DM0 : Pour Jeudi 05 Septembre : Rédiger sur feuille l'exercice 4.

TD0 : Jeudi 5 Septembre : Les exercices 4 et 5 seront corrigés en TD.

Incontournables.

$\boxed{1}$ * - **Fonctions additives sur** $\mathbb{R}$.

On cherche à déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$(*) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Démontrer que, si f est linéaire, alors f convient.
2. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $(*)$.
   (a) Démontrer que $f(0) = 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   (d) Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} f(1)$.
   (e) On suppose de plus f continue. Montrer que f est linéaire.

$\boxed{2}$ ** - **Théorème de Césaro**.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$.

1. On suppose que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Démontrer que (v_n) converge vers l.
2. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque n'est pas vraie.

$\boxed{3}$ ** - **Intégrales de Wallis et équivalent de Stirling**.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$
$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$$
   (a) Calculer v_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) converge vers 0 et qu'elle est équivalente à $\dfrac{1}{12n^2}$.
   (c) En déduire que $\ln(u_n)$ converge.
   (d) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$$
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer
$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

(b) Pour $p \in \mathbb{N}$, montrer

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

(c) Montrer que $W_{n+2} \sim W_n$.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.

(e) En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.

(f) Montrer que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est constante, et déterminer sa valeur.

(g) En déduire que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

3. En utilisant l'expression de W_{2p} ou de W_{2p+1}, montrer que $C = \sqrt{2\pi}$.
En déduire

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(formule de Stirling)

$\boxed{4}$ ** - **Polynômes de Tchebicheff.**

n est un entier naturel non nul.

1. Déterminer un polynôme T_n à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété

$$(*) : \forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

et donner son coefficient dominant.

2. Montrer que T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$.
3. Montrer

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Aurait-on pu démontrer l'existence et l'unicité de T_n en utilisant seulement cette relation de récurrence ?

4. Déterminer T_1, T_2, T_3, T_4.
5. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de T_n sur $\mathbb{R}$.

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - \cos(\theta_k))$$

avec, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$

$\boxed{5}$ *** - **Racines du polynôme dérivé.**.

On considère P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et de degré au moins 2.
Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer à l'aide de P' la propriété "Les racines de P dans $\mathbb{R}$ sont toutes simples".
3. On suppose que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $P^2 + 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

4. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Entraînement.

$\boxed{6}$ *** - **Calcul de déterminant**.
On considère

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

avec, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$a_{i,i} = 2\cos(\theta)$$

$$a_{i,j} = -1 \text{ si } |i-j| = 1$$

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } |i-j| \geqslant 2$$

$\boxed{7}$ **** - **Egalité de Wald**.
N est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,A]\!]$, avec $A \in \mathbb{N}$.
$X_1, \ldots, X_A$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $[\![0,B]\!]$, avec $B \in \mathbb{N}$.
On pose

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

Montrer

$$E(S) = E(X_1) \times E(A)$$

$\boxed{8}$ ** - **Matrices orthogonales.**
E est un espace euclidien. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.
f est un endomorphisme de E. A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
On dit que A est **orthogonale** si et seulement si

$$A \times A^T = I_n$$

On dit que f est une **isométrie** si et seulement si

$$\forall x \in E \ , \ ||f(x)|| = ||x||$$

1. Montrer que A est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est une isométrie si et seulement si A est orthogonale.
3. Montrer que f est une isométrie si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

$\boxed{9}$ ** - **Utilisation du produit scalaire canonique.**.
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose $B = A^T A$.

1. Montrer
$$Ker(B) = Ker(A)$$
2. On considère $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tels que
$$BX = \lambda X$$
On dit que λ est une valeur propre de B, et X un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.
Montrer
$$\lambda \geqslant 0$$
<u>Indication :</u> On pourra utiliser $||AX||$, où $||\ \ ||$ désigne la norme canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$||Y|| = Y^T Y$$