TD Eté - Facultatif
Exercices classiques.

Le nombre d'étoiles indique la difficulté (à ****)*

I Quiz de cours, façon fin d'oral de concours.

1 Tracer à main levée les graphes des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $x \mapsto \arcsin(x)$
2. $x \mapsto \arctan(x)$
3. $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sur le même graphe.
4. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5. $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x-5}$
6. $x \mapsto \arccos(x)$
7. $x \mapsto \mathrm{th}(x)$
8. $x \mapsto x\sin(x)$
9. $x \mapsto\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
10. $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$

2 n est un entier naturel non nul. Donner les bases canoniques de K^n, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, de $K_n[X]$, de $K[X]$.

3 n est un entier naturel non nul. Donner la formule des produits scalaires canoniques de K^n, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, de $K_n[X]$, de $K[X]$.

4 n est un entier naturel non nul. Donner l'écriture explicite et le cardinal de $\mathcal{U}_n$.

5 Enoncer le théorème de changement de variables.

6 Donner la définition quantifiée, et exprimer par une phrase orale, de l'injectivité et la surjectivité d'une application d'un ensemble dans un autre.

7 Enoncer le théorème de la limite monotone (pour une suite, et pour une fonction).

8 Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

9 Enoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.

10 Enoncer la division euclidienne dans $\mathbb{N}$,la division euclidienne dans $K[X]$.

11 Définir la multiplicité d'une racine α dans un polynôme P.

12 Enoncer le théorème de la limite de la dérivée, puis le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.

13 Donner la formule des coefficients du produit de deux polynômes.

14 Exprimer la somme et le produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

15 Enoncer la formule de Grassman.

16 Enoncer le théorème du rang.

17 Donner la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ lorsque E et F sont deux K-espace vectoriels de dimension finie.

18 Donner l'expression des coefficients d'un produit de deux matrices.

19 Donner l'expression du produit de deux éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

20 Donner la formule de changement de base pour les matrices d'applications linéaires.

21 Donner la formule de changement de base pour les matrices d'une famille de vecteurs.

22 Donner le lien entre la matrice d'un vecteur et la matrice de son image par u ne application linéaire.

23 Enoncer toutes les propriétés du déterminant d'une matrice carrée.

24 Définit le déterminant d'une application linéaire et donner ses propriétés.

25 Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral .

26 Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

27 Enoncer la formule des probabilités totales, la formule des probabilités composées, retrouver la formule de Bayes.

28 Donner l'espérance et la variance d'une variable de Bernouilli, d'une variable binomiale.

29 Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel, et donner le cas d'égalité.

30 Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions continues sur un segment.

31 Donner la formule qui donne la base orthonormalisée de Gram-Schmidt.

32 Donner la formule du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.

33 Enoncer le critère de Riemann pour les séries.

II Quiz de contre-exemples, façon fin d'oral de concours.

1 * Donner un exemple de trois nombres entiers a, b, c qui sont premiers entre eux dans leur ensemble (c'est-à-dire que leur seul diviseur commun dans $\mathbb{N}$ est 1) mais pas premiers entre eux deux à deux.

2 * Donner un exemple de fonction continue mais pas dérivable.

3 * Donner un exemple de suite non bornée, n'admettant aucune limite, finie ou infinie.

4 *** Donner un exemple de fonction f qui admet un minimum local en un réel x_0, mais qui n'est pas décroissante sur un voisinage à gauche de x_0 puis croissante sur un voisinage à droite de x_0.

5 *** Donner un exemple de fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 mais qui n'est pas deux fois dérivable.

6 * Donner un exemple de fonction f dont la dérivée s'annule en un point qui n'est pas un extremum local.

7 * Donner un exemple de fonction f qui admet un extremum global en lequel f' ne s'annule pas.

8 * Donner un exemple de suite (u_n) telle que (u_n) converge vers 0 mais $\sum u_n$ diverge.

9 ** Donner un exemple de suite (u_n) telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0 mais (u_n) diverge.

10 ** Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$, mais e^{u_n} et e^{v_n} ne sont pas équivalentes.

11 ** Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge mais $\sum v_n$ diverge.

12 ** Donner un exemple de 2 matrices A et B telles que $AB \neq BA$.

13 ** Donner un exemple de 2 matrices A et B telles que $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

14 ** Donner un exemple d'un espace vectoriel E, de 2 sous-espaces vectoriels F et G de E, tels que F et G sont en somme directe mais pas supplémentaires.

15 ** Donner un exemple d'une application linéaire u telle que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ ne sont pas en somme directe.

16 ** Donner, en dimension infinie, un endomorphisme surjectif mais pas injectif.

