepsilon x' - 2e$

Une frange correspond à une différence de marche constante : $\delta(M) = \delta(M')$

$$2\varepsilon x = 2\varepsilon x' - 2e$$
$$\Rightarrow x' = x + \frac{e}{\varepsilon}$$

Dans la zone du dépôt, les franges sont déformées sur le coin de $\Delta x = x' - x = \frac{e}{\varepsilon}$

La déformation sur l'écran est donc : $\boxed{u = |\gamma| \frac{e}{\varepsilon}}$

A.N : $\underline{e = 8{,}95 \cdot 10^{-8}\ m}$. On arrive à mesurer de très faibles épaisseurs avec une méthode interférométrique.

21. La différence de marche dans la zone hors dépôt devient : $\delta(M) = 2n\varepsilon x$ (n = indice de l'eau)
$\Rightarrow$ l'interfrange sur le coin devient : $i = \frac{\lambda_0}{2n\varepsilon}$. Les franges sont plus serrées mais elles sont toujours rectilignes.

Comme à la question 20 :
$$\delta(M) = 2n\varepsilon x$$
$$\delta(M') = 2n\varepsilon x' - 2e$$
$$\delta(M) = \delta(M') \Rightarrow \Delta x = x' - x = \frac{e}{n\varepsilon}$$

La nouvelle déformation des franges : $v = \frac{|\gamma| e}{n\varepsilon}$ est plus faible que dans l'air

22. Si ε augmente, l'interfrange diminue. Les franges seront plus serrées et la déformation plus faible.

III.B Mesure de l'épaisseur de la pièce transparente

23.

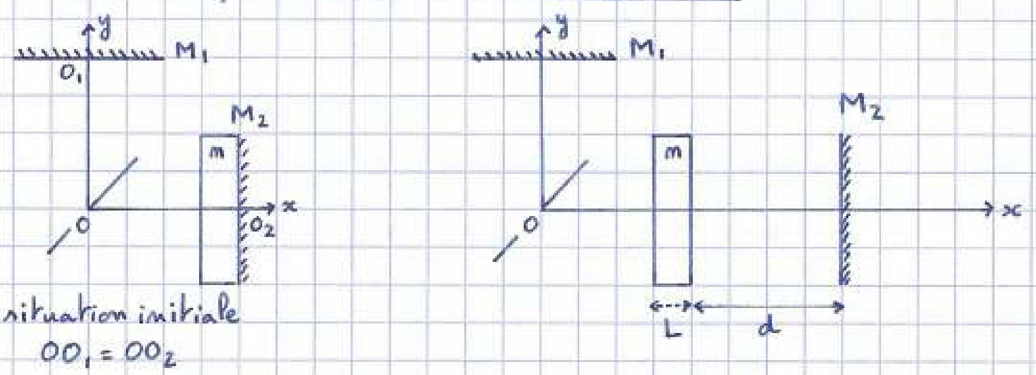
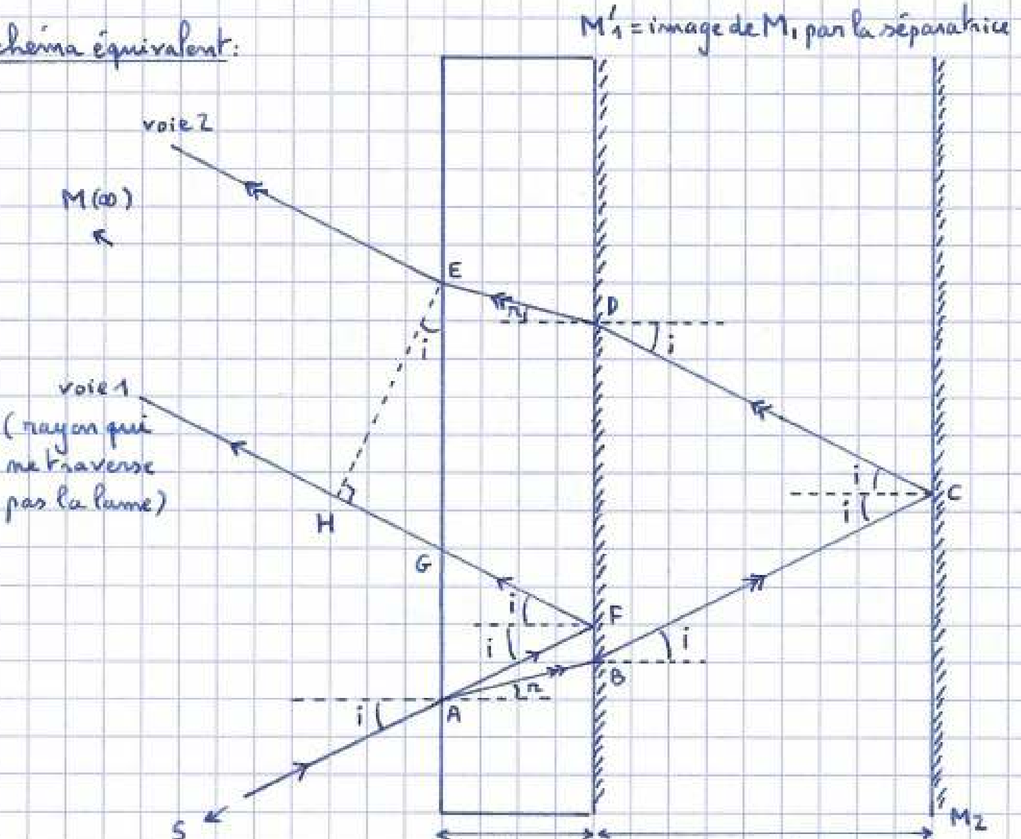


