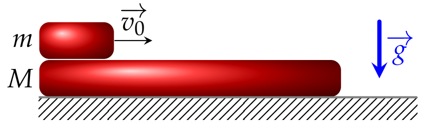
TD n°1 : Rappels de mécanique de PCSI

Exercice 1 : Entraînement par frottements

Un pavé de la masse m est posé sur une planche de masse M, elle-même posée sur une table horizontale fixe. On néglige les frottements entre la planche et la table. On donne le coefficient de frottement f entre le pavé et la planche.

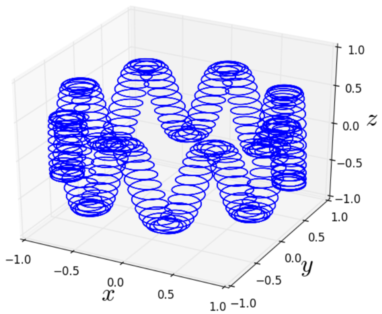


Initialement, la planche est immobile et on lance le pavé avec une vitesse v_0 dans la direction $\overrightarrow{u_x}$. Étudier et faire un bilan énergétique.

Exercice 2 : Piège de PENNING (Centrale)

Ce piège permet de confiner un électron au voisinage de l'origine O du repère. Dans cette région règnent :

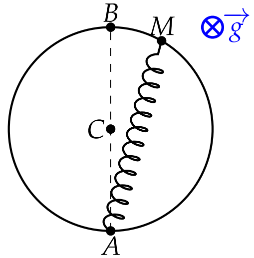
- un champ électrostatique
$$\vec{E} = -\frac{2U}{a^2}(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} - 2z\overrightarrow{u_z})$$
- un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}$ selon Oz.



1) Écrire les équations cartésiennes du mouvement de l'électron.
2) a) On suppose que le champ magnétique est nul.
Décrire le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une première pulsation caractéristique notée ω_z. En prenant $U = 10\,\mathrm{V}$ et $a = 1\,\mathrm{cm}$, donner un ordre de grandeur de ω_z. L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?
b) On suppose que le champ électrique est nul.
Décrire le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une deuxième pulsation caractéristique notée ω_c. Donner un ordre de grandeur de ω_c. L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?
3) Réécrire les équations du mouvement en fonction des deux pulsations ω_z et ω_c.
4) Montrer que l'électron peut avoir un mouvement horizontal circulaire d'équations $x(t) = A\cos(\omega t)$ et $y(t) = A\sin(\omega t)$, à condition de choisir un champ magnétique suffisamment intense. Quelles sont alors les valeurs possibles pour la pulsation ω ?
5) La trajectoire de l'électron à l'allure donnée en introduction. Commenter, compte tenu des résultats précédents.

Exercice 3 : Oscillateur atypique (X-ESPCI)

Un petit anneau M de masse m est libre de se déplacer sans frottements sur un piste circulaire de centre C et de rayon R contenue dans un plan horizontal. L'anneau est relié à un point fixe A de la piste circulaire par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



1) Étudier.
2) On suppose désormais que $\ell_0 = 2R$. Comment la période des petites oscillations varie-t-elle avec l'amplitude des oscillations ?

Exercice 4 : Satellite atypique (X-ESPCI)

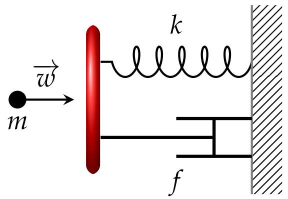
On cherche à placer en orbite circulaire un satellite de masse m dans le champ gravitationnel d'un astre de masse $M \gg m$ en lui communiquant une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ à une distance r_0. Outre la force gravitationnelle, la masse m subit une force supplémentaire de la forme $\overrightarrow{F_s} = -3\,\mathcal{G}\,m\,M\,\dot{\theta}^2/c^2\,\overrightarrow{u_r}$ où (r, θ) désignent les coordonnées polaires repérant le satellite.

1) À quelle condition est-ce possible ?
2) On ne donne pas au satellite la bonne vitesse v_0 en norme. À quelle condition le satellite est-il néanmoins viable ?

Donnée : pour un trinôme $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, la dérivée calculée pour les racines $x_\pm$ vaut $dP/dx(x_\pm) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Exercice 5 : Chocs sur un oscillateur (d'après X-ESPCI)

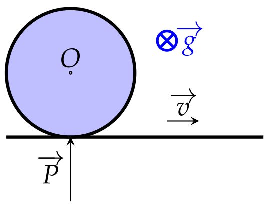
Une planche de masse M susceptible de se translater horizontalement est reliée à un mur fixe par un ressort de raideur k et un amortisseur de constante f de telle sorte que sa position d'équilibre est en $x = 0$.



On bombarde la plaque avec des particules de masse $m \ll M$ et de vitesse $w \gg |\dot{x}|$ avec une fréquence F. On suppose que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique globales se conservent au cours d'un choc élastique masse-planche. Étudier selon la fréquence F.

Exercice 6 : Tapis roulant (X-ESPCI)

1) Un tapis roulant avance à vitesse $v\overrightarrow{u_x}$ constante. À partir de $t = 0$, on impose un contact entre le tapis et un cylindre libre de tourner autour de l'axe fixe vertical (Oz), en appuyant sur le tapis avec une force transversale horizontale constante P.