17 ** Donner un exemple de deux événements indépendants mais pas incompatibles.

18 * Donner, dans un même jeu, un exemple de 2 variables aléatoires X et Y qui suivent la même loi mais ne sont pas égales.

19 *** Donner un exemple (en dimension infinie) d'un espace préhilbertien réel E, d'un sous-espace vectoriel F de E tels que F et $F^{\perp}$ ne sont pas supplémentaires.

Exercices

I. Calculs

1/ Calculer

a/ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

En déduire $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$

b/ $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

c/ $\sum_{k=0}^{n} x^k \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^k$

2/ Donner la formule de $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$, et simplifier $\cos(x)\cos(x)\cos(4x)\cdots\cos(2^{n-1}x)$

3/ Déterminer tous les nombres réels x vérifiant $(x+1)^2 \geq x-2$, puis ceux vérifiant $(x+1)^2 \geq |x-2|$

4/ Donner la dérivée de $t \longmapsto \sin\left(\cos(\ln(t))\right)$

5/ ** Montrer que la fonction $x \longmapsto exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée n-ème.

6/ Effectuer la division euclidienne de $X^4 + X^3 + 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$.

II. Équations différentielles linéaires

d'ordre 1 :

1/ Résoudre *(i)* $y'(x) - y(x) = \sin(x)e^{2x}$ *(ii)* $(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = x^3$

(iii) $(x^2-1)y'(x) + xy(x) = x^3 - x$

2/ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ $(e^x - 1)y'(x) + e^x y(x) = 1$

3/ Résoudre $y'(x)\sin(x) - y(x)\cos(x) + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$ puis sur $]\pi, 2\pi[$. Existe-t-il des solutions sur $]0,2\pi[$?

d'ordre 2 à coefficients constants

4/ Résoudre *(i)* $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$ *(ii)* $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2\sinh(x)\cos(x)$

(iii) $y''(x) + 16y(x) = \sin(x) + \cos(4x)$ *(iv)* $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2\cosh x$

(v) $y''(x) + y(x) = 2\cos^2(x)$

5/ Résoudre $-y''(x) + 2y'(x) + my(x) = e^{-x} \quad m \in \mathbb{R}$

Autres exercices

6/ Résoudre $y''(x) + y(x) = a|x| + b$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

7/ Déterminer $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe c^1 vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)dt = 0$

8/ Déterminer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe c^1 vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x$

III. Complexes

1/ Simplifier *(i)* $\left(\dfrac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}\right)^{25}$ *(ii)* $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

2/ Montrer que *(i)* $(1-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{60} - i\sin\dfrac{13\pi}{60}\right)$

(ii) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})}{1+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

3/ Linéariser *(i)* $\cos^2\theta\sin^3\theta$ *(ii)* $\cos^7\theta$ *(iii)* $\cos^7\theta\sin^5\theta$

Calculer *(i)* $\sin(6\theta)$ *(ii)* $\cos(5\theta)$

4/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équation suivantes: *(i)* $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$
(ii) $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$ *(iii)* $9z^2 - 3(3-i)z + 4 - 3i = 0$ *(iv)* $z^3 - i = 6(z+i)$
(v) $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$ sachant qu'il existe une solution imaginaire pure. Si on note z_1 , z_2, z_3 les racines, quelle propriété possède le triangle de sommets les points ayant ces trois affixes ?

5/ Rappeler les racines $n^{ème}$ de l'unité. Calculer la somme des puissances $p^{ème}$ des racines $n^{ème}$ de l'unité.

6/ Déterminer les racines quatrième de $1+i$.

7/ Résoudre *(i)* $z^n + 1 = 0$ *(ii)* $(z+i)^n = (z-i)^n$

8/ Calculer *(i)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ *(ii)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ *(iii)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ *(iv)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$

IV. Développements limités

1/ *(i)* dl_3 en $\dfrac{\pi}{2}$ puis en $\dfrac{\pi}{3}$ de sin et cos *(ii)* dl_2 en 2 de ln , exp *(iii)* dl_5 en 0 de tan , tanh
(iv) dl_6 en 0 de arctan , arcsin *(v)* dl_2 en 1 de arctan , dl_2 en $+\infty$ et en $-\infty$ de arctan
(vi) dl_3 en π de $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$

2/ Déterminer *(i)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ où $a > 0$ et $b > 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x - 2\sin x)^{\frac{1}{x}}$ *(iii)* $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}(2^x + 3^x - 12)^{\tan(\frac{\pi}{4}x)}$

3/ Donner un équivalent simple, puis la limite, des expressions suivantes: *(i)* $\dfrac{2+3x-x^4}{x^2+2x^4}$ en $+\infty$