schéma équivalent :



$AB = \frac{L}{\cos r}$

$BC = \frac{d}{\cos i}$

$AF = \frac{L}{\cos i}$

$GH = GE \cdot \sin i$

$GE = AE - AG$

$AG = 2L \tan i$

$AE = 2L \tan r + 2d \tan i$

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = \cancel{SA} + n\,AB + BC + CD + n\,ED + \cancel{(EM)} - \cancel{SA} - AF - FG - GH - \cancel{(HM)}$$
$$= 2n\,AB + 2BC - 2AF - GH \quad \text{car } AB = DE \quad AF = FG \quad BC = CD$$

$$\delta(M) = \frac{2nL}{\cos r} + \frac{2d}{\cos i} - \frac{2L}{\cos i} - \sin i \left(2L\tan r + 2d\tan i - 2L\tan i \right)$$

$$= \frac{2L}{\cos r}\underbrace{(n - \sin i \sin r)}_{= n(1-\sin^2 r)} + \frac{2d}{\cos i}\underbrace{(1-\sin^2 i)}_{=\cos^2 i} - \frac{2L}{\cos i}\underbrace{(1-\sin^2 i)}_{=\cos^2 i}$$ or $\sin i = n \sin r$ (Loi de Descartes)

donc : $\boxed{\delta(M) = 2nL\cos r + 2(d-L)\cos i}$ $\quad A = d-L \quad B = nL$

L'observation se fait à l'infini, ou dans le plan focal image d'une lentille convergente

24. Avec des angles petits : $\delta(M) = 2nL\left(1-\frac{r^2}{2}\right) + 2(d-L)\left(1-\frac{i^2}{2}\right)$ et $i \simeq nr$

$$= 2nL - nL\frac{i^2}{n^2} + 2(d-L) - (d-L)i^2$$

$$= 2nL + 2(d-L) - i^2\left(\frac{L}{n} + d - L\right)$$

On retrouve une teinte plate quand la différence de marche devient constante, i.e indépendante de i. Cela impose :

$$\frac{L}{n} + d - L = 0 \Rightarrow \boxed{L = \frac{nd}{n-1}}$$

25. Quand il y a anticoïncidence, les franges brillantes de λ_2 coïncident avec les franges sombres de λ_1 :

$$\delta(M) = k_2\lambda_2 = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 \quad k_1 \text{ et } k_2 \text{ entiers}$$

$$\Rightarrow k_2(\lambda_1 + \Delta\lambda) = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1$$

$$k_2\Delta\lambda = \left(k_1 - k_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 \quad k_1 - k_2 = k \text{ entier}$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta\lambda}\lambda_1$$

$$\Rightarrow \delta(M) = k_2\lambda_2 = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta\lambda} \simeq \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$ quand il y a brouillage

On a d'autre part : $\delta(M) \simeq 2e$

Pour la première anticoïncidence : $2e_1 = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$

On en compte 10 et on arrive à la 11e : $2e_{11} = \left(k + 10 + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$

$\Rightarrow 2(e_{11} - e_1) = 10\frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$ par différence

$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{10\lambda_m^2}{2(e_{11}-e_1)}}$ $\quad$ A.N : $\underline{\Delta\lambda = 0{,}59 \text{ nm}}$