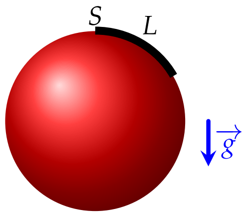
À quelle date le cylindre cesse-t-il de glisser ? Faire un bilan énergétique.

2) En réalité, le tapis est tiré avec une force constante $F\overrightarrow{u_x}$. Étudier.

Exercice 7 : Corde (X-ESPCI)

On pose une corde de longueur $L < \pi R/2$ sur une sphère fixe de rayon R de telle sorte qu'une des extrémités soit au sommet S de la sphère et on lâche.

Déterminer l'accélération initiale des points de la corde.



Réponses

Exercice 1 : Entraînement par frottements

$\dot{x} = v_0 - fgt$ et $\dot{X} = mfgt/M$ pour $t < \tau = Mv_0/fg(m+M)$; puis $\dot{x} = \dot{X} = mv_0/(m+M)$ pour $t > \tau$; $E_{c\infty} - E_{c0} = -(1/2)\, mMv_0^2/(m+M) < 0$

Exercice 2 : Piège de Penning

$\ddot{x} - \frac{2eU}{ma^2}x = -\frac{eB}{m}\dot{y}$, $\ddot{y} - \frac{2eU}{ma^2}y = \frac{eB}{m}\dot{x}$ et $\ddot{z} + \frac{4eU}{ma^2}z = 0$

$\omega_z = 2\sqrt{\frac{eU}{ma^2}}$, $\omega_c = \frac{eB}{m}$ et $B > \frac{\sqrt{2}m\omega_z}{e}$

Exercice 3 : Oscillateur atypique

1) En posant $\theta = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM})$ et $p = \ell_0/2R$, on obtient $E_p = 2k\,R^2\,(\cos(\theta/2) - p)^2$; $E_c = (1/2)\, m\, R^2\, \dot{\theta}^2$; équilibre en $\theta = 0$ stable si $p > 1$ et instable si $p < 1$; équilibre stable pour $\cos(\theta_e/2) = p$ si $p < 1$.

2) $\dot{\theta}^2 = \frac{k}{16m}(\theta_M^4 - \theta^4)$; $T = \frac{16}{\theta_M}\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$

Exercice 4 : Satellite atypique

1) $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_0\left(1-\frac{3\mathcal{G}M}{r_0c^2}\right)}}$ si $r_0 > \frac{3\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$ et $\overrightarrow{v_0}$ orthoradiale.

2) Faire apparaître $E_{\text{p,eff}} = -\frac{\mathcal{G}\,m\,M}{r} - \frac{\mathcal{G}\,m\,M\,r_0^2\,v_0^2}{c^2\,r^3} + \frac{m\,r_0^2\,v_0^2}{2r^2}$. Le satellite est viable si r reste borné , il faut donc $v_0 > \frac{\sqrt{12}\,\mathcal{G}\,M}{r_0\,c}$.

Exercice 5 : Chocs sur un oscillateur

Entre deux chocs : $M\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$; au cours d'un choc on a $w'^2 + v'^2 = w^2 + v^2$ et $mw' + Mv' = mw + Mv$ soit $w' = (2Mv + (m-M)w)/(m+M) \approx -w$ et $M\,(v' - v) \approx 2m\,w$.
Si $F \gg F_0 = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ la masse M trouve une position d'équilibre en $x_e = 2mFw/k$; si $F \ll F_0$ la masse M subit une succession de cycles identiques excitation-désexcitation et si $F \to F_0$ on peut penser à une résonance.

Exercice 6 : Tapis roulant

1) $\omega = \frac{FRPt}{J}$; $\tau = \frac{Jv}{fPR^2}$; $\Delta E_c = \frac{Jv^2}{2R^2}$ et $W_{\text{tapis}} = \frac{Jv^2}{R^2}$.

2) $v = v_0 + \frac{(F-fP)t}{m}$, le glissement cesse si $F < F_c = fP\left(1 + \frac{mR^2}{J}\right)$ et cela se produit à la date $\tau = \frac{mv_0}{F_c - F}$. Pour $t > \tau$, $\dot{v} = \frac{F}{m + \frac{J}{R^2}}$.

Exercice 7 : Corde

Distinguer l'angle $\alpha = L/R$ qui paramètre la longueur de la corde, l'angle $\varepsilon(t)$ dont le point de la corde initialement en S a tourné et un angle courant θ sur la corde avec $\varepsilon < \theta < \alpha + \varepsilon$. Deux méthodes possibles :

1) TEM à toute la corde : $(1/2)\,\mu\,R^3\,\alpha\,\dot{\varepsilon}^2 + \mu\,g\,R^2\int_\varepsilon^{\varepsilon+\alpha}\cos\theta\,d\theta = \text{cte}$ puis $\mu\,R^3\,\alpha\,\ddot{\varepsilon} = \mu\,g\,R^2\,(\cos\varepsilon - \cos(\varepsilon+\alpha))$; $a_0 = g\,(1 - \cos\alpha)/\alpha$

2) TRD à un brin de corde (cf cours ondes) : $\mu\,R^2\,\ddot{\varepsilon}\,d\theta = dT + \mu\,R\,g\,\sin\theta\,d\theta$; $T(\varepsilon) = T(\alpha+\varepsilon) = 0$; $a_0 = g\,(1 - \cos\alpha)/\alpha$