(ii) $\dfrac{\sin(x)+e^x-x^4}{x^4+\cos^2(x)}$ en $+\infty$ *(iii)* $\dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ en $+\infty$ *(iv)* $e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

4/ ** Donner une écriture asymptotique des expressions suivantes à la prcision la meilleure possible : *(i)* $u_n+v_n-\dfrac{\ln(n)}{n}$ en supposant $u_n=n+nln(n)+O\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ et $v_n=\ln(n)+o(\sqrt{n})$

(ii) $f(x)+xg(x)$ en $0+$ et en $+\infty$, en supposant $f(x)=x\ln(x)+3x+x^{\frac{3}{2}}+o(x^4)$ et $g(x)=o(x\ln(x))$

V. Calcul de primitives

1/ *(i)* $\displaystyle\int \ln(x)dx$ *(ii)* $\displaystyle\int \arctan(x)dx$ *(iii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+ix}$

si $a^2\neq b^2$ *(iv)* $\displaystyle\int \sin(ax)\sin(bx)dx$ *(v)* $\displaystyle\int \sin(ax)\cos(bx)dx$ *(vi)* $\displaystyle\int \cos(ax)\cos(bx)dx$

(vii) $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\sin(x)+\sin(3x)}dx$ poser $u=\cos x$ *(viii)* $\displaystyle\int \tan^4(x)dx$ poser $u=\tan(x)$

(ix) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}$ utiliser la quantité conjuguée

(x) $\displaystyle\int_0^{\Pi} \sin^4(\theta)d\theta$ *(xi)* $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ en posant $x=\dfrac{1}{t}$

VI. Algèbre linéaire

Matrices

1/ Effectuer les produits matriciels AB et BA quand c'est possible

(i) $A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&-1&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&7\\-1&-2\end{pmatrix}$ *(ii)* $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\1&2&3\\-2&-3&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

(iii) $A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&-2\\-1&-1\end{pmatrix}$ *(iv)* $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\0&1&0\end{pmatrix}$

2/ Déterminer B pour que $A=BC$ si A $=\begin{pmatrix}2&3&-2\\4&-1&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$ C $=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}$

3/ $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\3&-2&1&0\end{pmatrix}$ calculer A^TA et AA^T

4/ Calculer A^n si *(i)* $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ *(ii)* $A=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$

5/ Soit $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$, calculer $A^2-3A+2I_2$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

6/ Inverses s'ils existent et déterminants de *(i)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(ii)* $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ *(iii)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Systèmes

7/ Résoudre *(i)* $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 18 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7 \\ x_1 + 2x_4 - x_5 = 8 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 1 \end{cases}$ *(ii)* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$ *(iv)* $\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ . \\ . \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$ *(v)* $\begin{cases} z_2 - az_1 = b \\ z_3 - az_2 = b \\ . \\ . \\ z_n - az_{n-1} = b \\ z_1 - az_n = b \end{cases}$

Espaces vectoriels. Applications linéaires

8/ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Base et dimension et trouver un supplémentaire si

(i) $E = \{\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ; 2x - y + z = 0\}$ *(ii)* $E = \{\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad ; \quad x - z + t = 0 \quad y - x + 2z = 0\}$

(iii) $E = \{A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$; somme des éléments sur chaque ligne vaut $0\}$

9/ ** Montrer que $E = \{a + b(1-\sqrt{2})^2 + c(1+\sqrt{2})^2 \quad ; \quad (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Base et dimension ?

10/ Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?
(i) Les suites complexes bornées *(ii)* Les suites réelles monotones *(iii)* les suites réelles arithmétiques

11/ Dans $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on considère $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{w_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{w_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w_3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w_4} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Montrer que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$, $(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$, $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2})$ sont des familles libres de $\mathbb{R}^4$

Déterminer une base de $\mathcal{V}\text{ect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ et en trouver un supplémentaire .

Déterminer une base de $\mathcal{V}\text{ect}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}, \vec{w_4})$.

Déterminer $\mathcal{V}\text{ect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) + \mathcal{V}\text{ect}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}, \vec{w_4})$ et $\mathcal{V}\text{ect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) \cap \mathcal{V}\text{ect}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}, \vec{w_4})$

12/ Montrer que les fonctions $(\cos, \sin, f, g)$ sont libres où $f(x) = x\cos(x) \quad g(x) = x\sin(x)$

13/ Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Écrire leurs matrices dans les bases canoniques. Déterminer leurs noyaux et images.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \longmapsto (x - y, x - z)$

(ii) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$(x, y, z, t) \longmapsto (x + y, y + z, z + t, t + x)$

(iii) $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$
$P \longmapsto P' + X^2P''$

14/ E $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 $\quad (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base
On définit $(T, U) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ par $T(\vec{e_1})=T(\vec{e_2})=T(\vec{e_3})=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3} \quad U(\vec{e_1})=\vec{e_2} \quad U(\vec{e_2})=\vec{e_3} \quad U(\vec{e_3})=\vec{e_1}$
Calculer $T(\vec{x})$, $U(\vec{x})$ pour $\vec{x} \in E$. Déterminer $KerU$, ImU, $KerT$, ImT
Vérifier que T et U commutent, et calculer U^2 , U^3 , T^2 , T^n $(n \in \mathbb{N}^*)$

15/ $E = \{\vec{u}(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad ; \quad x + y + z + t = 0\}$
$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z, t) \longmapsto 2x - y + z + 3t$
Montrer que f est linéaire
$Ker(f)$? $Im(f)$?

16/ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \quad f(\vec{i}) = \vec{i} \qquad f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \dfrac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$
$Ker(f)$? $Im(f)$? Montrer que $Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{R}^3$

17/ ** E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, montrer que
$Ker(gof) = Ker(f) \iff Ker(g) \cap Im(f) = \{0\}$
$Im(gof) = Im(g) \iff Ker(g) + Im(f) = F$

18/ ** Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$, avec $\varphi(P) = P(X + 1) - P(X)$

19/ ** On considère deux entiers naturels non nuls n et p, $(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ deux à deux distincts.
Déterminer la dimension de $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X]; P(a_1) = \cdots = P(a_p) = 0\}$

20/ ** Calculer les déterminants suivants $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_n$

VII. Probabilités

1/ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, déterminer $\mathbb{E}(2^X)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$

2/ Le gérant d'un magasin a recu un lot de boîtes de DVD. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :
60% des boîtes abîmées contiennent au moins un DVD défectueux.
98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun DVD défectueux.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abimée"et par B l'événement "la boîte achetée contient au moins un disque défectueux"

Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\bar{A})$, $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(B|\bar{A})$, $\mathbb{P}(\bar{B}|A)$, $\mathbb{P}(\bar{B}|\bar{A})$

Le client constate qu'un des DVD acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abimée.

3/ Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

4/ Une urne contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On en tire un au hasard, et on considère les événements A "le numéro est pair"et B "le numéro est un multiple de 3"

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Même question avec si l'urne contient 13 jetons.

5/ A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez- vous ? (on discutera en fonction de p).

6/ On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$.

7/ On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$

Donner la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$

Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathbb{E}(Y)$

Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $Cov(X, Y)$

8/ ** En supposant que X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux une loi uniforme sur $[\![1, \cdots, n]\!]$, et en posant $m = \min(X, Y)$, déterminer, pour $k \in [\![1, \cdots, n]\!]$ $\mathbb{P}(m > k)$, et en déduire la loi de m.

VIII. Espaces euclidiens

1/ Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

puis pour le produit scalaire $< P, Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$ (on vérifiera que l'on a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}2[X]$

2/ Dans $\mathbb{R}^3$ ev euclidien soit $\mathcal{P} : x - 2y + 3z = 0$

Écrire la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$ dans la base acanonique de $\mathbb{R}^3$.

3/ $\vec{u_1}(1, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ $\vec{u_2}(0, 3, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ F=$\mathcal{V}$ect $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$

Déterminer une base orthogonale de $F^{\perp}$.

IX. Séries

Déterminer la nature (convergente ou divergente) de la série dont le terme général est : *(i)* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *(ii)* $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *(iii)* $u_n = \dfrac{\sin(n) + n^2}{3 + 2^n}$

(iv) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ *(v)* ** $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(\ln(n))}$ *(vi)* ** $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

X. Fonctions de plusieurs variables

1/ Étude de la limite en (0,0) de

(i) $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ *(ii)/* $f(x,y) = \frac{\sinh^2(x)\sinh^2(y)}{x^2+y^2}$

2/ Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, après avoir donné $\mathcal{D}_f$ et justifié l'existence de ces dérivées partielles pour

(i) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - y^2$ *(ii)* $f(x,y) = \int_x^y \mathrm{e}^t \, \ln t dt$

$+ y > 0\}$

$f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \frac{xy}{x+y}$ Calculer $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$; $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

4/ Soit $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$, déterminer $\mathcal{D}_f$ et une équation du plan tangent en (1,2).

Déterminer (x,y) pour que le plan tangent soit parallèle au plan $x + y + z = 0$.

Déterminer (x,y) pour que le plan tangent soit perpendiculaire à la droite passant par l'origine de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.